Løsningsforslag til sluttprøve i fag A3494 Prosessregulering mandag 13. desember 2004 kl. 9-12

January 5, 2005

Oppgave 1 (40%): Frekvensplananalyse

a) Sløyfetransferfunksjonen er gitt ved:

$$h_0(s) = h_c(s)h_p(s) \tag{1}$$

b) Velger vi

$$T_i = T_1 \tag{2}$$

får vi

$$h_0(s) = h_c(s)h_p(s) = K_p\frac{1+T_is}{T_is}k\frac{e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = k_0\frac{e^{-\tau s}}{s(1+T_2s)} \tag{3}$$

der

$$k_0 = \frac{K_pk}{T_1} \tag{4}$$

c) Frekvensresponsen til sløyfetransferfunksjonen kan skrives slik

$$h_0(j\omega) = k_0\frac{e^{-j\tau\omega}}{j\omega(1+jT_2\omega)} = |h_0(j\omega)|e^{j\angle h_0(j\omega)} \tag{5}$$

der amplitudeforholdet er gitt ved

$$|h_0(j\omega)| = \frac{k_0}{\omega\sqrt{1+(T_2\omega)^2}} \tag{6}$$

og fasevinkelen er gitt ved

$$\angle h_0(j\omega) = -\tau\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan(T_2\omega) \tag{7}$$

d) Fasekryssfrekvensen, ω_{180}, er den frekvens som gir en fasevinkel lik $-\pi$. Vi må løse ligningen

$$\angle h_0(j\omega) = -\tau\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan(T_2\omega) = -\pi \tag{8}$$

med hensyn på ω. Denne ligningen er ulineær i ω. Vi kan for eksempel lage følgende fiks-punkt iterasjonsligning

$$\omega^{i+1} = \frac{1}{\tau}(\frac{\pi}{2} - \arctan(T_2\omega^i)) \tag{9}$$

En startverdi $\omega^1 = 1$ gir etter noen iterasjoner

$$\omega_{180} \approx 0.6323 \tag{10}$$

e) Vi kan finne den K_p som gir en forsterkningsmargin, $GM = 2$ ut i fra definisjonen

$$GM = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})}|. \tag{11}$$

For enkelthetsskyld definerer vi

$$|h_0(j\omega_{180})| = K_p|\tilde{h_0}(j\omega_{180})| \tag{12}$$

der

$$\tilde{h_0}(j\omega_{180})| = \frac{k}{T_1\omega_{180}\sqrt{1 + (T_2\omega_{180})^2}} \tag{13}$$

Dette gir en proporsjonalforsterkning

$$K_p = \frac{1}{2|\tilde{h_0}(j\omega_{180})|} \approx 0.6631 \tag{14}$$

f) Vi finner fasemarginen, PM, til det tilbakekoblede systemet fra definisjonen

$$PM = \angle h_0(j\omega_c) + \pi \tag{15}$$

der forsterkningskryssfrekvensen, w_c, finnes i fra definisjonen

$$|h_0(j\omega_c)| = 1 \tag{16}$$

Fra denne definisjonen kan vi lage følgende fikspunktiterasjonsskjema for ω_c.

$$\omega^{i+1} = \frac{k_0}{\sqrt{1 + (T_2\omega^i)^2}} \tag{17}$$

Noen iterasjoner gir

$$\omega_c = 0.3272 \tag{18}$$

Fasemarginen blir da

$$PM = -\tau\omega_c - \frac{\pi}{2} - \arctan(T_2\omega_c) + \pi = 0.7572 = 43.2° \tag{19}$$

Oppgave 2 (30%): Diverse sprsml

a) Se kap 10.2 og figur 10.1 i kompendiet.

b) Se kap. 11.2 i kompendiet.

c) En kontinuerlig tilstandsrommodell for PI regulatoren kan f.eks være

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{K_p}{T_i} e && (20) \\ u &= K_p e + z && (21) \end{aligned}$$

Diskretiserer vi denne med Trapesmetoden får vi

$$\begin{aligned} \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta t} &= \frac{K_p}{T_i}(\frac{1}{2} e_{k+1} + \frac{1}{2} e_k) && (22) \\ u_k &= K_p e_k + z_k && (23) \end{aligned}$$

En beskrivelse av PI regulatoren på endringsform får vi ved å utvikle

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= K_p e_k + z_k - (K_p e_{k-1} + z_{k-1}) \\ &= K_p e_k - K_p e_{k-1} + (z_k - z_{k-1}) && (24) \end{aligned}$$

Fra (22) får vi at

$$z_k - z_{k-1} = \frac{\Delta t K_p}{2T_i}(e_{k-1} + e_k) \qquad (25)$$

innsetter vi dette i (24) får vi

$$u_k = u_{k-1} = g_0 e_k + g_1 e_{k-1} \qquad (26)$$

der

$$g_0 = K_p(1 + \frac{\Delta t}{2T_i}), \quad g_1 = -K_p(1 - \frac{\Delta t}{2T_i}) \qquad (27)$$