Avdeling for allmenne fag

SLUTTPRØVE

I

4100-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

17.12.2008

Tid: 5 timar

Målform: Bokmål/nynorsk

Sidetal: 6 + framside

Hjelpemiddel: Kalkulator og formelsamling

Merknader: Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa

Vedlegg: mm-papir og formelsamling

Eksamensresultata blir offentleggjort på følgjande internettadresse:
http://www-bo.hit.no/af/eplanidx.htm

Bokmål

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 9x - 5$

2) $g(x) = \cos x \cdot \ln x^2$

3) $h(x) = \dfrac{2-x}{x^2-4}$

b. 1) Løs likningen

$$e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$$

2) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$5 + \frac{5(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{5(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{5(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \ldots$$

c. Regn ut integralene

1) $\int(-15x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{2}{5}x + 5)dx$

2) $\int x \cdot \cos\, x\, dx$

3) $\int_{\ln 2}^{1} x^3 \cdot e^{x^4}\, dx$

OPPGAVE 2

I u-landene har bybefolkningen økt fra 678 millioner i 1970 til 2 252 millioner i 2005.

a. Hvor mange prosent økte bybefolkningen i u-landene med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen i bybefolkningen i u-landene i denne perioden?

c. I hvilket år passerte denne bybefolkningen 1 204 millioner?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$, $D_f = [-2, 5\rangle$

a. Finn nullpunktene til f.

b. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

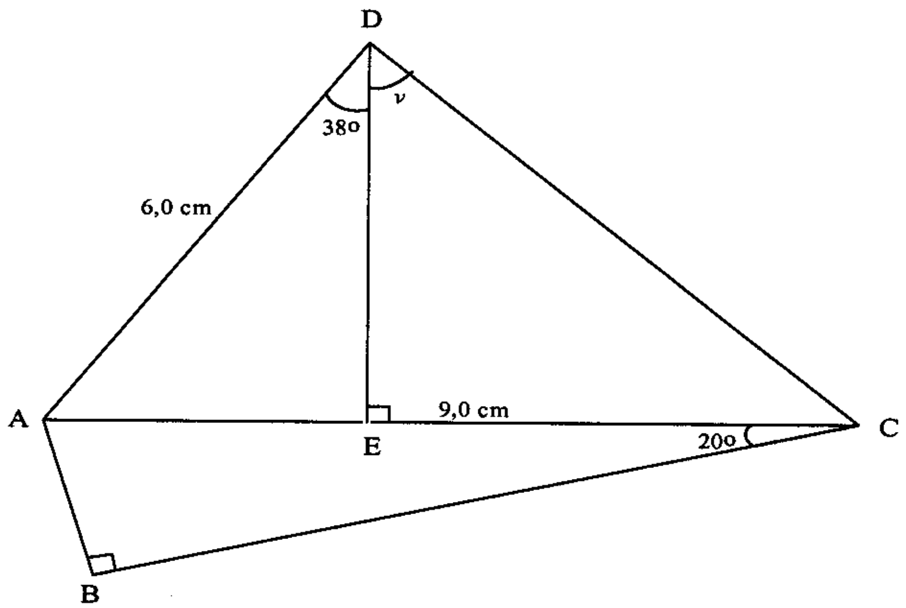
c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og x-aksen avgrenser en flate som ligger under x-aksen. Finn arealet av denne flaten.

OPPGAVE 4

Firkanten ABCD og punktet E er gitt som på figuren. Siden AD = 6,0 cm, diagonalen AC = 9,0 cm, $\angle$ADE = 38°, $\angle$ABC = 90° og $\angle$ACB = 20°.



a. Regn ut lengden av sidene AE og DE i trekant ACD.

b. Finn arealet av firkant ABCD, og regn ut vinkelen $v = \angle$EDC.

OPPGAVE 5

I tidsrommet 1970 til 2006 økte verdens bruttonasjonalprodukt per år til enhver tid proporsjonalt med verdens bruttonasjonalprodukt. Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1970.

a. Sett opp en differensiallikning som viser sammenhengen mellom verdens bruttonasjonalprodukt $y(t)$ gitt i trillioner dollar og tida t.

b. Ved slutten av 1970 og 2006 var verdens bruttonasjonalprodukter henholdsvis 18,6 og 65,1 trillioner dollar. Vis at verdens bruttonasjonalprodukt er gitt ved

$$y(t) = 18{,}6 \cdot e^{0{,}0348t}$$

c. Hva var verdens bruttonasjonalprodukt i 1990?

d. I hvilket år passerte verdens bruttonasjonalprodukt 45,2 trillioner dollar?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 4y + 13$

a. Funksjonen har ett maksimumspunkt. Finn dette maksimumspunktet med tilhørende maksimum.

b. Løs differensiallikningen

$$y' = y \cdot t^2$$

med initialbetingelsen $y(0) = 3$.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 9x - 5$

2) $g(x) = \cos x \cdot \ln x^2$

3) $h(x) = \dfrac{2-x}{x^2-4}$

b. 1) Løys likninga

$$e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$$

2) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$5 + \frac{5(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{5(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{5(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \ldots$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int(-15x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{2}{5}x + 5)dx$

2) $\int x \cdot \cos x \, dx$

3) $\int_{\ln 2}^{1} x^3 \cdot e^{x^4} \, dx$

OPPGÅVE 2

I u-landa har bybefolkningen auka frå 678 millionar i 1970 til 2 252 millionar i 2005.

a. Kor mange prosent auka bybefolkningen i u-landa med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga i bybefolkningen i u-landa i denne perioden?

c. I kva for år passerte denne bybefolkningen 1 204 millionar?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$, $D_f = [-2, 5\rangle$

a. Finn nullpunkta til f.

b. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

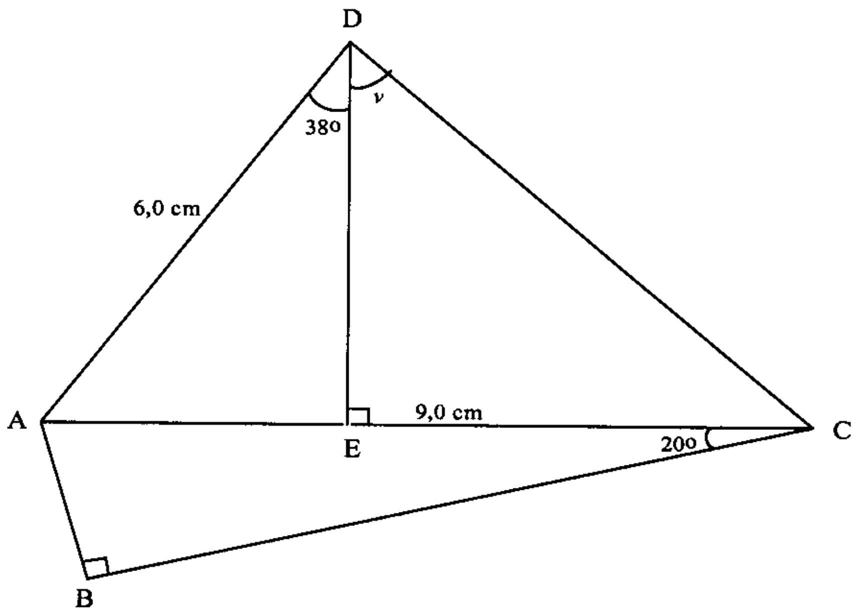
c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og x-aksen avgrensar ei flate som ligg under x-aksen. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4

Firkanten ABCD og punktet E er gitt som i figuren. Sida AD = 6,0 cm, diagonalen AC = 9,0 cm, $\angle$ADE = 38°, $\angle$ABC = 90° og $\angle$ACB = 20°.



a. Rekn ut lengda av sidene AE og DE i trekant ACD.

b. Finn arealet av firkant ABCD, og rekn ut vinkelen $v = \angle$EDC.

OPPGÅVE 5

I tidsrommet 1970 til 2006 auka verdas bruttonasjonalprodukt per år til ei kvar tid proporsjonalt med verdas bruttonasjonalprodukt. Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1970.

a. Sett opp ei differensiallikning som viser samanhengen mellom verdas bruttonasjonalprodukt $y(t)$ gitt i trillionar dollar og tida t.

b. Ved slutten av 1970 var verdas bruttonasjonalprodukt 18,6 trillionar dollar, og ved slutten av 2006 var det 65,1 trillionar dollar. Vis at verdas bruttonasjonalprodukt er gitt ved

$$y(t) = 18{,}6 \cdot e^{0{,}0348t}$$

c. Kva var verdas bruttonasjonalprodukt i 1990?

d. I kva for år passerte verdas bruttonasjonalprodukt 45,2 trillionar dollar?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 4y + 13$

a. Funksjonen har eitt maksimumspunkt. Finn dette maksimumspunktet med tilhørande maksimum.

b. Løys differensiallikninga

$$y' = y \cdot t^2$$

med initialvilkåret $y(0) = 3$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$a^0 \overset{def}{=} 1$

$a^{-x} \overset{def}{=} \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} \overset{def}{=} \sqrt[y]{a^x}$

$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$

$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$10^{\log a} = a$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$e^{\ln a} = a$

$\ln e^a = a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \cdot \ln a$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{kt}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{at} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv} \sin a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv} \cos b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$