Avdeling for allmenne fag

SLUTTPRØVE

I

4100-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

13.03.2009

Tid: 5 timar

Målform: Bokmål/nynorsk

Sidetal: 8 + framside

Hjelpemiddel: Kalkulator og formelsamling

Merknader: Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa

Vedlegg: mm-papir og formelsamling

Eksamensresultata blir offentleggjort på følgjande internettadresse:
http://www-bo.hit.no/af/eplanidx.htm

BOKMÅLSTEKST

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = 5x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$

2) $g(x) = \cos x \cdot (\ln x)^2$

3) $h(x) = \dfrac{-x+2}{x^2-4}$

b. 1) Løs likningen

$$e^{2x} + e^x - 12 = 0$$

2) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$2 + \frac{2(\sqrt{6}-2)}{3} + \frac{2(\sqrt{6}-2)^2}{9} + \frac{2(\sqrt{6}-2)^3}{27} + \ldots$$

c. Regn ut integralene

1) $\int(-6x^5 + 8x^3 - \frac{3}{2}x + 7)dx$

2) $\int x \cdot e^x \, dx$

3) $\int_1^2 (x^2-1)^2 \cdot 2x \, dx$

OPPGAVE 2

Ved slutten av1960 var konsentrasjonen av CO_2 i atmosfæren 317 ppm og ved slutten av 2001 371 ppm.

a. Hvor mange prosent økte CO_2- konsentrasjonen med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av CO_2-konsentrasjonen i denne perioden?

c. Anta at den årlige prosentvise økningen av CO_2-konsentrasjonen i denne perioden er konstant.
I hvilket år passerte CO_2- konsentrasjonen 356 ppm?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2$, $D_f = [-1, 4]$

a. Finn nullpunktene til f.

b. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

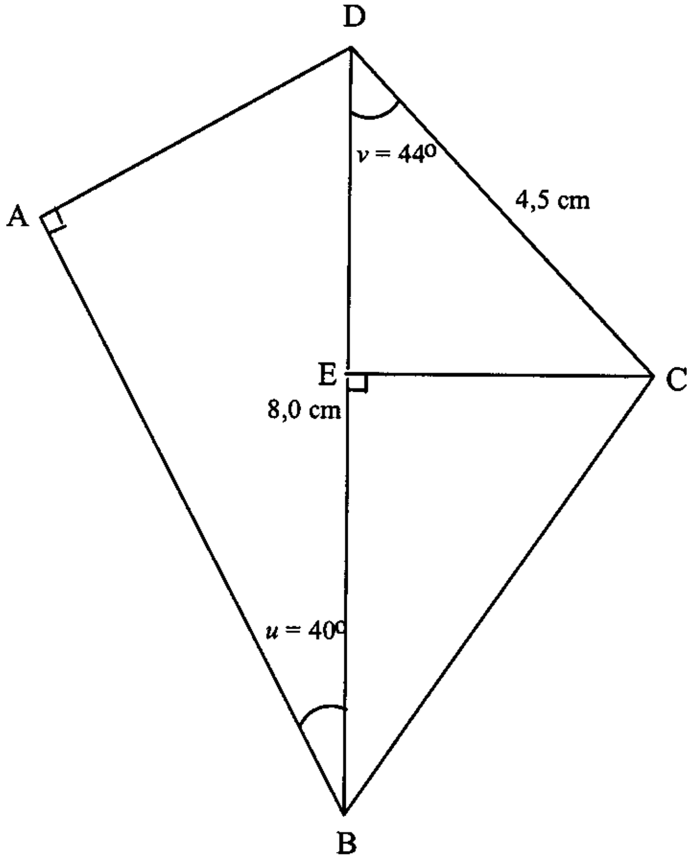
c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og x-aksen avgrenser en flate som ligger under x-aksen. Finn arealet av denne flaten.

OPPGAVE 4

I firkant ABCD er diagonalen BD = 8,0 cm, siden CD = 4,5 cm, $\angle$ ABD = u = 40° og $\angle$ BDC = v = 44°.



a. Regn ut lengden av sidene AB og AD.

b. Finn lengden av BC og $\angle$ DBC.

OPPGAVE 5

I perioden 1961-2000 økte verdens irrigerte jordbruksareal per år til enhver tid proporsjonalt med verdens irrigerte jordbruksareal.

a. Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1961. $y(t)$ er verdens irrigerte jordbruksareal målt i millioner hektar (Mha) ved tida t.
Sett opp differensiallikninga som har løsningen $y(t)$.

b. Ved slutten av 1961 var verdens irrigerte jordbruksareal 139 Mha, og ved slutten av 2000 var det økt til 276 Mha. Vis at verdens irrigerte jordbruksareal i denne perioden er gitt ved

$$y(t) = 139 \cdot e^{0{,}0176t}$$

c. Hvor stort var verdens irrigerte jordbruksareal ved slutten av 1979?

d. I hvilket år passerte verdens irrigerte jordbruksareal 204 Mha?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2 + 4x - 16y + 6$

a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

b. Løs differensiallikningen

$$y' = 2y^2 - 18y + 40$$

med initialbetingelsen $y(0) = \frac{13}{3}$.

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \dfrac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \dfrac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv} \sin a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv} \cos b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$a^0 \stackrel{def}{=} 1$

$a^{-x} \stackrel{def}{=} \dfrac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} \stackrel{def}{=} \sqrt[y]{a^x}$

$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$

$\left(\dfrac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$10^{\log a} = a$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$e^{\ln a} = a$

$\ln e^a = a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \cdot \ln a$