Avdeling for allmenne fag

SLUTTPRØVE

I

4100-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

13.03.2009

Tid: 5 timar

Målform: Bokmål/nynorsk

Sidetal: 8 + framside

Hjelpemiddel: Kalkulator og formelsamling

Merknader: Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa

Vedlegg: mm-papir og formelsamling

Eksamensresultata blir offentleggjort på følgjande internettadresse:
http://www-bo.hit.no/af/eplanidx.htm

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = 5x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$

2) $g(x) = \cos x \cdot (\ln x)^2$

3) $h(x) = \dfrac{-x+2}{x^2-4}$

b. 1) Løys likninga

$$e^{2x} + e^x - 12 = 0$$

2) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$2 + \frac{2(\sqrt{6}-2)}{3} + \frac{2(\sqrt{6}-2)^2}{9} + \frac{2(\sqrt{6}-2)^3}{27} + \ldots$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int(-6x^5 + 8x^3 - \frac{3}{2}x + 7)dx$

2) $\int x \cdot e^x \, dx$

3) $\int_1^2 (x^2-1)^2 \cdot 2x \, dx$

OPPGÅVE 2

Ved slutten av 1960 var konsentrasjonen av CO_2 i atmosfæren 317 ppm og ved slutten av 2001 371 ppm.

a. Kor mange prosent auka CO_2- konsentrasjonen med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av CO_2-konsentrasjonen i denne perioden?

c. Anta at den årlege prosentvise aukinga av CO_2-konsentrasjonen i denne perioden er konstant.
I kva for år passerte CO_2- konsentrasjonen 356 ppm?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon *f* er definert ved $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2$, $D_f = [-1, 4]$

a. Finn nullpunkta til *f*.

b. Bestem monotonieigenskapane til *f*, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til *f*.

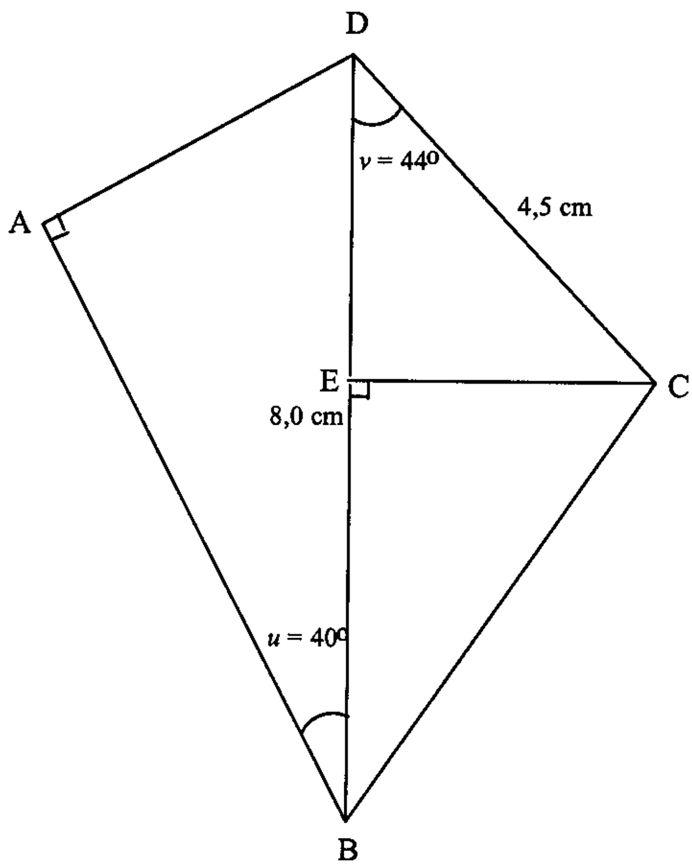
c. Undersøk korleis grafen til *f* krummar i de ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til *f*.

d. Teikn grafen til *f*.

e. Grafen til *f* og *x*-aksen avgrensar ei flate som ligg under *x*-aksen. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4

I firkant ABCD er diagonalen BD = 8,0 cm, sida CD = 4,5 cm, $\angle ABD = u = 40^\circ$ og $\angle BDC = v = 44^\circ$.



a. Rekn ut lengda av sidene AB og AD.

b. Finn lengda av BC og $\angle DBC$.

OPPGÅVE 5

I perioden 1961-2000 auka verdas irrigerte jordbruksareal per år til ei kvar tid proporsjonalt med verdas irrigerte jordbruksareal.

a. Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1961. $y(t)$ er verdas irrigerte jordbruksareal målt i millionar hektar (Mha) ved tida t.
Sett opp differensiallikninga som har løysninga $y(t)$.

b. Ved slutten av 1961 var verdas irrigerte jordbruksareal 139 Mha, og ved slutten av 2000 var det auka til 276 Mha. Vis at verdas irrigerte jordbruksareal i denne perioden er gitt ved

$$y(t) = 139 \cdot e^{0,0176t}$$

c. Kor stort var verdas irrigerte jordbruksareal ved slutten av 1979?

d. I kva for år passerte verdas irrigerte jordbruksareal 204 Mha?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2 + 4x - 16y + 6$

a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.

b. Løys differensiallikninga

$$y' = 2y^2 - 18y + 40$$

med initialvilkåret $y(0) = \frac{13}{3}$.

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon f(x,y) enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for (x,y) = (a,b), så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv} \sin a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv} \cos b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$a^0 \overset{def}{=} 1$

$a^{-x} \overset{def}{=} \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} \overset{def}{=} \sqrt[y]{a^x}$

$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$

$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$10^{\log a} = a$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$e^{\ln a} = a$

$\ln e^a = a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \cdot \ln a$