Høgskolen i Telemark
Avdeling for allmennvitskaplege fag

EKSAMEN

Emnekode:	**6001**
Emnenamn:	**Matematikk**
Studiepoeng for emnet:	**7,5 stp**
Omfang av denne eksamenen i % av heile emnet:	100%
Eksamensdato:	24.11. 2010
Lengde/tidsrom:	09:00 – 14:00
Eksamensstad:	Bali
Målform:	Bokmål og nynorsk
Ant. sider inkl. framside	5
Tillatne hjelpemidlar:	Formelsamling og kalkulator
Merknader:	Ingen
Ant. vedlegg:	Ingen

Eksamensresultat finn du etter sensurfall ved å logge deg inn med brukarnamn og passord på StudentWeb (hit.no)

Oppgave 1

BOKMÅL

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad D_f = [-2, 2]$$

(a) Regn ut $f(-2)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ og $f(2)$.

(b) Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$. Finn deretter nullpunktene til $f(x)$.

(c) Finn ekstrempunktene innenfor definisjonsmengden, og avgjør om de er globale eller kun lokale. Regn ut tilhørende ekstremverdier.

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$, og bestem hvor grafen til $f(x)$ er konkav og hvor den er konveks.

(e) Skisser grafen til $f(x)$ innenfor definisjonsmengden. Skraver området i diagrammet som avgrenses av grafen til $f(x)$ og x-aksen i intervallet mellom $x = -1$ og $x = 1$. Regn ut størrelsen på dette arealet.

Oppgave 2

Betrakt funksjonen definert ved

$$g(x) = x^2 e^{-x^2} \quad D_g = [-2, 2]$$

(a) Vis at $g'(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x)(1 + x)$.

(b) Avgjør hvor $g(x)$ er voksende og hvor den er avtakende.

(c) Finn minimumspunktet til $g(x)$.
Forklar hvorfor dette punktet opplagt må være minimum ved å betrakte uttrykket for $g(x)$ direkte.

Oppgave 3

(a) Du får følgende valg:

Alternativ 1: Kroner 75.000 utbetalt om ti år.
Alternativ 2: Kroner 10.000 utbetalt hvert år i fem år, første gang nå.
Alternativ 3: Kroner 25.000 utbetalt nå og 25.000 utbetalt om fem år.

Anta at renta er 5% per år. Hvilket alternativ er det gunstigste fra et økonomisk synspunkt?

(b) Jorge (fra Burgos) har tatt opp et lån på 700 000 kroner som skal tilbakebetales over 12 år med like store årlige beløp. Første betaling er ett år etter låneopptak. Den årlige renta er 5%. Hva blir det årlige beløpet? Like før den 10. betalingen bestemmer Jorge seg for å innløse restgjelden. Hvor stor er restgjelden på dette tidspunktet?

Oppgave 4

Bedriften Kokosbollespesialisten produserer og selger produktene Kokosboller og Pikekyss. Ved salg av x tonn Kokosboller oppnår bedriften en pris

$$p = 48 - 2x$$

per tonn, og ved salg av y tonn Pikekyss er prisen per tonn lik

$$q = 36 - y$$

Kostnadene ved å produsere og selge henholdsvis x og y tonn av de to varene er gitt ved

$$C(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^2$$

(a) Vis at bedriftens profittfunksjon kan skrives som

$$\pi(x,y) = -4x^2 - 2y^2 - 4xy + 48x + 36y$$

(b) Beregn de partielle deriverte av første orden for $\pi(x,y)$, og finn det eneste stasjonære punktet.

(c) Hvis $\pi''_{xx}(x,y) \le 0$, $\pi''_{yy}(x,y) \le 0$ og $\pi''_{xx}(x,y)\pi''_{yy}(x,y) - \left(\pi''_{xy}(x,y)\right)^2 \ge 0$ for alle (x,y), vil et stasjonært punkt være globalt maksimum for $\pi(x,y)$. Vis at disse betingelsene er oppfylt i dette tilfellet.

(d) Anta at produksjonen medfører store forurensningsutslipp (av kokosnøttskall), og at myndighetene av denne grunn begrenser total produksjon til nøyaktig 5 tonn tilsammen av de to varene. Hvilke verdier av x og y vil nå maksimere profitten?

(e) Begrunn at $\pi(x,y)$ faktisk er lavere i tilfellet med produksjonsbegrensning sammenliknet med tilfellet uten en slik begrensning.

Oppgåve 1

NYNORSK

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad D_f = [-2, 2]$$

(a) Rekn ut $f(-2)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ og $f(2)$.

(b) Vis at $f(x)$ kan skrivast som $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$. Finn deretter nullpunkta til $f(x)$.

(c) Finn ekstrempunkta innafor definisjonsmengda, og avgjer om dei er globale eller kun lokale. Rekn ut tilhøyrande ekstremverdiar.

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$, og bestem kor grafen til $f(x)$ er konkav og kor han er konveks.

(e) Skisser grafen til $f(x)$ innafor definisjonsmengda. Skraver området i diagrammet som avgrensast av grafen til $f(x)$ og x-aksen i intervallet mellom $x = -1$ og $x = 1$. Rekn ut storleiken på dette arealet.

Oppgåve 2

Sjå på funksjonen definert ved

$$g(x) = x^2 e^{-x^2} \quad D_g = [-2, 2]$$

(a) Vis at $g'(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x)(1 + x)$.

(b) Avgjer kor $g(x)$ er veksande og kor han er avtakande.

(c) Finn minimumspunktet til $g(x)$.
Forklar kvifor dette punktet opplagt må være minimum ved å sjå på uttrykket for $g(x)$ direkte.

Oppgåve 3

(a) Du får følgjande val:

Alternativ 1: Kroner 75.000 utbetalt om ti år.
Alternativ 2: Kroner 10.000 utbetalt kvart år i fem år, første gang nå.
Alternativ 3: Kroner 25.000 utbetalt nå og 25.000 utbetalt om fem år.

Anta at renta er 5% per år. Kva for alternativ er det gunstigaste frå eit økonomisk synspunkt?

(b) Jorge (frå Burgos) har tatt opp eit lån på 700 000 kroner som skal tilbakebetalast over 12 år med like store årlege beløp. Første betaling er eitt år etter låneopptak. Den årlege renta er 5%. Kva blir det årlege beløpet? Like før den 10. betalinga bestemmer Jorge seg for å innløyse restgjelda. Kor stor er restgjelda på dette tidspunktet?

Oppgåve 4

Bedriften Kokosbollespesialisten produserer og sel produkta Kokosbollar og Pikekyss. Ved sal av x tonn Kokosbollar oppnår bedriften ein pris

$$p = 48 - 2x$$

per tonn, og ved sal av y tonn Pikekyss er prisen per tonn lik

$$q = 36 - y$$

Kostnadane ved å produsere og selje høvesvis x og y tonn av dei to varene er gitt ved

$$C(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^2$$

(a) Vis at bedriften sin profittfunksjon kan skrivast som

$$\pi(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 4xy + 48x + 36y$$

(b) Finn dei partielle deriverte av første orden for $\pi(x, y)$, og finn det einaste stasjonære punktet.

(c) Hvis $\pi''_{xx}(x, y) \leq 0$, $\pi''_{yy}(x, y) \leq 0$ og $\pi''_{xx}(x, y)\pi''_{yy}(x, y) - \left(\pi''_{xy}(x, y)\right)^2 \geq 0$ for alle (x, y), vil eit stasjonært punkt være globalt maksimum for $\pi(x, y)$. Vis at disse vilkåra er oppfylt i dette tilfellet.

(d) Anta at produksjonen medfører store forureiningsutslepp (av kokosnøttskall), og at myndigheitene av denne grunn begrenser total produksjon til nøyaktig 5 tonn til saman av dei to varene. Kva for verdiar av x og y vil nå maksimere profitten?

(e) Grunngi at $\pi(x, y)$ faktisk er lågare i tilfellet med produksjonsbegrensning samanlikna med tilfellet uten ei slik begrensning.