Høgskolen i Telemark
Avdeling for allmennvitskaplege fag

EKSAMEN

Emnekode:	**6001**
Emnenamn:	**Matematikk**
Studiepoeng for emnet:	**7,5 stp**
Omfang av denne eksamenen i % av heile emnet:	100%
Eksamensdato:	03.12. 2010
Lengde/tidsrom:	09:00 – 14:00
Eksamensstad:	Sydney
Målform:	Bokmål og nynorsk
Ant. sider inkl. framside	5
Tillatne hjelpemidlar:	Formelsamling og kalkulator
Merknader:	Ingen
Ant. vedlegg:	Ingen

Eksamensresultat finn du etter sensurfall ved å logge deg inn med brukarnamn og passord på StudentWeb (hit.no)

Oppgave 1

BOKMÅL

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad D_f = [-2, 2]$$

(a) Regn ut $f(-2)$, $f(-\frac{1}{3})$, $f(1)$ og $f(2)$.

(b) Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-1)^2(x+1)$. Finn deretter nullpunktene til $f(x)$.

(c) Finn ekstrempunktene innenfor definisjonsmengden, og avgjør om de er globale eller kun lokale. Regn ut tilhørende ekstremverdier.

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$, og bestem hvor grafen til $f(x)$ er konkav og hvor den er konveks.

(e) Skisser grafen til $f(x)$ innenfor definisjonsmengden. Skraver området i diagrammet som avgrenses av grafen til $f(x)$ og x-aksen i intervallet mellom $x = -1$ og $x = 1$. Regn ut størrelsen på dette arealet.

Oppgave 2

Betrakt funksjonen definert ved

$$g(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$$

(a) Bestem definisjonsmengden til $g(x)$.

(b) Vis at $g'(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

(c) Avgjør hvor $g(x)$ er strengt voksende og hvor den er strengt avtakende.

Oppgave 3

(a) Et beløp på kr 5000 settes i banken. Innskuddsrenta er 6% per år.
Hva har beløpet vokst til etter 10 år hvis rentepåtegningen skjer

(i) årlig?

(ii) kontinuerlig?

Hvor lenge (tilnærmet) må beløpet stå før det har vokst til det dobbelte hvis rentepåtegningen skjer henholdsvis årlig og kontinuerlig?

(b) Et lån på 500 000 kroner skal tilbakebetales over 10 år med like store årlige beløp. Første betaling er ett år etter låneopptak. Den årlige renta er 6%. Hva blir det årlige beløpet? Hvor mye er renter og hvor mye er avdrag i henholdsvis den første og den siste betalingen?

Oppgave 4

Bedriften Bamsemumsspesialisten & Søn produserer og selger produktene Bamsemums og Bjørnebærsaft. Ved salg av *x* tonn Bamsemums oppnår bedriften en pris per tonn gitt ved

$$p = 96 - 4x$$

og ved salg av *y* tonn Bjørnebærsaft er prisen per tonn gitt ved

$$q = 84 - 2y$$

Kostnadene ved å produsere og selge *x* tonn Bamsemums og *y* tonn Bjørnebærsaft er gitt ved

$$C(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$$

(a) Vis at bedriftens profittfunksjon kan skrives som

$$\pi(x, y) = -6x^2 - 3y^2 - 2xy + 96x + 84y$$

(b) Beregn de partielle deriverte av første orden for $\pi(x, y)$, og finn det eneste stasjonære punktet.

(c) Hvis $\pi''_{xx}(x, y) \leq 0$, $\pi''_{yy}(x, y) \leq 0$ og $\pi''_{xx}(x, y)\pi''_{yy}(x, y) - \left(\pi''_{xy}(x, y)\right)^2 \geq 0$ for alle (x, y), vil et stasjonært punkt være globalt maksimum for $\pi(x, y)$. Vis at disse betingelsene er oppfylt i dette tilfellet.

(d) Anta at produksjonen medfører forurensningsutslipp, og at myndighetene av denne grunn begrenser total produksjon til nøyaktig 11 tonn til sammen av de to produktene. Løs bedriftens maksimeringsproblem i dette tilfellet.

(e) Begrunn at $\pi(x, y)$ faktisk er lavere i tilfellet med produksjonsbegrensning sammenliknet med tilfellet uten en slik begrensning.

Oppgåve 1

NYNORSK

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad D_f = [-2, 2]$$

(a) Rekn ut $f(-2)$, $f(-\frac{1}{3})$, $f(1)$ og $f(2)$.

(b) Vis at $f(x)$ kan skrivast som $f(x) = (x-1)^2(x+1)$. Finn deretter nullpunkta til $f(x)$.

(c) Finn ekstrempunkta innafor definisjonsmengda, og avgjer om dei er globale eller kun lokale. Rekn ut tilhøyrande ekstremverdiar.

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$, og bestem kor grafen til $f(x)$ er konkav og kor han er konveks.

(e) Skisser grafen til $f(x)$ innafor definisjonsmengda. Skraver området i diagrammet som avgrensast av grafen til $f(x)$ og x-aksen i intervallet mellom $x = -1$ og $x = 1$. Rekn ut storleiken på dette arealet.

Oppgåve 2

Sjå på funksjonen definert ved

$$g(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$$

(a) Finn definisjonsmengda til $g(x)$.

(b) Vis at $g'(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

(c) Avgjer kor $g(x)$ er strengt veksande og kor han er strengt avtakande.

Oppgåve 3

(a) Eit beløp på kr 5000 settast i banken. Innskotsrenta er 6% per år.
Kva har beløpet vakse til etter 10 år hvis rentepåteikninga skjer

(i) årleg?

(ii) kontinuerleg?

Kor lenge (tilnærma) må beløpet stå før det har vakse til det dobbelte hvis rentepåteikninga skjer høvesvis årleg og kontinuerleg?

(b) Eit lån på 500 000 kroner skal tilbakebetalast over 10 år med like store årlege beløp. Første betaling er eitt år etter låneopptak. Den årlege renta er 6%. Kva blir det årlege beløpet? Kor mykje er renter og kor mykje er avdrag i høvesvis den første og den siste betalinga?

Oppgåve 4

Bedriften Bamsemumsspesialisten & Søn produserer og sel produkta Bamsemums og Bjørnebærsaft. Ved sal av x tonn Bamsemums oppnår bedriften ein pris per tonn gitt ved

$$p = 96 - 4x$$

og ved sal av y tonn Bjørnebærsaft er prisen per tonn gitt ved

$$q = 84 - 2y$$

Kostnadane ved å produsere og selje x tonn Bamsemums og y tonn Bjørnebærsaft er gitt ved

$$C(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$$

(a) Vis at bedriften sin profittfunksjon kan skrivast som

$$\pi(x, y) = -6x^2 - 3y^2 - 2xy + 96x + 84y$$

(b) Finn dei partielle deriverte av første orden for $\pi(x, y)$, og finn det einaste stasjonære punktet.

(c) Hvis $\pi''_{xx}(x, y) \le 0$, $\pi''_{yy}(x, y) \le 0$ og $\pi''_{xx}(x, y)\pi''_{yy}(x, y) - \left(\pi''_{xy}(x, y)\right)^2 \ge 0$ for alle (x, y), vil eit stasjonært punkt være globalt maksimum for $\pi(x, y)$. Vis at desse vilkåra er oppfylt i dette tilfellet.

(d) Anta at produksjonen medfører forureiningsutslepp, og at myndigheitene av denne grunn begrenser total produksjon til nøyaktig 11 tonn til saman av dei to produkta. Løys bedriften sitt maksimeringsproblem i dette tilfellet.

(e) Grunngi at $\pi(x, y)$ faktisk er lågare i tilfellet med produksjonsbegrensing samanlikna med tilfellet uten ei slik begrensing.