Avdeling for allmenne fag

MIDTPRØVE

I

4100-001 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

05.10.2011

Tid:	1 time
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	2 + framside
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 7 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	Inga

Eksamensresultata blir offentleggjort på lister med kandidatnummer via studentweb.

Bokmål

Oppgave 1

a) Løs likninga

$$\frac{x}{x-6}-\frac{x+10}{x^2-36}=\frac{x-3}{x+6}$$

b) I et stykke messing er det 98 g kobber og 42 g sink.
Hvor mange prosent sink er det i denne legeringa?

En ventil av messing kostet kr 200. Prisen gikk deretter opp med 25 %, men etter en stund falt den med 14 %.
Hvor mange prosent høyere ble den endelige sluttprisen i forhold til utgangsprisen på kr 200?

c) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utregningene som gjøres.

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\left(\frac{13}{14}-\frac{1}{2}\right)+\frac{48}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{9}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$$

Oppgave 2

a) For to utfall A og B er det gitt at $P(A) = 0{,}55$, $P(B) = 0{,}35$ og $P(A \cap B) = 0{,}25$.
Regn ut $P(\overline{A})$, $P(A \cup B)$, $P(B|A)$ og $P(A|B)$.

b) Fra en populasjon på $N = 8$ enheter trekkes det ut $s = 5$ enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg fins det med
1) ordnet trekning med tilbakelegging?
2) ordnet trekning uten tilbakelegging?
3) ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

c) I ei klasse er det 7 jenter og 3 gutter. Vi trekker tilfeldig ut 3 elever. A er utfallet at det trekkes ut 3 jenter.
Finn P (A).

d) Det er altså 70 % jenter i klassa, og 60 % av jentene driver med idrett. Av guttene er det 80 % som har denne aktiviteten. Vi trekker tilfeldig ut en elev. J er utfallet at eleven er ei jente, og G at det er en gutt. I er utfallet at eleven driver med idrett.
Finn $P(I|G)$ og $P(I)$.

Nynorsk

Oppgåve 1

a) Løys likninga

$$\frac{x}{x-6}-\frac{x+10}{x^2-36}=\frac{x-3}{x+6}$$

b) I eit stykke messing er det 98 g kopar og 42 g sink.
Kor mange prosent sink er det i denne legeringa?

Ein ventil av messing kosta kr 200. Prisen gjekk deretter opp med 25 %, men etter ei stund fall den med 14 %.
Kor mange prosent høgare blei den endelege sluttprisen i forhold til utgangsprisen på kr 200?

c) Trekk saman og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\left(\frac{13}{14}-\frac{1}{2}\right)+\frac{48}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{9}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$$

Oppgåve 2

a) For to utfall A og B er det gitt at $P(A) = 0{,}55$, $P(B) = 0{,}35$ og $P(A \cap B) = 0{,}25$.
Rekn ut $P(\overline{A})$, $P(A \cup B)$, $P(B|A)$ og $P(A|B)$.

b) Frå ein populasjon på $N = 8$ einingar blir det trekt ut $s = 5$ einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med
1) ordna trekning med tilbakelegging?
2) ordna trekning utan tilbakelegging?
3) ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

c) I ei klasse er det 7 jenter og 3 gutar. Vi trekkjer tilfeldig ut 3 elevar. A er utfallet at det blir trekt ut 3 jenter.
Finn P (A).

d) Det er altså 70 % jenter i klassa, og 60 % av jentene driv med idrett. Av gutane er det 80 % som har denne aktiviteten. Vi trekkjer tilfeldig ut ein elev. J er utfallet at eleven er ei jente, og G at det er ein gut. I er utfallet at eleven driv med idrett.
Finn $P(I|G)$ og $P(I)$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot vdx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

1 Regneregler for sannsynlighet

Komplementsetningen: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Addisjonssetningen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på N enheter trekkes et utvalg på s enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	N^s
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av N enheter kan det dannes $N! = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige rekkefølger.

3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der $P(B) > 0$, er gitt ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) \qquad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A) \qquad P(A) > 0$$

Bayes lov

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0,\; P(B) > 0$$

Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) + \ \dots\ + P(B_r)\,P(A \mid B_r)$$

$B_1, B_2, \dots, B_r$ er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet Ω.

Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(\overline{B})\,P(A \mid \overline{B})$$

Her er $r = 2$, $B_1 = B$ og $B_2 = \overline{B}$

Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$