Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN

4100-02
MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

16.12.2011

Tid:	5 timar
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	9 (inkludert denne)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	mm-papir og formelsamling

Sensuren finn du på StudentWeb.

Bokmål

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 9x - 10$

2) $g(x) = \cos x \cdot e^{x^3}$

3) $h(x) = \dfrac{-x+5}{x^2-25}$

b. 1) Løs likningen

$$\ln(x-7) + \ln(x-4) = \ln 4$$

2) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$6 + \frac{6(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{6(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{6(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \dots$$

c. Regn ut integralene

1) $\int(-30x^4 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{5}x + 13)\,dx$

2) $\int 3x \cdot \cos 2x\,dx$

3) $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

OPPGAVE 2

Forbruket per person i norske husholdninger var i 1970 på kr 68000. I 2008 var dette forbruket økt til kr 174000.

a. Hvor mange prosent økte forbruket per person med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen i forbruket per person i norske husholdninger i denne perioden?

Vi antar at den prosentvise årlige økningen i forbruket per person i norske husholdninger i denne perioden var konstant.

c. I hvilket år passerte dette forbruket kr 105000?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, $D_f = [0, 7]$

a. Finn nullpunktene til f.

b. Vis at $f'(x) = 3(x-2)(x-6)$. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

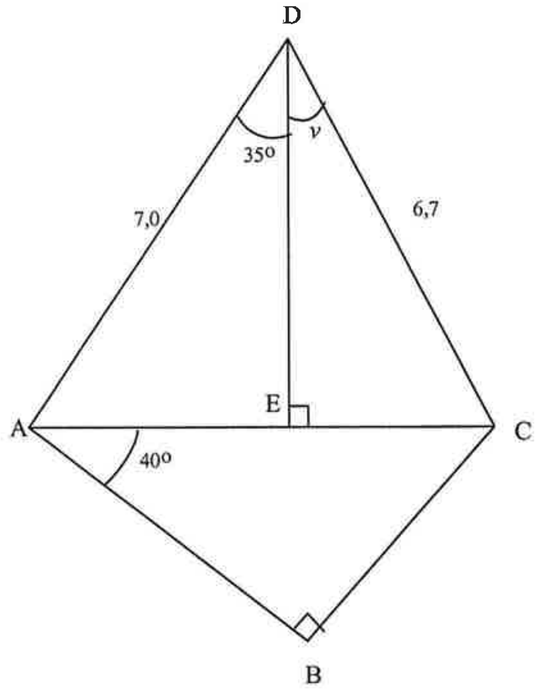
c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til funksjonen g gitt ved $g(x) = \dfrac{f(x)}{5}$

e. Grafen til g og x-aksen avgrenser en flate som ligger over x-aksen. Finn arealet av denne flaten.

OPPGAVE 4

På figuren er AD = 7,0, CD = 6,7, $\angle EDA = 35^\circ$ og $\angle CAB = 40^\circ$.



a. Regn ut lengden av sidene AE og DE i trekanten AED.

b. Finn vinkelen v på figuren, og regn ut arealet av firkanten ABCD.

OPPGAVE 5

I perioden 1950-2009 var nedgangen i antall norske fiskere per år til enhver tid proporsjonal med antall fiskere.

Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1950. $y(t)$ er antall fiskere.

a. Sett opp differensiallikningen som har løsningen $y(t)$.

Ved slutten av 1950 var antall fiskere 96000, og ved slutten av 2009 var dette antallet sunket til 14000.

b. Vis at antall fiskere ved tida t er gitt ved

$$y(t) = 96000 \cdot e^{-0,0326t}$$

c. Hvor mange fiskere var det i 1990? I hvilket år blei antall fiskere redusert til 45000?

d. Løs differensialligningen $y' = 4y + 8$ med initialbetingelsen $y(0) = 3$.

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = 5x^2 - 3xy + \frac{1}{2}y^2 + 8x - 3y + 7$

a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

b. På en boligtomt skal det settes opp et gjerde med en lengde på 60 m. Flaten innenfor gjerdet skal være rektangelformet. Hvor stor må lengda og bredda til rektanglet være for at arealet skal bli størst mulig?

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 9x - 10$

2) $g(x) = \cos x \cdot e^{x^3}$ $(x \text{ blir målt i radianar})$

3) $h(x) = \dfrac{-x+5}{x^2 - 25}$

b. 1) Løys likninga

$$\ln(x-7) + \ln(x-4) = \ln 4$$

2) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekkja

$$6 + \frac{6(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{6(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{6(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \ldots$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int (-30x^4 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{5}x + 13)\, dx$

2) $\int 3x \cdot \cos 2x \, dx$ $(x \text{ blir målt i radianar})$

3) $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$

OPPGÅVE 2

Forbruket per person i norske hushald var i 1970 på kr 68000. I 2008 var dette forbruket auka til kr 174000.

a. Kor mange prosent auka forbruket per person med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga i forbruket per person i norske hushald i denne perioden?

Vi antek at den prosentvise årlege auken i forbruket per person i norske hushald i denne perioden var konstant.

c. I kva for år passerte dette forbruket kr 105000?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, $D_f = [0, 7]$

a. Finn nullpunkta til f.

b. Vis at $f'(x) = 3(x-2)(x-6)$. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

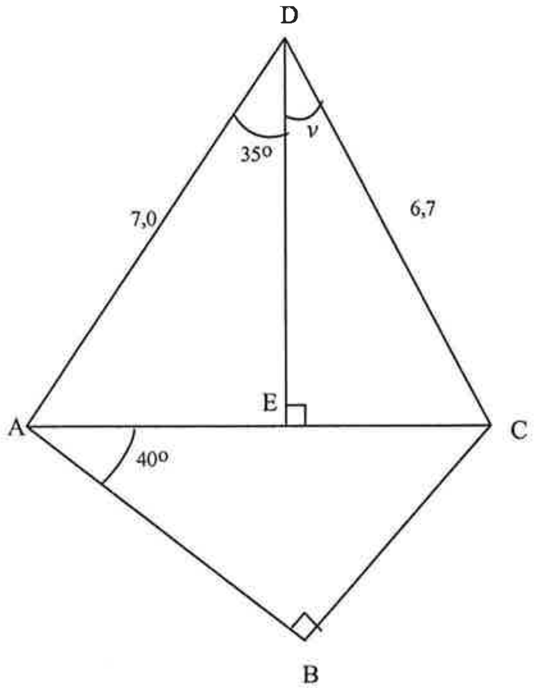
c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til funksjonen g gitt ved $g(x) = \dfrac{f(x)}{5}$

e. Grafen til g og x-aksen avgrensar ei flate som ligg over x-aksen. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4

På figuren er AD = 7,0, CD = 6,7, $\angle EDA = 35^\circ$ og $\angle CAB = 40^\circ$.



a. Rekn ut lengda av sidene AE og DE i trekanten AED.

b. Finn vinkelen v på figuren, og rekn ut arealet av firkanten ABCD.

OPPGÅVE 5

I perioden 1950-2009 var nedgangen i talet på norske fiskarar per år til ei kvar tid proporsjonal med talet på fiskarar.

Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1950. $y(t)$ er talet på fiskarar.

a. Sett opp differensiallikninga som har løysinga $y(t)$.

Ved slutten av 1950 var talet på fiskarar 96000, og ved slutten av 2009 var dette talet minka til 14000.

b. Vis at talet på fiskarar ved tida t er gitt ved

$$y(t) = 96000 \cdot e^{-0,0326t}$$

c. Kor mange fiskarar var det i 1990? I kva for år blei talet på fiskarar redusert til 45000?

d. Løys differensiallikninga $y' = 4y + 8$ med initialvilkåret $y(0) = 3$.

OPPGÅVE 6

Funksjonen *f* er definert ved $f(x,y) = 5x^2 - 3xy + \frac{1}{2}y^2 + 8x - 3y + 7$

a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.

b. På ei bustadtomt skal det setjast opp eit gjerde med lengda 60 m. Flata innanfor gjerdet skal vere rektangelforma. Kor stor må lengda og breidda til rektanglet vere for at arealet skal bli størst mogleg?

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$a^0 \overset{def}{=} 1$

$a^{-x} \overset{def}{=} \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} \overset{def}{=} \sqrt[y]{a^x}$

$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$

$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$10^{\log a} = a$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$e^{\ln a} = a$

$\ln e^a = a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \cdot \ln a$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon f(x,y) enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for (x,y) = (a,b), så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv} \sin a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv} \cos b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$