Høgskolen i Telemark

SLUTTEKSAMEN

4100-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

08.06.2011

Tid:	*9-14*
Målform:	*Bokmål/nynorsk*
Sidetal:	9 *(inkludert denne framsida)*
Hjelpemiddel:	*Kalkulator og formelsamling*
Merknader:	*Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa*
Vedlegg:	*mm-papir og formelsamling*

Eksamensresultata blir offentliggjort på Studentweb.

Avdeling for allmennvitenskaplige fag.

BOKMÅL

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 7x - 8$

2) $g(x) = \cos x \cdot e^{2x} \qquad (x \textit{ måles i radianer})$

3) $h(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+3}$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{4} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^2}{16} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^3}{64} + \ldots$$

2) Løs likninga

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$$

c. Regn ut integralene

1) $\int(-\frac{25}{4}x^4 + 6x^2 - \frac{4}{3}x + 7)\,dx$

2) $\int_1^e 4x \cdot \ln x \, dx$

3) $\int_0^1 2x(x^2+3)^2\,dx$

OPPGAVE 2

Verdens befolkning var i 1950 på 2,56 milliarder, og i 2005 var den på 6,45 milliarder.

a. Hvor mange prosent har verdens befolkning økt med i denne perioden?

b. Hvor mange prosent økte verdens befolkning med i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Vi forutsetter at verdens befolkning fram til 2020 vil øke på samme måte som i perioden 1950-2005.

c. I hvilket år vil verdens befolkning passere 7,60 milliarder?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, $D_f = [-1,\ 3{,}5\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkter til f.

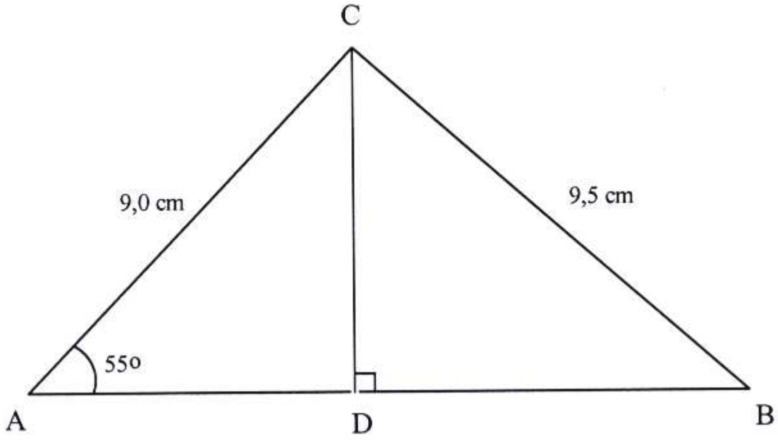
b. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrenser ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGAVE 4



I trekanten ABC er AC = 9,0 cm, BC = 9,5 cm og $\angle$ BAC = 55°.

<u>a.</u> Regn ut lengda av AD og CD.

<u>b.</u> Finn $\angle$ ABC, og arealet av trekanten ABC.

OPPGAVE 5

I perioden 1980-2000 har økningen i den globale installerte solcelleeffekten per år til enhver tid vært proporsjonal med den installerte solcelleeffekten.

Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1980. $y(t)$ er solcelleeffekten målt i MW.

<u>a.</u> Sett opp differensiallikninga som har løsningen $y(t)$.

<u>b.</u> Ved slutten av 1980 var den globale installerte solcelleeffekten 7,00 MW, og ved slutten av 2000 var den økt til 277 MW. Vis at den installerte solcelleeffekten er gitt ved

$$y(t) = 7{,}00 \cdot e^{0{,}184t}$$

<u>c.</u> Hvor stor var installert solcelleeffekt ved slutten av 1995?

<u>d.</u> I hvilket år passerte den installerte solcelleeffekten 60,0 MW?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 14x - 6y - 13$

a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

b. Løs differensiallikninga

$$y' = 2y^2 - 10y + 8$$

med initialbetingelsen $y(0) = 0$.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 7x - 8$

2) $g(x) = \cos x \cdot e^{2x}$ $\quad$ (x *målast i radianar*)

3) $h(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+3}$

b. 1) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{4} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^2}{16} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^3}{64} + \dots$$

2) Løys likninga

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int(-\frac{25}{4}x^4 + 6x^2 - \frac{4}{3}x + 7)\,dx$

2) $\int_1^e 4x \cdot \ln x\,dx$

3) $\int_0^1 2x(x^2+3)^2\,dx$

OPPGÅVE 2

Verdas befolkning var i 1950 på 2,56 milliardar, og i 2005 var den på 6,45 milliardar.

a. Kor mange prosent har verdas befolkning auka med i denne perioden?

b. Kor mange prosent auka verdas befolkning med i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Vi føreset at verdas befolkning fram til 2020 vil auke på same måte som i perioden 1950-2005.

c. I kva for år vil verdas befolkning passere 7,60 milliardar?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, $D_f = [-1,\ 3{,}5\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkt til f.

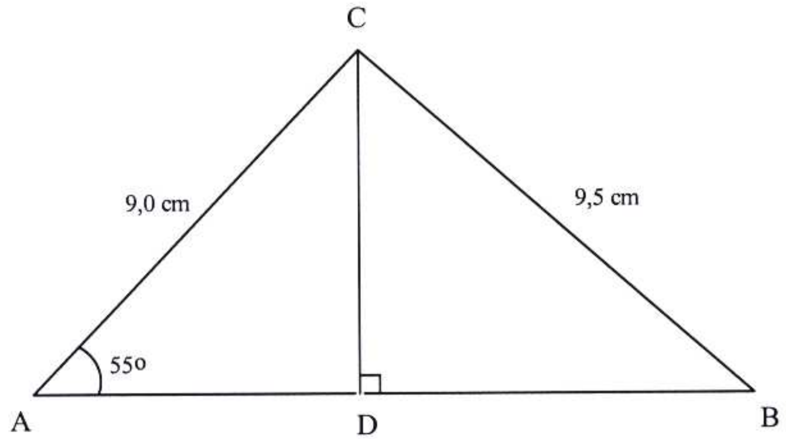
b. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c. Undersøk korleis grafen til f krummar i de ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4



I trekanten ABC er AC = 9,0 cm, BC = 9,5 cm og $\angle$ BAC = 55°.

a. Rekn ut lengda av AD og CD.

b. Finn $\angle$ ABC, og arealet av trekanten ABC.

OPPGÅVE 5

I perioden 1980-2000 har aukinga i den globale installerte solcelleeffekten per år til ei kvar tid vore proporsjonal med den installerte solcelleeffekten.

Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1980. $y(t)$ er solcelleeffekten målt i MW.

a. Sett opp differensiallikninga som har løysinga $y(t)$.

b. Ved slutten av 1980 var den globale installerte solcelleeffekten 7,00 MW, og ved slutten av 2000 var den auka til 277 MW. Vis at den installerte solcelleeffekten er gitt ved

$$y(t) = 7{,}00 \cdot e^{0{,}184t}$$

c. Kor stor var installert solcelleeffekt ved slutten av 1995?

d. I kva for år passerte den installerte solcelleeffekten 60,0 MW?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 14x - 6y - 13$

a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.

b. Løys differensiallikninga

$$y' = 2y^2 - 10y + 8$$

med initialvilkåret $y(0) = 0$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$

$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$

$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$

$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$10^{\log a} = a$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$e^{\ln a} = a$

$\ln e^a = a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \cdot \ln a$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon f(x,y) enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for (x,y) = (a,b), så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv} \sin a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv} \cos b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$