Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN

4100N
MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

08.06.2012

Tid:	5 timer
Målform:	Bokmål
Sidetal:	5 (inkludert denne)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle de 24 deloppgavene teller likt ved evalueringa
Vedlegg:	mm-papir og formelsamling

BOKMÅLSTEKST

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

2) $g(x) = \cos(3x) \cdot \ln x$

3) $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x + 6}$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$8 + \frac{8(\sqrt{6}-2)}{2} + \frac{8(\sqrt{6}-2)^2}{4} + \frac{8(\sqrt{6}-2)^3}{8} + \ldots$$

2) Løs likningen

$$e^{2x} + 2e^{x} - 15 = 0$$

c. Regn ut integralene

1) $\int (-\frac{7}{2}x^6 + 25x^4 - \frac{9}{5}x^2 + 4x + 3)\,dx$

2) $\int 2x \cdot \sin x \, dx$

3) $\int_0^2 x^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx$

OPPGAVE 2

I 1990 var de norske utslippene av CO_2-ekvivalenter på 50 millioner tonn. Disse utslippene var i 2011 økt til 52,7 millioner tonn.

a. Hvor mange prosent økte disse utslippene med i denne perioden?

Uten tiltak er det beregnet at utslippene av CO_2-ekvivalenter i 2020 vil være på 59 millioner tonn.

b. Hva vil den gjennomsnittlige prosentvise veksten i utslippene per år da bli i perioden 1990-2020?

I klimaforliket skal Norge innen 2020 redusere sine utslipp med 30 % i forhold til utslippet på 50 millioner tonn i 1990. Reduksjonen skal skje med tiltak både innenlands og utenlands. Differansen mellom beregnet utslipp i 2020 på 59 millioner tonn og det Norge ifølge klimaforliket kan slippe ut, danner grunnlaget for hvor mye av utslippene som skal reduseres i Norge. 2/3 av denne differansen skal tas innenlands.

c. Hvor store vil de innenlandske norske utslippene være i 2020 dersom avtalen blir fulgt opp?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $\quad D_f = [-1,\ 3\rangle$

a. Finn nullpunkta til f.

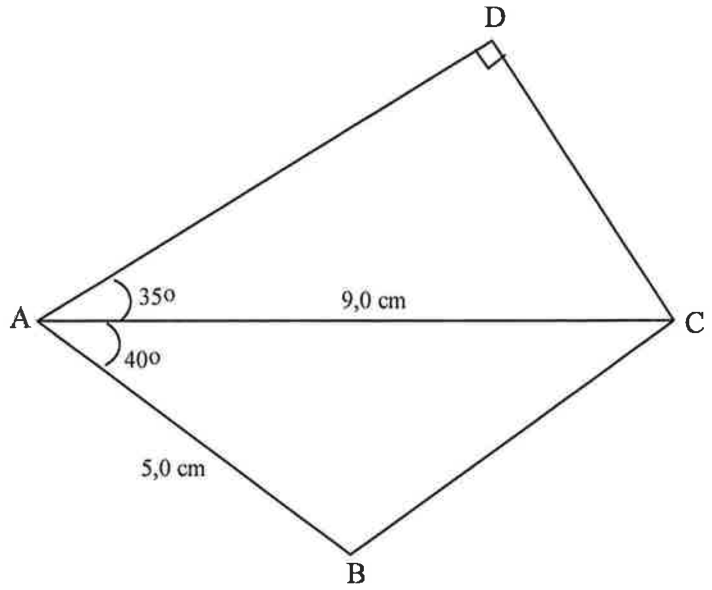
b. Vis at $f'(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x - 1)$. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til topp- og bunnpunkta på grafen til f.

c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrenser ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGAVE 4



I firkanten ABCD er AC = 9,0 cm, AB = 5,0 cm, $\angle CAD = 35^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$ og $\angle CAB = 40^\circ$

a. Regn ut lengda av AD og CD.

b. Finn $\angle$ BCA og arealet av firkanten ABCD.

OPPGAVE 5

I perioden 2001 til 2011 var reduksjonen i de norske NMVOC-utslippene per tidsenhet til enhver tid proporsjonal med utslippene av NMVOC.

a. Sett opp en differensiallikning som viser sammenhengen mellom utslippene av NMVOC målt i tusen tonn og tida t målt i år. $t = 0$ svarer til slutten av 2001.

Ved slutten av 2001 var utslippene av NMVOC på 385 tusen tonn og ved slutten av 2011 var disse redusert til 135 tusen tonn.

b. Vis at utslippene av NMVOC i tusen tonn er gitt ved

$$y(t) = 385 \cdot e^{-0{,}105t}$$

c. Hvor store var NMVOC-utslippene ved slutten av 2009?

d. I hvilket år var utslippene av NMVOC redusert til målet i Gøteborg-protokollen på 200 tusen tonn?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 4x - 10y + 13$.

<u>a.</u> Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

<u>b.</u> Løs differensiallikningen

$$y' = 2y^2 + 4y - 16$$

med initialbetingelsen $y(0) = -\frac{7}{2}$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$
$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$
$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$
$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$
$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$
$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$
$$\ln e^a = a$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$
$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$
$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a$ *og* $\cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$