Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

MIDTEKSAMEN

I

4100N-001 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

17.12.2013

Tid:	1 time
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetall:	3 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 7 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	Ingen

Sensuren finn du på Studentweb

Bokmål

Oppgave 1

a) Løs likninga

$$\frac{2x}{x-10}+\frac{x-82}{x^2-100}=\frac{2x}{x+10}$$

b) I ei legering er det 20 g kobber og 80 g sink. Hvor mange prosent kobber er det i legeringa? I ei skoleklasse økte elevtallet med 20 %, og det ble etter dette 24 elever i klassa. Hvor mange elever var det i klassa før elevøkningen?

c) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningene som blir gjort.

$$\frac{11}{25}+\frac{3}{4}\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{7}{5}-2\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

Oppgave 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,65, P(B) = 0,25 og $P(A\cap B) = 0{,}10$. Regn ut $P(\overline{B})$, $P(A\cup B)$ og $P(A|B)$.

b) Fra en populasjon på N = 9 enheter blir det trukket ut s = 6 enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg finnes det med
1) ordnet trekning med tilbakelegging?
2) ordnet trekning uten tilbakelegging?
3) ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

c) I ei kasse er det 14 svarte kuler og 16 grønne kuler. Vi trekker tilfeldig ut fire forskjellige kuler. A er utfallet at det blir trukket ut to svarte og to grønne kuler. Finn P(A).

d) I en studentgruppe er det 60 % kvinner, og av disse kvinnene er 20 % over 40 år. Av mennene i denne gruppa er 15 % over denne alderen. Vi velger tilfeldig ut en student fra gruppa. K er utfallet at studenten er en kvinne, og M er utfallet at studenten er en mann. O er utfallet at studenten er over 40 år.
Finn P (K), P(M), P(O|K), P(O|M) og P(O).

Oppgåve 1

Nynorsk

a) Løys likninga

$$\frac{2x}{x-10}+\frac{x-82}{x^2-100}=\frac{2x}{x+10}$$

b) I ei legering er det 20 g koppar og 80 g sink. Kor mange prosent koppar er det i legeringa? I ei skuleklasse auka elevtalet med 20 %, og det blei etter dette 24 elevar i klassa. Kor mange elevar var det i klassa før elevaukinga?

c) Trekk samen og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{11}{25}+\frac{3}{4}\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{7}{5}-2\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

Oppgåve 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,65, P(B) = 0,25 og $P(A\cap B) = 0{,}10$. Regn ut $P(\overline{B})$, $P(A\cup B)$ og $P(A|B)$.

b) Frå ein populasjon på N = 9 einingar blir det trekt ut s = 6 einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med
1) ordna trekning med tilbakelegging?
2) ordna trekning utan tilbakelegging?
3) ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

c) I ei kasse er det 14 svarte kuler og 16 grøne kuler. Vi trekker tilfeldig ut fire forskjellige kuler. A er utfallet at det blir trekt ut to svarte og to grøne kuler. Finn P(A).

d) I ei studentgruppe er det 60 % kvinner, og av desse kvinnene er 20 % over 40 år. Av mennene i denne gruppa er 15 % over denne alderen. Vi vel tilfeldig ut ein student frå gruppa. K er utfallet at studenten er ei kvinne, og M er utfallet at studenten er ein mann. O er utfallet at studenten er over 40 år.
Finn P (K), P(M), P(O|K), P(O|M) og P(O).

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

1 Regneregler for sannsynlighet

Komplementsetningen: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Addisjonssetningen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på N enheter trekkes et utvalg på s enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	N^s
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av N enheter kan det dannes $N! = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige rekkefølger.

3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der $P(B) > 0$, er gitt ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) \qquad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) \qquad P(A) > 0$$

Bayes lov

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0,\ P(B) > 0$$

Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) + \ \ldots\ + P(B_r)\,P(A \mid B_r)$$

$B_1, B_2, \ldots, B_r$ er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet Ω.

Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(\overline{B})\,P(A \mid \overline{B})$$

Her er $r = 2$, $B_1 = B$ og $B_2 = \overline{B}$

Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$