Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN

I

4100N-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

17.12.2013

Tid:	5 timar
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	9 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	mm-papir og formelsamling

Sensuren finn du på Studentweb

BOKMÅL

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{3}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 7x - 17$

2) $g(x) = \sin x^4 \cdot \ln x \quad (x \text{ måles i radianer})$

3) $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$7 + \frac{7(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \ldots$$

2) Løs likningen

$$\ln(x-5) + \ln(x-3) = \ln 8$$

c. Regn ut integralene

1) $\int (-\frac{18}{7}x^5 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{4}{3}x - 5)\,dx$

2) $\int -x \cdot \sin 2x\,dx \quad (x \text{ måles i radianer})$

3) $\int_0^1 4x^2(x^3+2)^3\,dx$

OPPGAVE 2

Ved slutten av 1970 var verdens irrigerte (vannede) jordbruksareal 167 millioner hektar (Mha). Dette arealet hadde ved slutten av 1990 økt til 241 Mha.

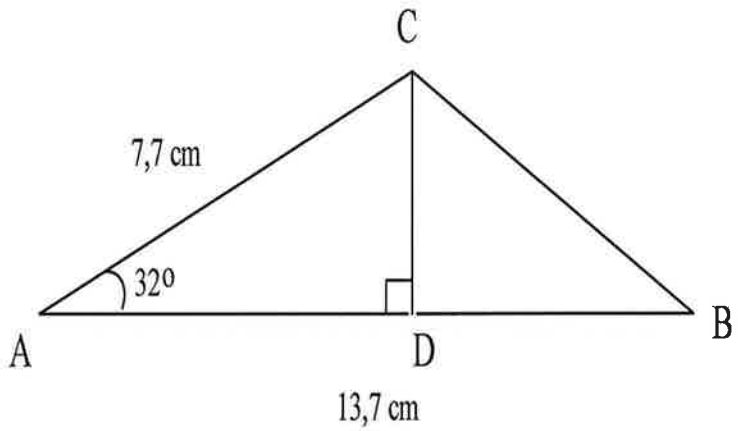
a. Hvor mange prosent hadde det irrigerte jordbruksarealet økt med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av det irrigerte jordbruksarealet i denne perioden?

Vi antar at den årlige prosentvise veksten av det irrigerte jordbruksarealet i denne perioden var konstant.

c. I hvilket år passerte det irrigerte jordbruksarealet 209 Mha?

OPPGAVE 3



I trekanten ABC er AB = 13,7 cm AC = 7,7 cm, og $\angle A = 32°$.

a. Regn ut lengda av AD og CD.

b. Finn $\angle B$ og lengda av BC.

OPPGAVE 4

En funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2$, $D_f = [-2, 4]$

a. Finn eventuelle nullpunkter til f.

b. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flaten.

OPPGAVE 5

I perioden 1950-1997 økte verdens bruttoprodukt per år til enhver tid proporsjonalt med bruttoproduktet $y(t)$.

a. Sett opp en differensiallikning som viser sammenhengen mellom verdens bruttoprodukt i billioner dollar og tida t målt i år. $t = 0$ svarer til slutten av 1950.

Ved slutten av 1950 var verdens bruttoprodukt 6,4 billioner dollar, og ved slutten av 1997 var det 38,5 billioner dollar. $y(t)$ er gitt i billioner dollar.

b. Vis at verdens bruttoprodukt i denne perioden er gitt ved

$$y(t) = 6{,}4 \cdot e^{0.0382t}$$

c. Hva var verdens bruttoprodukt i 1963?

d. I hvilket år var verdens bruttoprodukt 23,0 billioner dollar?

OPPGAVE 6

Vi har gitt funksjonen f definert ved

$$f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 12y - 13$$

a. Funksjonen har et minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

b. Et smykkeskrin skal formes som en sylinder med bunn og lokk. Skrinet skal ha volumet 785 cm^3 med radius x cm og høyden y cm.
Sett opp et uttrykk for overflata til skrinet uttrykt ved x og y.
Finn x og y når smykkeskrinet har det minste overflatearealet.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = \frac{3}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 7x - 17$

2) $g(x) = \sin x^4 \cdot \ln x$ (*x målast i radianar*)

3) $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$

b. 1) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekkja

$$7 + \frac{7(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \ldots$$

2) Løys likninga

$$\ln(x-5) + \ln(x-3) = \ln 8$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int (-\frac{18}{7}x^5 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{4}{3}x - 5)\,dx$

2) $\int -x \cdot \sin 2x\,dx$ (*x målast i radianar*)

3) $\int_0^1 4x^2(x^3+2)^3\,dx$

OPPGÅVE 2

Ved slutten av 1970 var verdas irrigerte (vatna) jordbruksareal 167 millionar hektar (Mha). Dette arealet hadde ved slutten av 1990 auka til 241 Mha.

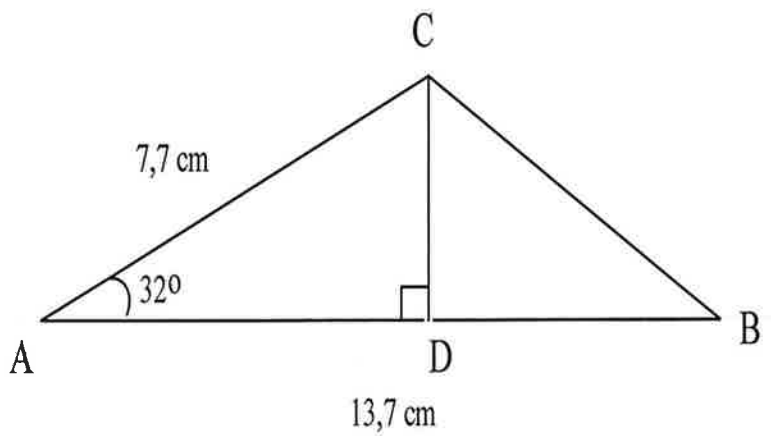
a. Kor mange prosent hadde det irrigerte jordbruksarealet auka med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av det irrigerte jordbruksarealet i denne perioden?

Vi antar at den årlege prosentvise veksten i det irrigerte jordbruksarealet i denne perioden var konstant.

c. I kva for år passerte det irrigerte jordbruksarealet 209 Mha?

OPPGÅVE 3



I trekanten ABC er AB = 13,7 cm AC = 7,7 cm, og $\angle A = 32^\circ$.

a. Regn ut lengda av AD og CD.

b. Finn $\angle B$ og lengda av BC.

OPPGÅVE 4

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2$, $D_f = [-2, 4]$

a. Finn eventuelle nullpunkt til f.

b. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 5

I perioden 1950-1997 auka verdas bruttoprodukt per år til ei kvar tid proporsjonalt med bruttoproduktet $y(t)$.

a. Sett opp ei differensiallikning som viser samanhengen mellom verdas bruttoprodukt i billionar dollar og tida t målt i år. $t = 0$ svarar til slutten av 1950.

Ved slutten av 1950 var verdas bruttoprodukt 6,4 billionar dollar, og ved slutten av 1997 var det 38,5 billionar dollar. $y(t)$ er gitt i billionar dollar.

b. Vis at verdas bruttoprodukt i denne perioden er gitt ved

$$y(t) = 6{,}4 \cdot e^{0.0382t}$$

c. Kva var verdas bruttoprodukt i 1963?

d. I kva for år var verdas bruttoprodukt 23,0 billionar dollar?

OPPGÅVE 6

Vi har gitt funksjonen f definert ved

$$f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 12y - 13$$

a. Funksjonen har eit minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.

b. Eit smykkeskrin skal formast som ein sylinder med botn og lok. Skrinet skal ha volumet 785 cm^3 med radius x cm og høgda y cm.
Sett opp eit uttrykk for overflata til skrinet uttrykt ved x og y.
Finn x og y når smykkeskrinet har det minste overflatearealet.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$