Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN
I

4100N MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

06.06.2013

Tid:	5 timar
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	7 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	mm-papir og formelsamling

Eksamensresultata blir offentleggjort på lister med kandidatnummer via studentweb

Bokmål

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x) = \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x + 3$

2) $g(x) = \cos x \cdot \ln x^2$

3) $h(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+6}$

b. 1) Løs likningen

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$$

2) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$7 + \frac{7(\sqrt{7}-2)}{2} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^2}{4} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^3}{8} + \ldots$$

c. Regn ut integralene

1) $\int (-50x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{8}{5}x + 17)\, dx$

2) $\int 2x \cdot e^x \, dx$

3) $\int_1^2 6x^2 \sqrt{x^3+8}\, dx$

OPPGAVE 2

Verdien av norsk fiskeeksport var i 1970 på 2,3 milliarder kroner. I 2000 var denne eksporten økt til 31 milliarder kroner.

a. Hvor mange prosent økte den norske fiskeeksporten med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen i den norske fiskeeksporten i denne perioden?

Vi antar at den årlige prosentvise veksten i den norske fiskeeksporten i denne perioden var konstant.

c. I hvilket år passerte den norske fiskeeksporten 20 milliarder kroner?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 49x)$, $D_f = [0, 9]$

a. Finn nullpunktene til f.

b. Vis at $f'(x) = \frac{3}{4}(x-7)(x-\frac{7}{3})$. Bestem monotoniegenskapene til f, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

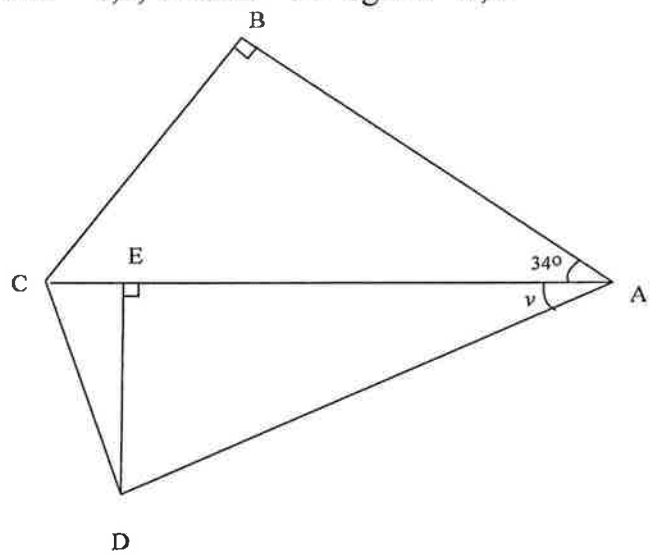
c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f.

d. Tegn grafen til f.

e. Grafen til f og x-aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGAVE 4

På figuren er AC = 8,0, $\angle$CAB= 34° og DE =3,2.



a. Regn ut lengden av sidene AB og BC i trekanten ABC.

Trekanten ADE har arealet 11,2.

b. Finn lengden av AE og vinkelen v på figuren.

OPPGAVE 5

I perioden 1950-1980 var økningen av verdens kornavling per dekar per år til enhver tid proporsjonalt med kornavlingen per dekar.

Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til 1950. $y(t)$ er verdens kornavling per dekar målt i kg ved tida t.

a. Sett opp differensiallikninga som har løsningen $y(t)$.

I 1950 var verdens kornavling per dekar 102 kg, og i 1980 var denne økt til 205 kg.

b. Vis at verdens kornavling per dekar er gitt ved

$$y(t) = 102 \cdot e^{0,0233t}$$

c. Hva var verdens kornavling per dekar i 1970?

d. I hvilket år passerte verdens kornavling per dekar 190 kg?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10$

a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.

b. Løs differensiallikningen

$$y' = 2y^2 - 8y + 6$$

med initialbetingelsen $y(0) = 2$.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x) = \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x + 3$

2) $g(x) = \cos x \cdot \ln x^2$

3) $h(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+6}$

b. 1) Løys likninga

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$$

2) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$7 + \frac{7(\sqrt{7}-2)}{2} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^2}{4} + \frac{7(\sqrt{7}-2)^3}{8} + \ldots$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int (-50x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{8}{5}x + 17)\, dx$

2) $\int 2x \cdot e^x \, dx$

3) $\int_1^2 6x^2 \sqrt{x^3+8} \, dx$

OPPGÅVE 2

Verdien av norsk fiskeeksport var i 1970 på 2,3 milliardar kroner. I 2000 var denne eksporten auka til 31 milliardar kroner.

a. Kor mange prosent auka den norske fiskeeksporten med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga i den norske fiskeeksporten i denne perioden?

Vi antek at den årlege prosentvise veksten i den norske fiskeeksporten i denne perioden var konstant.

c. I kva for år passerte den norske fiskeeksporten 20 milliardar kroner?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 49x)$, $D_f = [0, 9]$

a. Finn nullpunkta til f.

b. Vis at $f'(x) = \frac{3}{4}(x-7)(x-\frac{7}{3})$. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

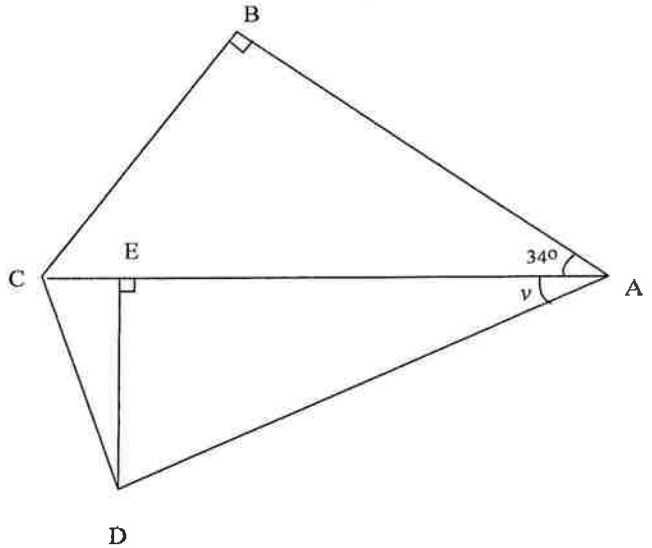
c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4

På figuren er AC = 8,0, $\angle$CAB= 34° og DE =3,2.



a. Rekn ut lengda av sidene AB og BC i trekanten ABC.

Trekanten ADE har arealet 11,2.

b. Finn lengda av AE og vinkelen v på figuren.

OPPGÅVE 5

I perioden 1950-1980 var aukinga av verdas kornavling per dekar per år til ei kvar tid proporsjonal med kornavlinga per dekar.

Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til 1950. $y(t)$ er verdas kornavling per dekar målt i kg ved tida t.

a. Sett opp differensiallikninga som har løysinga $y(t)$.

I 1950 var verdas kornavling per dekar 102 kg, og i 1980 var denne auka til 205 kg.

b. Vis at verdas kornavling per dekar er gitt ved

$$y(t) = 102 \cdot e^{0,0233t}$$

c. Kva var verdas kornavling per dekar i 1970?

d. I kva for år passerte verdas kornavling per dekar 190 kg?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10$

a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.

b. Løys differensiallikninga

$$y' = 2y^2 - 8y + 6$$

med initialvilkåret $y(0) = 2$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$