



Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN

4100N-002 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

18.12.2014

- Tid: 5 timer (kl. 11-16)
- Målform: Bokmål/nynorsk
- Sidetal: 7 (inkludert denne)
- Hjelpe middel: Kalkulator og formelsamling
- Merknader: Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
- Vedlegg: mm-papir og formelsamling

Sensuren finn du på StudentWeb.

Bokmål

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 6x - 17$$

$$2) g(x) = \ln(x^3 - x^2)$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

b. 1) Løs likninga

$$\ln(x-2) - \ln(x-3) = \ln 2$$

2) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{7}-2)}{3} + \frac{3(\sqrt{7}-2)^2}{9} + \frac{3(\sqrt{7}-2)^3}{27} + \dots$$

c. Regn ut integralene

$$1) \int (-20x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 17) dx$$

$$2) \int x \cdot \sin x dx \quad (x \text{ måles i radianer})$$

$$3) \int_0^2 4x(x^2 - 2)^2 dx$$

OPPGAVE 2

I 1973 var den globale primære energibruken 256 EJ, og i 2012 var den økt til 560 EJ.

- a. Hvor mange prosent har denne energibruken økt med i denne perioden?
- b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av den primære energibruken globalt i denne perioden?
- c. Det forutsettes at den prosentvise årlige økningen av energibruken har vært konstant i den aktuelle tidsperioden. I hvilket år passerte energibruken 400 EJ?

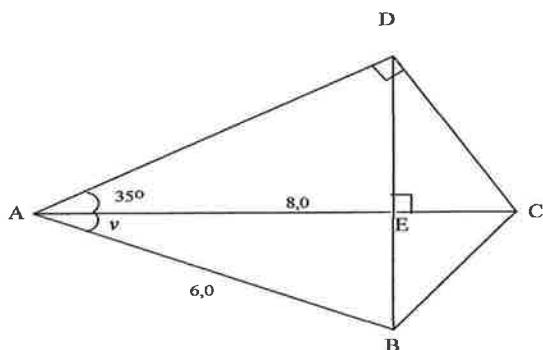
OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$, $D_f = [-4, 1]$.

- a. Finn nullpunktene til f .
- b. Vis at $f'(x) = 3(x+3)(x+1)$. Bestem monotoniegenskapene til f , og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f .
- d. Tegn grafen til funksjonen f .
- e. Grafen til f og x -aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGAVE 4

I firkanten ABCD er $AC = 8,0$, $AB = 6,0$ og $\angle CAD = 35^\circ$. Dessuten er $\angle ADC = 90^\circ$, og BD står vinkelrett på AC .



- a. Regn ut lengda av sidene AD og CD i trekanten ACD.
- b. Finn vinkel $\angle BAC = \nu$ på figuren, og regn ut arealet av firkanten.

OPPGAVE 5

I denne oppgaven antas det at i perioden 1950-2012 økte antall flyreiser i verden per år til enhver tid proporsjonalt med antall flyreiser.

Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til 1950. $y(t)$ er antall flyreiser globalt i millioner ved tida t .

- a. Sett opp differensiallikningen som har løsningen $y(t)$.

I 1950 var det 31millioner flyreiser, og i 2012 var dette økt til 2957 millioner.

- b. Vis at antall flyreiser ved tida t er gitt ved

$$y(t) = 31 \cdot e^{0,0735t}$$

- c. Hva var antall flyreiser i 1990?
- d. I hvilket år passerte antall flyreiser i verden 1500 millioner?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - xy + 2y^2 + \frac{1}{2}x - 5y + \frac{21}{4}$

- a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.
- b. Et rektangulært område skal gjerdes inn slik at arealet av området blir 40 m^2 . På langsidene skal det benyttes gjerde som koster kr 16 per meter. Langs langsidene skal det benyttes et sterkere gjerde som koster kr 40 per meter. Bestem lengden x og bredden y av området slik at prisen på gjerdet blir minst mulig.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 6x - 17$$

$$2) g(x) = \ln(x^3 - x^2)$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

b. 1) Løys likninga

$$\ln(x - 2) - \ln(x - 3) = \ln 2$$

2) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{7} - 2)}{3} + \frac{3(\sqrt{7} - 2)^2}{9} + \frac{3(\sqrt{7} - 2)^3}{27} + \dots$$

c. Regn ut integrala

$$1) \int (-20x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 17) dx$$

$$2) \int x \cdot \sin x dx \quad (x \text{ målast i radianar})$$

$$3) \int_0^2 4x(x^2 - 2)^2 dx$$

OPPGÅVE 2

I 1973 var den globale primære energibruken 256 EJ, og i 2012 var den auka til 560 EJ.

- a. Kor mange prosent har denne energibruken auka med i denne perioden?
- b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av den primære energibruken globalt i denne perioden?
- c. Det blir gått ut frå at den prosentvise årlege aukinga av energibruken har vore konstant i den aktuelle tidsperioden. I kva for år passerte energibruken 400 EJ?

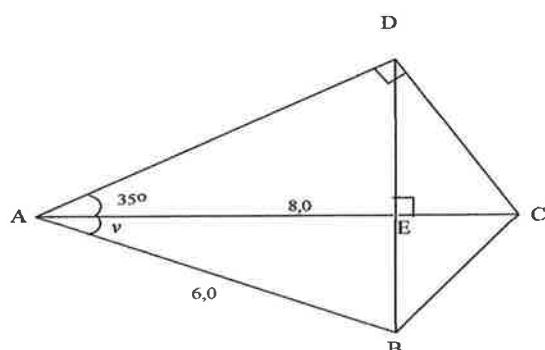
OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$, $D_f = [-4, 1]$.

- a. Finn nullpunktata til f .
- b. Vis at $f'(x) = 3(x+3)(x+1)$. Bestem monotonieigenskapane til f , og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f .
- c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f .
- d. Teikn grafen til funksjonen f .
- e. Grafen til f og x -aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4

I firkanten ABCD er $AC = 8,0$, $AB = 6,0$ og $\angle CAD = 35^\circ$. Dessutan er $\angle ADC = 90^\circ$, og BD står vinkelrett på AC.



- a. Rekn ut lengda av sidene AD og CD i trekanten ACD.
- b. Finn vinkel $\angle BAC = v$ på figuren, og rekn ut arealet av firkanten.

OPPGÅVE 5

I denne oppgåva blir det gått ut frå at i perioden 1950-2012 auka talet på flyreiser i verda per år til ei kvar tid proporsjonalt med talet på flyreiser.

Tida t målast i år, og $t = 0$ svarar til 1950. $y(t)$ er talet på flyreiser globalt i millionar ved tida t .

- a. Sett opp differensiallikninga som har løysninga $y(t)$.

I 1950 var det 31millionar flyreiser, og i 2012 var dette auka til 2957 millionar.

- b. Vis at talet på flyreiser ved tida t er gitt ved

$$y(t) = 31 \cdot e^{0,0735t}$$

- c. Kva var talet på flyreiser i 1990?
- d. I kva for år passerte talet på flyreiser i verda 1500 millionar?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - xy + 2y^2 + \frac{1}{2}x - 5y + \frac{21}{4}$

- a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørande minimum.
- b. Eit rektangulært område skal gjerdast inn slik at arealet av området blir 40 m^2 . På langsidene skal det brukast gjerde som kostar kr 16 per meter. Langs langsidene skal det brukast eit sterkare gjerde som kostar kr 40 per meter. Bestem lengda x og breidda y av området slik at prisen på gjerdet blir minst mogleg.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$$y = ax + b$$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a .

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a .

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\begin{aligned}\int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx\end{aligned}$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{kt}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{at} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1+C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos :

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv sin } a$ og $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv cos } b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n 'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$