



**MIDTEKSAMEN**

**I**

**4100N-001 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR**

**18.12.2014**

Tid: 1 time (kl. 16-17)

Målform: Bokmål/nynorsk

Sidetall: 3 (inkludert denne framsida)

Hjelpe middel: Kalkulator og formelsamling

Merknader: Alle dei 7 deloppgåvene tel likt ved evalueringa

Vedlegg: Ingen

Sensuren finn du på Studentweb

## Bokmål

### Oppgave 1

- a) Løs likninga

$$\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 25}$$

- b) En vare kostet først kr 500, men prisen økte senere med 30 %. Etter noen dager blei prisen satt ned med 10 %.

Hvor mange prosent økte prisen med totalt?

En hammer kostet kr 200 inkludert 25 % merverdiavgift

Hva var prisen på hammeren før den blei tillagt denne avgifta?

- c) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utregningene som gjøres.

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) - \frac{9}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^{-3}$$

### Oppgave 2

- a) For to utfall A og B er det gitt at  $P(A) = 0,40$ ,  $P(B) = 0,50$  og  $P(A \cap B) = 0,25$ . Regn ut  $P(\bar{A})$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(B|A)$  og  $P(A|B)$ .

- b) Fra en populasjon på  $N = 9$  enheter trekkes det ut  $s = 6$  enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg fins det med

- 1) ordnet trekning med tilbakelegging?
- 2) ordnet trekning uten tilbakelegging?
- 3) ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

- c) I ei klasse er det 12 jenter og 8 gutter. Vi trekker tilfeldig ut 3 elever. A er utfallet at det trekkes ut 3 gutter. Guttene som trekkes ut, går ikke tilbake til klassa.

Finn  $P(A)$ .

- d) I et parti med frukt er det 40 % bananer, og av disse er det 10 % som er skadet. Resten av partiet er appelsiner der 15 % er skadet. Vi foretar ei tilfeldig trekning av ei frukt fra partiet. A er utfallet at frukta er en appelsin, og B er utfallet at det er en banan. S er utfallet at frukta er skadet.

Finn  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(S|A)$ ,  $P(S|B)$  og  $P(S)$ .

# Oppgåve 1

## Nynorsk

- a) Løys likninga

$$\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 25}$$

- b) Ei vare kosta først kr 500, men prisen auka seinare med 30 %. Etter nokre dagar blei prisen sett ned med 10 %.  
Kor mange prosent auka prisen med totalt?

Ein hamar kosta kr 200 inkludert 25 % meirverdiavgift  
Kva var prisen på hamaren før den blei tillagt denne avgifta?

- c) Trekk saman og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) - \frac{9}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^{-3}$$

# Oppgåve 2

- a) For to utfall A og B er det gitt at  $P(A) = 0,40$ ,  $P(B) = 0,50$  og  $P(A \cap B) = 0,25$ .  
Rekn ut  $P(\bar{A})$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(B|A)$  og  $P(A|B)$ .
- b) Frå ein populasjon på  $N = 9$  einingar blir det trekt ut  $s = 6$  einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med  
1) ordna trekning med tilbakelegging?  
2) ordna trekning utan tilbakelegging?  
3) ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

- c) I ei klasse er det 12 jenter og 8 gutter. Vi trekker tilfeldig ut 3 elevar. A er utfallet at det blir trekt ut 3 gutter. Gutane som blir trekte ut, går ikkje tilbake til klassa.  
Finn  $P(A)$ .
- d) I eit parti med frukt er det 40 % bananar, og av desse er det 10 % som er skada. Resten av partiet er appelsinar der 15 % er skada. Vi foretar ei tilfeldig trekning av ei frukt fra partiet. A er utfallet at frukta er ein appelsin, og B er utfallet at det er ein banan. S er utfallet at frukta er skada.  
Finn  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(S|A)$ ,  $P(S|B)$  og  $P(S)$ .

## 1 Regneregler for sannsynlighet

**Komplementsetningen:**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**Addisjonssetningen:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom  $A \cap B = \emptyset$

## 2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på  $N$  enheter trekkes et utvalg på  $s$  enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	$N^s$
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2) \dots (N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av  $N$  enheter kan det dannes  $N! = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  forskjellige rekkefølger.

## 3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der  $P(B) > 0$ , er gitt ved:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## **Multiplikasjonssetningen**

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B) \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A) \quad P(A) > 0$$

## **Bayes lov**

$$P(B | A) = \frac{P(B) P(A | B)}{P(A)} \quad P(A) > 0, P(B) > 0$$

## **Lov om total sannsynlighet**

$$P(A) = P(B_1) P(A | B_1) + P(B_2) P(A | B_2) + \dots + P(B_r) P(A | B_r)$$

$B_1, B_2, \dots, B_r$  er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet  $\Omega$ .

## **Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler**

$$P(A) = P(B) P(A | B) + P(\bar{B}) P(A | \bar{B})$$

Her er  $r = 2$ ,  $B_1 = B$  og  $B_2 = \bar{B}$

## **Uavhengighet**

A og B er *uavhengige* utfall dersom  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

# FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

## LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$$y = ax + b$$

Rett linje gjennom  $(x_1, y_1)$  og med stigningstall  $a$  er  $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$  er  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

## ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## DERIVASJON

Definisjon av den deriverte:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon  $f[g(x)]$ , der  $g(x) = u$ . Da er  $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

## POTENSER

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

## EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

## LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall  $a$  er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få  $a$ .

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall  $a$  er eksponenten i den potensen vi må opphøye  $e$  i for å få  $a$ .

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

## INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\begin{aligned}\int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx\end{aligned}$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

## FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon  $f(x,y)$  enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for  $(x,y) = (a,b)$ , så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

## DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen  $y' = k \cdot y$  har løsningen  $y = C \cdot e^{kt}$

Differensiallikningen  $y' = ay + b$  har løsningen  $y = C \cdot e^{at} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen  $y' = ay^2 + by + c$  har løsningen  $y = A + \frac{B-A}{1+C \cdot e^{(B-A)at}}$ ,

der  $A$  og  $B$  er løsningene av likningen  $ay^2 + by + c = 0$ .

## TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel  $x$  er kjent, kan vi finne vinkelen  $x$  ved å bruke  $\text{inv sin}$  eller  $\text{inv cos}$ :

$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv sin } a$  og  $\cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv cos } b$ , der  $x$  er en vinkel i 1.kvadrant.

## PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## GEOMETRISKE REKKER

Det  $n$ 'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket  $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Summen av de  $n$  første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$