Høgskolen i Telemark
Fakultet for allmennvitenskapelige fag

MIDTEKSAMEN

I

4100N-001 MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR

20.10.2014

Tid:	1 time (kl. 14.00 – kl. 15.00)
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetall:	3 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle dei 7 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg:	Ingen

Sensuren finn du på StudentWeb.

Bokmål

Oppgave 1

a) Løs likninga

$$\frac{x+2}{x+9}-\frac{x-5}{x-9}=\frac{3x-1}{x^2-81}$$

b) Et messingstykke består av 10 g sink og 30 g kobber.
Hvor mange prosent av sink og kobber inneholder messingstykket.?

Sola har økt utstrålinga med 40 % fra den blei dannet. Hvor mange prosent lavere var utstålinga fra sola da i forhold til i dag?

c) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningene som blir gjort.

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)+20\cdot\left(\frac{7}{4}-\frac{9}{5}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Oppgave 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,45, P(B) = 0,25 og $P(A\cup B) = 0{,}50$.
Regn ut $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$, P(B|A) og P(A|B).

b) Fra en populasjon på N = 9 enheter blir det trukket ut s = 6 enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg finnes det med
1) ordnet trekning med tilbakelegging?
2) ordnet trekning uten tilbakelegging?
3) ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

c) I ei kasse er det 13 gule kuler og 17 grønne kuler. Vi trekker tilfeldig ut tre kuler uten tilbakelegging etter første og andre trekning. A er utfallet at det blir trukket tre grønne kuler.
Finn P(A).

d) Ei gruppe personer stemte ved et kommunevalg. Det var 40 % kvinner i gruppa, og 11 % av disse stemte Frp. 19 % av mennene stemte Frp. Vi velger tilfeldig ut en person fra gruppa. K er utfallet at personen er ei kvinne, og M er utfallet at personen er en mann. F er utfallet at personen har stemt på Frp.
Finn P(F|K), P(F|M) og P(F).

Nynorsk

Oppgåve 1

a) Løys likninga

$$\frac{x+2}{x+9}-\frac{x-5}{x-9}=\frac{3x-1}{x^2-81}$$

b) Eit messingstykke består av 10 g sink og 30 g kopar.
Kor mange prosent av sink og kopar inneheld messingstykket?

Sola har auka utstrålinga med 40 % frå den blei danna. Kor mange prosent lågare var utstrålinga frå sola da i forhold til i dag?

c) Trekk saman og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)+20\cdot\left(\frac{7}{4}-\frac{9}{5}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Oppgåve 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,45, P(B) = 0,25 og $P(A\cup B) = 0{,}50$.
Rekn ut $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$, P(B|A) og P(A|B).

b) Frå ein populasjon på N = 9 einingar blir det trekt ut s = 6 einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med
1) ordna trekning med tilbakelegging?
2) ordna trekning utan tilbakelegging?
3) ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

c) I ei kasse er det 13 gule kuler og 17 grøne kuler. Vi trekkjer tilfeldig ut tre kuler utan tilbakelegging etter første og andre trekning. A er utfallet at det blir trekt ut tre grøne kuler.
Finn P(A).

d) Ei gruppe personar stemte ved eit kommuneval. Det var 40 % kvinner i gruppa, og 11 % av desse stemte Frp. 19 % av mennene stemte Frp. Vi vel tilfeldig ut ein person frå gruppa. K er utfallet at personen er ei kvinne, og M er utfallet at personen er ein mann. F er utfallet at personen har stemt på Frp.
Finn P(F|K), P(F|M) og P(F).

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B - A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

1 Regneregler for sannsynlighet

Komplementsetningen: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Addisjonssetningen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på N enheter trekkes et utvalg på s enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	N^s
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av N enheter kan det dannes $N! = N \cdot (N-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige rekkefølger.

3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der $P(B) > 0$, er gitt ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) \qquad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A) \qquad P(A) > 0$$

Bayes lov

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0,\ P(B) > 0$$

Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) + \ \ldots\ + P(B_r)\,P(A \mid B_r)$$

$B_1, B_2, \ldots, B_r$ er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet Ω.

Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(\overline{B})\,P(A \mid \overline{B})$$

Her er $r = 2$, $B_1 = B$ og $B_2 = \overline{B}$

Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$