



Høgskolen i Telemark

Fakultet for allmennvitenskapelige fag

SLUTTEKSAMEN

**4100N-002
MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR**

01.06.2015

Tid: 5 timer

Målform: Bokmål/nynorsk

Sidetal: 7 (inkludert denne framsida)

Hjelphemiddel: Kalkulator og formelsamling

Merknader: Alle dei 24 deloppgåvene tel likt ved evalueringa

Vedlegg: mm-papir og formelsamling

Sensuren finn du på StudentWeb.

BOKMÅL

OPPGAVE 1

a. Deriver funksjonene gitt ved

$$1) f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 7x - 8$$

$$2) g(x) = \sin x \cdot e^{2x} \quad (x \text{ måles i radianer})$$

$$3) h(x) = \frac{5x+3}{x^2+2}$$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^2}{4} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^3}{8} + \dots$$

2) Løs likningen

$$\ln(7x) - \ln(x+1) = \ln 6$$

c. Regn ut integralene

$$1) \int (-\frac{15}{4}x^4 + 9x^2 - \frac{2}{3}x + 2) dx$$

$$2) \int x \cdot \cos x dx \quad (x \text{ måles i radianer})$$

$$3) \int_1^{\sqrt{5}} x \sqrt{2x^2 - 1} dx$$

OPPGAVE 2

Den globale bioetanolproduksjonen var i 1992 på 15,9 milliarder L, og i 2004 var den på 32,7 milliarder L.

- a. Hvor mange prosent har bioetanolproduksjonen økt med i denne perioden?
- b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av bioetanolproduksjonen i denne perioden?

Vi forutsetter konstant prosentvis årlig økning av bioetanolproduksjonen i perioden 1992-2004.

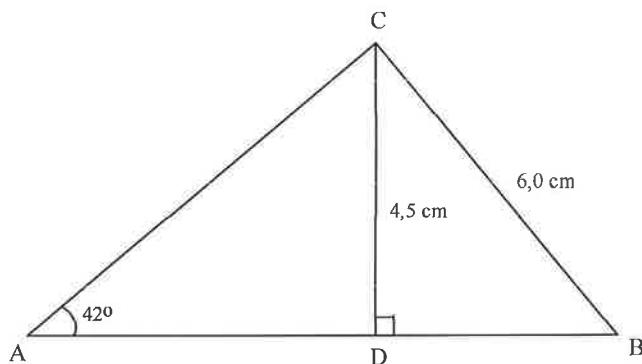
- c. I hvilket år var bioetanolproduksjonen 25,3 milliarder L?

OPPGAVE 3

En funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = [-1, 4]$

- a. Finn eventuelle nullpunkter til f .
- b. Bestem monotoniegenskapene til f , og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- c. Undersøk hvordan grafen til f krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til f .
- d. Tegn grafen til f .
- e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGAVE 4



I trekanten ABC er $CD = 4,5$ cm, $BC = 6,0$ cm og $\angle BAC = 42^\circ$.

- a. Regn ut lengda av AC og AD.
- b. Finn $\angle ABC$ og arealet av trekant ABC.

OPPGAVE 5

Etter 1995 har økningen i den globale installerte vindkrafteffekten per år til enhver tid vært proporsjonal med den installerte vindkrafteffekten $y(t)$. Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1995. $y(t)$ er installert vindkrafteffekt i GW ved tida t .

- a. Sett opp en differensiallikning som viser denne sammenhengen.
Ved slutten av 1995 var den globale installerte vindkrafteffekten 4,78 GW, og ved slutten av 2003 var den økt til 39,7 GW.
- b. Vis at den installerte vindkrafteffekten er gitt ved

$$y(t) = 4,78 \cdot e^{0,265t}$$

- c. Hvor stor var installert vindkrafteffekt ved slutten av 2001?
- d. I hvilket år passerte den installerte vindkrafteffekten 10,2 GW?

OPPGAVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 5x - 10y - 13$

- a. Funksjonen har ett minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.
- b. Løs differensiallikningen

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

med initialbetingelsen $y(0) = \frac{7}{3}$.

Nynorsk

OPPGÅVE 1

a. Deriver funksjonane gitt ved

$$1) f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 7x - 8$$

$$2) g(x) = \sin x \cdot e^{2x} \quad (x \text{ målast i radianar})$$

$$3) h(x) = \frac{5x+3}{x^2+2}$$

b. 1) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$3 + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^2}{4} + \frac{3(\sqrt{2}-1)^3}{8} + \dots$$

2) Løys likninga

$$\ln(7x) - \ln(x+1) = \ln 6$$

c. Rekn ut integrala

$$1) \int (-\frac{15}{4}x^4 + 9x^2 - \frac{2}{3}x + 2) dx$$

$$2) \int x \cdot \cos x dx \quad (x \text{ målast i radianar})$$

$$3) \int_1^{\sqrt{5}} x \sqrt{2x^2 - 1} dx$$

OPPGÅVE 2

Den globale bioetanolproduksjonen var i 1992 på 15,9 milliardar L, og i 2004 var den på 32,7 milliardar L.

- Kor mange prosent har bioetanolproduksjonen auka med i denne perioden?
- Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av bioetanolproduksjonen i denne perioden?

Vi går ut frå konstant prosentvis årleg auking av bioetanolproduksjonen i perioden 1992-2004.

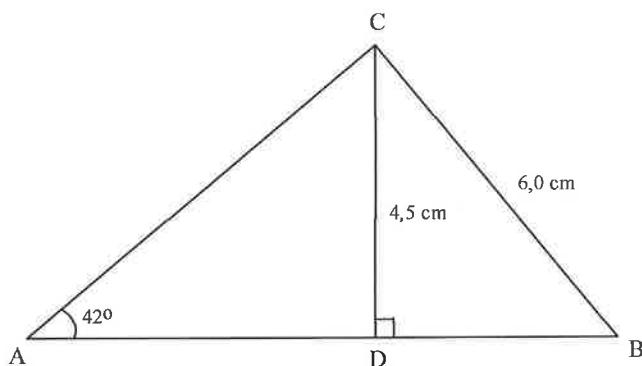
- I kva for år var bioetanolproduksjonen 25,3 milliarder L?

OPPGÅVE 3

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = [-1, 4]$

- Finn eventuelle nullpunkt til f .
- Bestem monotonieigenskapane til f , og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f .
- Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f .
- Teikn grafen til f .
- Grafen til f og den positive x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

OPPGÅVE 4



I trekanten ABC er $CD = 4,5$ cm, $BC = 6,0$ cm og $\angle BAC = 42^\circ$.

- a. Rekn ut lengda av AC og AD.
- b. Finn $\angle ABC$ og arealet av trekant ABC.

OPPGÅVE 5

Etter 1995 har aukinga i den globale installerte vindkrafteffekten per år til ei kvar tid vore proporsjonal med den installerte vindkrafteffekten $y(t)$.

Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1995. $y(t)$ er installert vindkrafteffekt i GW ved tida t .

- a. Sett opp ei differensiallikning som viser denne samanhengen.

Ved slutten av 1995 var den globale installerte vindkrafteffekten 4,78 GW, og ved slutten av 2003 var den auka til 39,7 GW.

- b. Vis at den installerte vindkrafteffekten er gitt ved

$$y(t) = 4,78 \cdot e^{0,265t}$$

- c. Kor stor var installert vindkrafteffekt ved slutten av 2001?
- d. I kva for år passerte den installerte vindkrafteffekten 10,2 GW?

OPPGÅVE 6

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 5x - 10y - 13$

- a. Funksjonen har eitt minimumspunkt. Finn dette minimumspunktet med tilhørende minimum.
- b. Løys differensiallikninga

$$y' = y^2 - 5y + 6$$

med initialvilkåret $y(0) = \frac{7}{3}$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$$y = ax + b$$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITM EFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a .

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a .

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiellikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{kt}$

Differensiellikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{at} - \frac{b}{a}$

Differensiellikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1+C \cdot e^{(B-A)at}}$, der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos :

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{inv sin } a \quad \text{og} \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = \text{inv cos } b, \text{ der } x \text{ er en vinkel i 1.kvadrant.}$$

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n 'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$