BOKMÅL / NYNORSK

Høgskolen i Sørøst-Norge

EKSAMENSFORSIDE
Skriftlig eksamen med tilsyn

Emnekode: **6001**	Emnenavn: **Matematikk**	
Dato: **12.12.2016**	Tid fra / til: **09:00-14:00**	Ant. timer: **5**
Ansv. faglærer: **Roy M. Istad (Bø), Tone K. Grande (Porsgrunn)**		
Campus: **Bø + Porsgrunn**	Fakultet: **Allmennvitenskapelige fag**	
Antall oppgaver: **4**	Antall vedlegg: **1**	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: **9**
Tillatte hjelpemidler (jfr. emnebeskrivelse): **Godkjent kalkulator og formelsamling (vedlegg).**		
Opplysninger om vedlegg: **Formelsamling (4 sider) til bruk under eksamen.**		
Merknader: **Ingen**		

Kryss av for type eksamenspapir	Ruter	X	Blanke	X	Linjer	X

KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG

Høgskolen i Sørøst-Norge

EKSAMEN
12.12. 2016

6001 - MATEMATIKK

Tid:	5 timer (09:00 - 14:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

BOKMÅL

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + x^4$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.
Finn nullpunktene til funksjonen f, og avgjør hvor funksjonen f er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør også om de er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn vendepunktet.
Skisser grafen til f.

d) Beregn verdien: $$A = \int_0^{\frac{5}{2}} (-\tfrac{2}{5}x^5 + x^4)\,dx$$

Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.

Finn skjæringspunktene mellom grafen til f og grafen til $g(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^4$

Finn arealet av det avgrensede området mellom grafene til f og g.

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-1, 0, 1, 2, 3$.
Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne funksjonens eneste ekstrempunkt.
Skisser grafen til f.

b) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$
Hva er definisjonsområdet til g?
Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og de to koordinataksene.
Bestem $g'(x)$ og avgjør om g har noen ekstrempunkter i definisjonsområdet.

Oppgave 3

a) Kristine har satt inn i banken et beløp på 30 000 kr til en rente på 1.5 % årlig.
Hva er verdien av beløpet etter 2 år, 4 år og 8 år?
Hva måtte renten vært for at beløpet skulle øke til 35 000 kr på 8 år?

Bonde Petter Berg kjøpte i 2016 en ny traktor til 1 600 000 kr. Han regner med et verditap på 15 % hvert år. Hva er verdien av traktoren etter 1 år og etter 5 år? Hvor lang tid vil det gå før verdien av traktoren er 500 000 kr?

b) Christian lånte 250 000 kr til kjøp av ny bil i 2014. Renten på lånet var 4.5 % årlig, og betalingen skulle skje over 5 år med like store årlige beløp. Første betaling var i 2015, ett år etter låneopptak. Hva var det årlige beløpet?

I 2016 mottok Christian en arv og vil benytte en del av denne til en ekstra betaling på billånet samtidig med den årlige betalingen i 2016. Hvor mye ekstra må Christian betale på lånet for at de tre siste årlige betalingene skal bli på 30 000 kr hver?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.
Vis at funksjonen h har kun ett stasjonært punkt: $(0, 0)$.

b) Vis at funksjonen h kan skrives som: $h(x, y) = (y - x^2 + x)(y + x^2 + x)$.
Skisser området D i xy-planet der: $D = \{ (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ x^2 - x \leqq y \leqq x \}$
Finn maksimum for funksjonen h over området D.
Kan vi si noe om hva slags type punkt $(0, 0)$ er?

Høgskolen i Søraust-Noreg

EKSAMEN
12.12. 2016

6001 - MATEMATIKK

Tid:	5 timar (09:00 - 14:00)
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

NYNORSK

Oppgåve 1

Ein funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + x^4$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Finn nullpunkta til funksjonen f, og avgjer kor funksjonen f er positiv og kor han er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjer om dei er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn vendepunktet.
Skisser grafen til f.

d) Rekn ut verdien: $$A = \int_0^{\frac{5}{2}} (-\tfrac{2}{5}x^5 + x^4)\,dx$$

Merk av det området på grafskissa som A kan seiast å gi storleiken på.

Finn skjeringspunkta mellom grafen til f og grafen til $g(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^4$

Finn arealet av det avgrensa området mellom grafane til f og g.

Oppgåve 2

Funksjonen f er gitt ved at: $\quad f(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-1, 0, 1, 2, 3$.
Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne funksjonen sitt einaste ekstrempunkt.
Skisser grafen til f.

b) Funksjonen g er gitt ved at: $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$
Kva er definisjonsområdet til g?
Bestem skjeringspunkta mellom grafen til g og dei to koordinataksane.
Bestem $g'(x)$ og avgjer om g har noko ekstrempunkt i definisjonsområdet.

Oppgåve 3

a) Kristine har satt inn i banken eit beløp på 30 000 kr til ei rente på 1.5 % årleg.
Kva er verdien av beløpet etter 2 år, 4 år og 8 år?
Kva må renta vere for at beløpet skal auke til 35 000 kr på 8 år?

Bonde Petter Berg kjøpte i 2016 ein ny traktor til 1 600 000 kr. Han reknar med eit verditap på 15 % kvart år. Kva er verdien av traktoren etter 1 år og etter 5 år? Kor lang tid vil det gå før verdien av traktoren er 500 000 kr?

b) Christian lånte 250 000 kr til kjøp av ny bil i 2014. Renta på lånet var 4.5 % årleg, og betalinga skulle skje over 5 år med like store årlege beløp. Første betaling var i 2015, eitt år etter låneopptak. Kva var det årlege beløpet?

I 2016 mottok Christian ein arv og vil nytte ein del av arven til ein ekstra betaling på billånet samtidig med den årlege betalinga i 2016. Kor mykje ekstra må Christian betale på lånet for at dei tre siste årlege betalingane skal bli på 30 000 kr kvar?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $\quad h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.
Vis at funksjonen h har kun eitt stasjonært punkt: $(0, 0)$.

b) Vis at funksjonen h kan skrivast som: $\quad h(x, y) = (y - x^2 + x)(y + x^2 + x)$.
Skisser området D i xy-planet der: $D = \{\, (x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ \ x^2 - x \leqq y \leqq x \,\}$
Finn maksimum for funksjonen h over området D.
Kan vi seie noko om kva slags type punkt $(0, 0)$ er?

Formelsamling til bruk ved eksamen i 6001 Matematikk

Kvadratsetningene

1: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **2**: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **3**: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$

Løsninger: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, så sant $b^2 - 4ac \geqq 0$

Topunktsformelen $y - y_1 = s(x - x_1)$ der $s = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

s er stigningstallet for linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Sirkellikningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, sirkel med radius r og sentrum i (a, b)

Potensregning

$a^0 = 1$ $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Derivasjon

Potensregelen: $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$, uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$$
\begin{array}{llcl}
a) & f = k \cdot u & \Rightarrow & f' = k \cdot u' \quad (k \text{ er en konstant}) \\
b) & f = u + v & \Rightarrow & f' = u' + v' \\
c) & f = u - v & \Rightarrow & f' = u' - v' \\
d) & f = u \cdot v & \Rightarrow & f' = u' \cdot v + u \cdot v' \\
e) & f = \dfrac{u}{v} & \Rightarrow & f' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}
\end{array}
$$

Her er f, u og v alle funksjoner av den samme variabelen.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$

så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ evt. $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Tangentlikning: $y - b = f'(a)(x - a)$ der (a, b) er tangeringspunktet.

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ $\quad f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Logaritme med grunntall a, der $a > 0$, $a \neq 1$: $y = \log_a x$

Her er y det tallet som a må opphøyes i for å gi x, dvs. $a^y = a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$

Naturlig logaritme: $y = \ln x$ er det tallet som e må opphøyes i for å gi x, dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$$

Regneregler for logaritmer:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \qquad \ln(e^x) = x$$

Derivasjon: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Integralregning

Ubestemt integral: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, der $F'(x) = f(x)$

Regneregler:

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx}\,dx = \tfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bestemt integral: $\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{der } a \leqq c \leqq b$$

Rekker / Finansmatematikk

Summen av en geometrisk rekke (n ledd) når $k \neq 1$:

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

Når $|k| < 1$, så har vi at $\qquad S_n \xrightarrow{n \to \infty} S = a \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$

- Sluttverdi av et beløp K_0 etter n perioder når renta r er

  $a)$ pr periode: $K_n = K_0 (1+r)^n$ $\qquad$ $b)$ kontinuerlig: $K_n = K_0 e^{r \cdot n}$

- Nåverdi av et beløp K_n etter n perioder når renta r er

  $a)$ pr periode: $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+r)^n}$ $\qquad$ $b)$ kontinuerlig: $K_0 = \dfrac{K_n}{e^{r \cdot n}}$

- Oppsparingsannuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode.
  Verdi umiddelbart etter siste betaling.

$$V = K \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

V = sluttverdi
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Nåverdi av annuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling ved utgangen av første periode.

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

K_0 = nåverdi
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Betaling av lån (annuitet). Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling en periode etter låneopptak.

$$K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

K_0 = lånebeløp
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

Funksjoner av to variabler

Funksjonen $z = f(x,y)$ beskriver en flate i rommet.

Punkt der $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 0$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 0$ kalles *stasjonære punkt.*

Klassifisering av et stasjonært punkt (a,b) :

Vi definerer: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{xx}(a,b)$ $\quad B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(a,b)} = f''_{xy}(a,b)$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{yy}(a,b)$$

og setter $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter

1. $\Delta > 0$ og $A < 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt maksimum i (a,b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt minimum i (a,b)
3. $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ f har sadelpunkt i (a,b)
4. $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a,b)

Stigningstallet for tangenten i et punkt på nivåkurven $f(x,y) = c$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

Optimering under bibetingelse ved Lagranges metode

Vi finner maksimum/minimum for $z = f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = c$ ved å sette opp Lagrangefunksjonen:

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y) - c)$$

og så løse følgende likningssystem med hensyn på x, y (og evt. λ):

$$\text{i)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\text{iii)} \quad g(x,y) - c = 0$$