Høgskolen i Sørøst-Norge

Eksamen

4100N Matematikk for økologar

23.05. 2016

Tid/Time :	5 timer (10-15)
Målform/Language :	Bokmål/Nynorsk
Sidetall/Pages :	7 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel/Aids :	Kalkulator og formelsamling
Merknader/Notes	Alle dei 25 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg/Appendix :	mm-papir og formelsamling

Sensuren blir offentliggjort på studentweb

The results will be published on Studentweb.

Bokmål

Oppgave 1

a) Løs likninga

$$\frac{x}{x-11}-\frac{x+2}{x+11}=\frac{2}{x^2-121}$$

b) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utregningene som blir gjort.

$$\frac{31}{3}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)+\frac{75}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{15}\right)^2-\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

Oppgave 2

a) Fra en populasjon på N = 8 enheter blir det trukket ut s = 5 enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg finnes det med
1) ordnet trekning med tilbakelegging?
2) ordnet trekning uten tilbakelegging?
3) ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

b) I ei kasse er det 14 gule kuler og 16 grønne kuler. Vi trekker tilfeldig ut tre kuler uten tilbakelegging etter første og andre trekning. A er utfallet at det blir trukket tre grønne kuler.
Finn P(A).

Oppgave 3

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{4}x^2+7x-8$

2) $g(x)=\cos x\cdot e^{3x}$ (*x måles i radianer*)

3) $h(x)=\dfrac{4x+3}{3x+2}$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$7+\frac{7(\sqrt{5}-1)}{2}+\frac{7(\sqrt{5}-1)^2}{4}+\frac{7(\sqrt{5}-1)^3}{8}+\ldots$$

2) Løs likninga

$$e^{2x}+e^x-12=0$$

c. Regn ut integralene

1) $\int(-\frac{25}{4}x^4+\frac{9}{5}x^2-\frac{2}{3}x+7)\,dx$

2) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

Oppgave 4

Den globale installerte vindkrafteffekten var 40 GW ved slutten av 2003. Ved slutten av 2012 hadde denne effekten økt til 280 GW.

a. Hvor mange prosent har vindkrafteffekten økt med i denne perioden?

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av vindkrafteffekten i denne perioden?

Oppgave 5

En funksjon *f* er definert ved $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$, $D_f = [-1, 7\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkter til *f*.

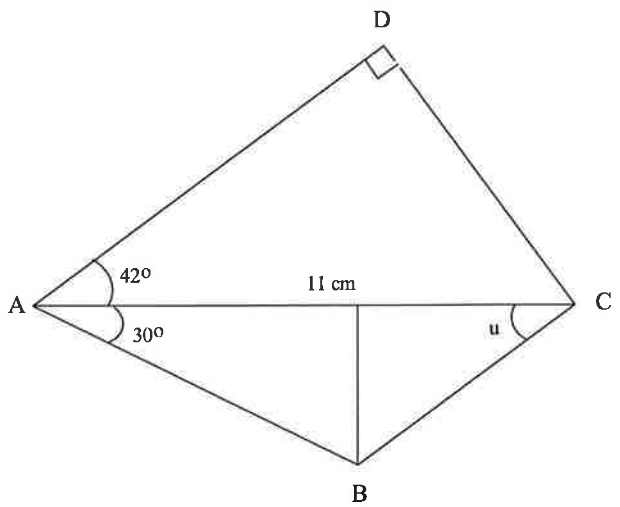
b. Bestem monotoniegenskapene til *f*, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

c. Undersøk hvordan grafen til *f* krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktet på grafen til *f*.

d. Tegn grafen til *f*.

e. Grafen til *f* og den positive x-aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flata.

Oppgave 6



I firkanten ABCD er AC = 11 cm, ∠ CDA = 90°, ∠ DAC = 42° og ∠ CAB = 30°.

a. Regn ut lengda av AD og CD.

b. Arealet av firkanten ABCD er 51 cm^2. Finn lengda av AB og $\angle$ BCA = $\angle$u.

Oppgave 7

I perioden 1961 – 2014 var økningen i den globale kjøttproduksjonen per år til enhver tid proporsjonal med den globale kjøttproduksjonen $y(t)$.
Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1961. $y(t)$ er global kjøttproduksjon i millioner tonn ved tida t.

a. Sett opp en differensiallikning som viser denne sammenhengen.

Ved slutten av 1961 var den globale kjøttproduksjonen 75 millioner tonn, og ved slutten av 2014 var den økt til 312 millioner tonn.

b. Vis at den globale kjøttproduksjonen er gitt ved

$$y(t) = 75 \cdot e^{0,0269t}$$

c. I hvilket år passerte den globale kjøttproduksjonen 200 millioner tonn?

Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = -\frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 2x + y + 18$

a. Finn maksimumspunktet til funksjonen.

b. Løs differensiallikninga

$$y' = 3y - 6$$

med initialbetingelsen $y(0) = 5$.

Nynorsk

Oppgåve 1

a) Løys likninga

$$\frac{x}{x-11}-\frac{x+2}{x+11}=\frac{2}{x^2-121}$$

b) Trekk saman og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{31}{3}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)+\frac{75}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{15}\right)^2-\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

Oppgåve 2

a) Frå ein populasjon på N = 8 einingar blir det trekt ut s = 5 einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med
1) ordna trekning med tilbakelegging?
2) ordna trekning utan tilbakelegging?
3) ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

b) I ei kasse er det 14 gule kuler og 16 grøne kuler. Vi trekker tilfeldig ut tre kuler utan tilbakelegging etter første og andre trekning. A er utfallet at det blir trekt tre grøne kuler.
Finn P(A).

Oppgåve 3

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{4}x^2+7x-8$

2) $g(x)=\cos x\cdot e^{3x}$ (x *målast i radianar*)

3) $h(x)=\dfrac{4x+3}{3x+2}$

b. 1) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$7+\frac{7(\sqrt{5}-1)}{2}+\frac{7(\sqrt{5}-1)^2}{4}+\frac{7(\sqrt{5}-1)^3}{8}+\ldots$$

2) Løys likninga

$$e^{2x}+e^x-12=0$$

Rekn ut integrala

1) $\int (-\frac{25}{4}x^4 + \frac{9}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 7)\, dx$

2) $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

Oppgåve 4

Den globale installerte vindkrafteffekten var 40 GW ved slutten av 2003. Ved slutten av 2012 hadde denne effekten auka til 280 GW.

a. Kor mange prosent har vindkrafteffekten auka med i denne perioden?

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av vindkrafteffekten i denne perioden?

Oppgåve 5

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$, $D_f = [-1, 7\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkt til f.

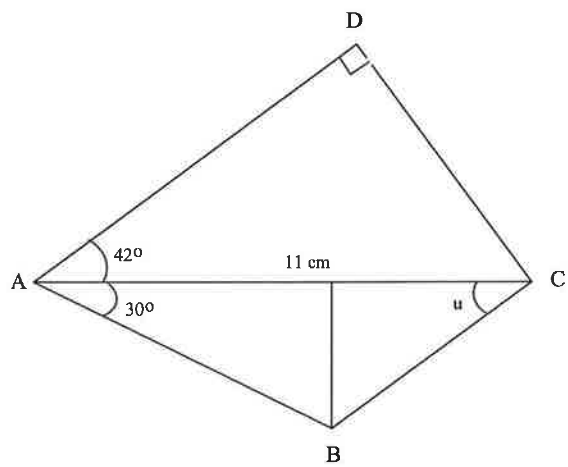
b. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunktet på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

Oppgåve 6



I firkanten ABCD er AC = 11 cm, $\angle$ CDA = 90°, $\angle$ DAC = 42° og $\angle$ CAB = 30°.

a. Rekn ut lengda av AD og CD.

b. Arealet av firkanten ABCD er 51 cm^2. Finn lengda av AB og $\angle$ BCA = $\angle$u.

Oppgåve 7

I perioden 1961 – 2014 var auken i den globale kjøttproduksjonen per år til ei kvar tid proporsjonal med den globale kjøttproduksjonen $y(t)$.
Tida t blir målt i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1961. $y(t)$ er global kjøttproduksjon i millionar tonn ved tida t.

a. Sett opp ei differensiallikning som viser denne samanhengen.

Ved slutten av 1961 var den globale kjøttproduksjonen 75 millionar tonn, og ved slutten av 2014 var den auka til 312 millionar tonn.

b. Vis at den globale kjøttproduksjonen er gitt ved

$$y(t) = 75 \cdot e^{0,0269t}$$

c. I kva for år passerte den globale kjøttproduksjonen 200 millionar tonn?

Oppgåve 8

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = -\frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 2x + y + 18$

a. Finn maksimumspunktet til funksjonen.

b. Løys differensiallikninga

$$y' = 3y - 6$$

med initialvilkåret $y(0) = 5$.

1 Regneregler for sannsynlighet

Komplementsetningen: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Addisjonssetningen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på *N* enheter trekkes et utvalg på *s* enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	N^s
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2)\dots(N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av *N* enheter kan det dannes $N! = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige rekkefølger.

3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der P(B) > 0, er gitt ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) \qquad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A) \qquad P(A) > 0$$

Bayes lov

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0,\ P(B) > 0$$

Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) + \ \dots\ + P(B_r)\,P(A \mid B_r)$$

$B_1, B_2, \dots, B_r$ er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet Ω.

Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(\overline{B})\,P(A \mid \overline{B})$$

Her er $r = 2$, $B_1 = B$ og $B_2 = \overline{B}$

Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1,y_1) og (x_2,y_2) er $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon:

$$\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot vdx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$