BOKMÅL / NYNORSK

Høgskolen i Sørøst-Norge

EKSAMENSFORSIDE
Skriftlig eksamen med tilsyn

Emnekode: **6001**	Emnenavn: **Matematikk**	
Dato: **09.06.2017**	Tid fra / til: **09:00-14:00**	Ant. timer: **5**
Ansv. faglærer: **Roy M. Istad**		
Campus: **Bø**	Fakultet: **Handelshøyskolen**	
Antall oppgaver: **4**	Antall vedlegg: **1**	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: **9**
Tillatte hjelpemidler (jfr. emnebeskrivelse): **Godkjent kalkulator og formelsamling (vedlegg).**		
Opplysninger om vedlegg: **Formelsamling (4 sider) til bruk under eksamen.**		
Merknader: **Ingen**		

Kryss av for type eksamenspapir	Ruter	X	Blanke	X	Linjer	X

KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG

Høgskolen i Sørøst-Norge

EKSAMEN 09.06. 2017

6001 - MATEMATIKK

Tid:	5 timer (09:00 - 14:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

BOKMÅL

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
Finn nullpunktene til funksjonen f, og avgjør hvor funksjonen f er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn det lokale ekstrempunktet for f og avgjør om det også er globalt.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn vendepunktene.
Skisser grafen til f.

d) Finn likningen for den rette linja som skjærer grafen til f både når $x = 2$ og når $x = 4$.
Tegn inn denne linja sammen med grafen til f.

Beregn verdien: $$A = \int_0^2 (-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3)\,dx + \int_2^4 (-2x + 8)\,dx$$

Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.

Oppgave 2

a) Funksjonen f er gitt ved at: $\quad f(x) = 6e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}$

Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2, 0, 2, 4, 6$.

Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne funksjonens eneste ekstrempunkt.

Skisser grafen til f.

b) Funksjonen g er gitt ved at: $\quad g(x) = \dfrac{9-x^2}{x+2}$

Hva er definisjonsområdet til g?

Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og de to koordinataksene.

Bestem $g'(x)$ og avgjør om g har noen ekstrempunkter i definisjonsområdet.

Oppgave 3

a) Egil har satt inn i banken et beløp på 55 000 kr til en rente på 1.75 % årlig.

Hva er verdien av beløpet etter 1 år og 5 år?

Hva måtte renten vært for at beløpet skulle øke til 65 000 kr på 5 år?

Petterson Transport kjøpte i 2016 en helt ny lastebil til 1 800 000 kr. De regner med et verditap på 13 % hvert år. Hva er verdien av lastebilen etter 1 år og etter 4 år? Hvor lang tid vil det gå før verdien av lastebilen er under 500 000 kr?

b) Line lånte 150 000 kr til kjøp av ny motorsykkel i 2015. Renten på lånet var 8.5 % årlig, og betalingen skulle skje over 4 år med like store årlige beløp. Første betaling var i 2016, ett år etter låneopptak. Hva var det årlige beløpet?

Line har vunnet 75 000 kr i et pengespill og vil benytte *hele* dette beløpet til å både dekke den årlige betalingen for 2017 og samtidig bruke resten av gevinsten som en ekstra betaling på lånet. Hva blir da de to siste betalingene på lånet (med uendret rente) dersom Line ønsker å betale dobbelt så mye det siste året som det nest siste?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $\quad h(x,y) = 2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 1$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at funksjonen h har kun ett stasjonært punkt: $(0,\ 1)$.

Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Vis at funksjonen h kan skrives som: $\quad h(x,y) = (2x-y+1)(x+y-1)$.

Skisser det trekantede området D i xy-planet, som har hjørner i de tre punktene: $(0,1)$, $(1,3)$ og $(1,0)$. Sidekantene er med i D.

Finn maksimum for funksjonen h over området D.

HSN Høgskolen i Søraust-Noreg

EKSAMEN
09.06. 2017

6001 - MATEMATIKK

Tid:	5 timar (09:00 - 14:00)
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

NYNORSK

Oppgåve 1

Ein funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
Finn nullpunkta til funksjonen f, og avgjer kor funksjonen f er positiv og kor han er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Finn det lokale ekstrempunktet for f og avgjer om det er globalt.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn vendepunkta.
Skisser grafen til f.

d) Finn likninga for den rette lina som skjer grafen til f både når $x = 2$ og når $x = 4$.
Teikn inn denne lina saman med grafen til f.

Rekn ut verdien: $A = \int_0^2 (-\frac{1}{4}x^4 + x^3)\,dx + \int_2^4 (-2x + 8)\,dx$

Merk av det området på grafskissa som A kan seiast å gi storleiken på.

Oppgåve 2

Funksjonen f er gitt ved at: $\quad f(x) = 6e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-2, 0, 2, 4, 6$.
Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne funksjonen sitt einaste ekstrempunkt.
Skisser grafen til f.

b) Funksjonen g er gitt ved at: $\quad g(x) = \dfrac{9-x^2}{x+2}$
Kva er definisjonsområdet til g?
Bestem skjeringspunkta mellom grafen til g og dei to koordinataksane.
Bestem $g'(x)$ og avgjer om g har nokre ekstrempunkt i definisjonsområdet.

Oppgåve 3

a) Egil har satt inn i banken eit beløp på 55 000 kr til ei rente på 1.75 % årleg.
Kva er verdien av beløpet etter 1 år og 5 år?
Kva måtte renta vore om beløpet skulle auke til 65 000 kr på 5 år?

Petterson Transport kjøpte i 2016 ein heilt ny lastebil til 1 800 000 kr. Dei reknar med eit verditap på 13 % kvart år. Kva er verdien av lastebilen etter 1 år og etter 5 år? Kor lang tid vil det ta før verdien av lastebilen er under 500 000 kr?

b) Line lånte 150 000 kr til kjøp av ny motorsykkel i 2015. Renta på lånet var 8.5 % årleg, og betalinga skulle skje over 4 år med like store årlege beløp. Første betaling var i 2016, eitt år etter låneopptak. Kva var det årlege beløpet?

Line har vunne 75 000 kr i eit pengespel og vil nytte *heile* dette beløpet til å både dekke den årlege betalinga i 2017 og samstundes bruke resten av beløpet som ei ekstra betaling på lånet. Kva blir da dei to siste betalingane på lånet (med uendra rente) dersom Line ønsker å betale dobbelt så mykje det siste året som det nest siste?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $\quad h(x,y) = 2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 1$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.
Vis at funksjonen h har kun eitt stasjonært punkt: $(0,1)$.
Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Vis at funksjonen h kan skrivast som: $\quad h(x,y) = (2x-y+1)(x+y-1)$.
Skisser det trekanta området D i xy-planet, som har hjørne i dei tre punkta: $(0,1)$, $(1,3)$ og $(1,0)$. Sidekantane er med i D.
Finn maksimum for funksjonen h over området D.

Formelsamling til bruk ved eksamen i 6001 Matematikk

Kvadratsetningene

1: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **2**: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **3**: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$

Løsninger: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, så sant $b^2 - 4ac \geqq 0$

Topunktsformelen $y - y_1 = s(x - x_1)$ der $s = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

s er stigningstallet for linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Sirkellikningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, sirkel med radius r og sentrum i (a, b)

Potensregning

$a^0 = 1$ $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Derivasjon

Potensregelen: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$, uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$a)$ $f = k \cdot u \Rightarrow f' = k \cdot u'$ (k er en konstant)

$b)$ $f = u + v \Rightarrow f' = u' + v'$

$c)$ $f = u - v \Rightarrow f' = u' - v'$

$d)$ $f = u \cdot v \Rightarrow f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$e)$ $f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Her er f, u og v alle funksjoner av den samme variabelen.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$

så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ evt. $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Tangentlikning: $y - b = f'(a)(x - a)$ der (a, b) er tangeringspunktet.

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ $\qquad f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Logaritme med grunntall a, der $a > 0$, $a \neq 1$: $y = \log_a x$

Her er y det tallet som a må opphøyes i for å gi x, dvs. $a^y = a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$

Naturlig logaritme: $y = \ln x$ er det tallet som e må opphøyes i for å gi x, dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$$

Regneregler for logaritmer:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \qquad \ln(e^x) = x$$

Derivasjon: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Integralregning

Ubestemt integral: $\int f(x)\,dx = F(x) + C,$ der $F'(x) = f(x)$

Regneregler:

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx}\,dx = \tfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bestemt integral: $\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{der } a \leqq c \leqq b$$

Rekker / Finansmatematikk

Summen av en geometrisk rekke (n ledd) når $k \neq 1$:

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

Når $|k| < 1$, så har vi at $\quad S_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} S = a \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$

- Sluttverdi av et beløp K_0 etter n perioder når renta r er

  a) pr periode: $K_n = K_0 (1+r)^n$ $\qquad$ *b)* kontinuerlig: $K_n = K_0 e^{r \cdot n}$

- Nåverdi av et beløp K_n etter n perioder når renta r er

  a) pr periode: $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+r)^n}$ $\qquad$ *b)* kontinuerlig: $K_0 = \dfrac{K_n}{e^{r \cdot n}}$

- Oppsparingsannuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode. Verdi umiddelbart etter siste betaling.

$$V = K \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

V = sluttverdi
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Nåverdi av annuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling ved utgangen av første periode.

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

K_0 = nåverdi
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Betaling av lån (annuitet). Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling en periode etter låneopptak.

$$K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

K_0 = lånebeløp
K = fast betalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

Funksjoner av to variabler

Funksjonen $z = f(x, y)$ beskriver en flate i rommet.

Punkt der $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 0$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 0$ kalles *stasjonære punkt*.

Klassifisering av et stasjonært punkt (a, b) :

Vi definerer: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{xx}(a, b)$ $\quad B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(a,b)} = f''_{xy}(a, b)$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{yy}(a, b)$$

og setter $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter

1. $\Delta > 0$ og $A < 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt maksimum i (a, b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt minimum i (a, b)
3. $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ f har sadelpunkt i (a, b)
4. $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a, b)

Stigningstallet for tangenten i et punkt på nivåkurven $f(x, y) = c$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

Optimering under bibetingelse ved Lagranges metode

Vi finner maksimum/minimum for $z = f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = c$ ved å sette opp Lagrangefunksjonen:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

og så løse følgende likningssystem med hensyn på x, y (og evt. λ):

$$\text{i)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\text{iii)} \quad g(x, y) - c = 0$$