



**Høgskolen i Telemark**

Institutt for økonomi og informatikk

# **FORMELSAMLING**

## **6005 Statistikk I**

**Til bruk ved eksamen**

**Per Chr. Hagen**

# 1. Sannsynlighetsregning

## 1.1 Regneregler

**Komplementsetningen:**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**Addisjonssetningen:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom  $A \cap B = \emptyset$

## 1.2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på  $N$  enheter trekkes et utvalg på  $s$  enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	$N^s$
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2) \dots (N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av  $N$  enheter kan det dannes  $N! = N(N-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$  forskjellige rekkefølger. Vi definerer dessuten  $0! = 1$ .

## 1.3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der  $P(B) > 0$ , er gitt ved:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Multiplikasjonssetningen:**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) P(A | B) && P(B) > 0 \\ P(A \cap B) &= P(A) P(B | A) && P(A) > 0 \end{aligned}$$

**Bayes lov:**

$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(A)} \quad P(A) > 0 \quad P(B) > 0$$

## Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1) P(A | B_1) + P(B_2) P(A | B_2) + \dots + P(B_r) P(A | B_r)$$

$B_1, B_2, \dots, B_r$  er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r = \Omega$ .  
B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet  $\Omega$ .

## Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B) P(A | B) + P(\bar{B}) P(A | \bar{B})$$

Her er  $r = 2$ ,  $B_1 = B$  og  $B_2 = \bar{B}$

## Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

# 2. Stokastiske variabler

## 2.1 Generelle formler

### Kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

### Sannsynlighetsfordeling

Diskret:  $P(X = x_j) \quad j = 1, 2, 3, \dots$  Punktsannsynligheter

Kontinuerlig:  $f(x) = F'(x)$  Sannsynlighetstetthet

### Forventning

Diskret:  $\mu = E(X) = \sum x P(X = x)$

Kontinuerlig:  $\mu = E(X) = \int x f(x) dx$

Regneregler:  $E(aX + b) = a E(X) + b$

$$E(g(X)) = \sum g(x)P(X=x) \quad (\text{diskret})$$

$$E(g(X)) = \int g(x)f(x) dx \quad (\text{kontinuerlig})$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

### Varians

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

Regneregler:  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad \text{dersom } X \text{ og } Y \text{ er uavhengige.}$$

### Gjennomsnitt

Dersom  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige alle med forventning  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ , så er forventning og varians for gjennomsnittet gitt ved:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

### Binomisk fordeling

$X$  er antall forekomster av et utfall  $A$  på  $n$  uavhengige delforsøk og  $p = P(A)$ .

### Sannsynlighetsfordeling

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

### Forventning og varians

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

### Normaltilnærmelse

$$X \approx N(np, np(1-p)) \quad \text{God tilnærmelse for } np(1-p) \geq 10$$

## 2.3 Hypergeometrisk fordeling

I en populasjon på  $N$  enheter har  $M$  enheter egenskap A.  $\theta = M/N$  er andelen av enheter med egenskap A i populasjonen.

$X$  er antall enheter med egenskap A i et utvalg på  $n$  enheter som er trukket tilfeldig uten tilbakelegging.

### Sannsynlighetsfordeling

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

### Forventning og varians

$$E(X) = n\theta \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} n\theta(1-\theta)$$

### Normaltilnærmelse

$$X \approx N(n\theta, n\theta(1-\theta)) \quad \text{God tilnærmelse for } n\theta(1-\theta) \geq 10 \text{ og } N \text{ mye større enn } n.$$

## 2.4 Poissonfordeling

$X$  er antall forekomster av et utfall A i  $t$  enheter av tid, areal eller volum.  $\lambda$  er forventet antall forekomster av A pr enhet.

### Sannsynlighetsfordeling

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

### Forventning og varians

$$E(X) = \lambda t \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

### Normaltilnærmelse

$$X \approx N(\lambda t, \lambda t) \quad \text{Brukbar tilnærmelse for } \lambda t \geq 10$$

Ofta vil en innrette seg slik at  $t = 1$ . Da angir  $X$  antall forekomster av A på 1 enhet, f.eks. 1 time, 1 mål eller 1 liter.

## 2.5 Normalfordeling

**Sannsynlighetstetthet:**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

**Forventning og varians:**  $E(X) = \mu$        $\text{Var}(X) = \sigma^2$

**Kumulativ fordelingsfunksjon:**  $F(x) = P(X \leq x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$G$  er kumulativ fordelingsfunksjon for  $N(0, 1)$ -fordelingen.  $G(u)$  fins i tabellen på side 10-11.

Omvendingsformelen:  $G(-u) = 1 - G(u)$

## 2.6 Eksponensialfordeling

**Sannsynlighetstetthet:**  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$        $t > 0$

**Forventning og varians:**  $E(T) = \frac{1}{\lambda}$        $\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

**Kumulativ fordelingsfunksjon:**  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$        $t > 0$

# 3. Statistikk

## 3.1 Målemodellen

**Modell:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige og normalfordelte med forventning  $\mu$  og varians  $\sigma^2$

**Standardestimatorer:**

$$\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

### 3.2 Konfidensintervall

Dersom  $\hat{\theta}$  er en forventningsrett og normalfordelt estimator for en parameter  $\theta$ , så er et konfidensintervall for  $\theta$  med sikkerhet  $100(1 - \alpha)\%$  gitt ved

$$\hat{\theta} \pm u_{\alpha/2} \text{SD}(\hat{\theta})$$

der  $\text{SD}(\hat{\theta}) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$  er standardavviket til estimatoren, og  $u_{\alpha/2}$  er  $\alpha/2$ -kvantilen i  $N(0, 1)$ -fordelingen.

Dersom  $\hat{\theta}$  er tilnærmet normalfordelt, får vi ved formelen ovenfor et tilnærmet konfidensintervall.

Dersom  $\text{SD}(\hat{\theta})$  inneholder parameteren  $\theta$ , erstattes denne med estimert verdi  $\hat{\theta}$ , og konfidensintervallet gjelder fortsatt tilnærmet.

### 3.3 Hypotesetest

$\hat{\theta}$  er en forventningsrett og normalfordelt estimator for en parameter  $\theta$ .

Vi skal teste

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Signifikansnivået skal være  $\alpha$ , dvs. kritisk verdi  $k$  bestemmes slik at  $P(\hat{\theta} > k \mid \theta = \theta_0) = \alpha$

Testen blir:

Påstå  $H_1$  dersom

$$\hat{\theta} > k = \theta_0 + u_{\alpha} \text{SD}(\hat{\theta})$$

der  $\text{SD}(\hat{\theta}) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$  er standardavviket til estimatoren under  $H_0$ .

Dersom  $\hat{\theta}$  er en tilnærmet normalfordelt, får vi en test med tilnærmet signifikansnivå  $\alpha$ .

### 3.4 Målemodell med ukjent standardavvik – $t$ -fordelingen

$X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige og normalfordelte med forventning  $\mu$  og varians  $\sigma^2$

Da er

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$$

$t$ -fordelt med  $n - 1$  frihetsgrader der  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$

Når  $\sigma$  er ukjent, brukes  $t$ -fordelingen i konfidensintervall og hypotesetest for  $\mu$  i målemodellen.

Konfidensintervall med sikkerhet  $100(1 - \alpha)\%$  for  $\mu$ :

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

der  $t_{\alpha/2, n-1}$  er  $\alpha/2$ -kvantilen i  $t$ -fordelingen med  $n - 1$  frihetsgrader.

En test med signifikansnivå  $\alpha$  for hypotesen

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

får en ved å påstå  $H_1$  dersom

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} > t_{\alpha, n-1}$$

der  $t_{\alpha, n-1}$  er  $\alpha$ -kvantilen i  $t$ -fordelingen med  $n - 1$  frihetsgrader.



### 3.5 Regresjonsanalyse

Modell: 
$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + U$$

$U$  er normalfordelt med forventning 0 og standardavvik  $\sigma$ , og  $x$  er ikke-stokastisk. Dermed er også  $Y$  normalfordelt.

Forventning og varians: 
$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2$$

Vi har  $n$  uavhengige par av observasjoner av  $x$  og  $Y$ :  $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$

#### Minste kvadraters estimatorer (MKE)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{M} \sum (x_i - \bar{x}) Y_i \quad \text{der} \quad M = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Estimatorene er normalfordelte med forventning og varians:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{M}$$

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad \text{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{nM}$$

## 4. Tabeller

### 4.1 Kvantiltabell over $N(0, 1)$ -fordelingen

$\alpha$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$u_\alpha$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

## 4.2 Tabell over $N(0, 1)$ -fordelingen

Tabellen gir  $G(x) = P(X \leq x)$  der  $X \sim N(0, 1)$ .

Eksempel:  $x = -0.54$  gir  $P(X \leq -0.54) = G(-0.54) = 0.2946$

$x = 1.86$  gir  $P(X \leq 1.86) = G(1.86) = 0.9686$  (neste side)

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.8	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.7	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

### 4.3 Tabell over $t$ -fordelingen

Tabellen gir  $t_{\alpha, m}$  som er  $\alpha$ -kvantilen i  $t$ -fordelingen med  $m$  frihetsgrader. Vi har  $P(T > t_{\alpha, m}) = \alpha$  der  $T \sim t_m$

Eksempelvis er  $t_{0.05, 15} = 1.753$ . Det betyr at  $P(T > 1.753) = 0.05$  når  $T$  er  $t$ -fordelt med 15 frihetsgrader.

$m$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	1.310	1.696	2.040	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.739
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

