Høgskolen i Sørøst-Norge

Eksamen

4100N Matematikk for økologar

02.06.2017

Tid/Time :	5 timar
Målform/Language :	Bokmål/Nynorsk
Sidetall/Pages :	7 (inkludert denne framsida)
Hjelpemiddel/Aids :	Kalkulator og formelsamling
Merknader/Notes	Alle dei 26 deloppgåvene tel likt ved evalueringa
Vedlegg/Appendix :	mm-papir og formelsamling

Sensuren blir offentliggjort på studentweb

The results will be published on Studentweb.

Bokmål

Oppgave 1

a) Løs likninga

$$\frac{x}{x-13}-\frac{x+3}{x+13}=\frac{-7}{x^2-169}$$

b) Trekk sammen og skriv enklest mulig. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utregningene som blir gjort.

$$\frac{18}{11}+\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{11}-\frac{1}{2}\right)+\frac{44}{15}\cdot\left(\frac{8}{11}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{121}{225}\cdot\left(\frac{7}{5}-\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

Oppgave 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,50, P(B) = 0,40 og P(A∩B) = 0,30. Regn ut $P(\overline{B})$, P(A∪B) og P(A|B).

b) Fra en populasjon på N = 7 enheter blir det trukket ut s = 6 enheter.

Hvor mange forskjellige utvalg finnes det med ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging?

c) I et fylkesting var det 40 % kvinner, og 10 % av kvinnene representerte Venstre. Av mennene representerte 7 % dette partiet. Vi trekker tilfeldig ut en fylkestingsrepresentant. K er utfallet at representanten var ei kvinne og M en mann. V er utfallet at representanten representerte Venstre. Finn P(V|M) og P(V).

Oppgave 3

a. Deriver funksjonene gitt ved

1) $f(x)=\frac{16}{3}x^3-\frac{9}{4}x^2+8x-9$

2) $g(x)=\cos 2x\cdot\ln(x^2+3)$ (*x måles i radianer*)

3) $h(x)=\dfrac{4x^2+5}{6x+7}$

b. 1) Regn ut eksakt verdi for summen av den uendelige geometriske rekka

$$7+\frac{7(\sqrt{10}-2)}{3}+\frac{7(\sqrt{10}-2)^2}{9}+\frac{7(\sqrt{10}-2)^3}{27}+\ldots$$

2) Løs likninga

$$16^x - 7 \cdot 4^x + 12 = 0$$

c. Regn ut integralene

1) $\int (-\frac{25}{5}x^4 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{7}{3}x + 8)\, dx$

2) $\int_1^2 x \cdot \ln x^3 dx$

Oppgave 4

Ei vare kostet først kr 400. Deretter gikk prisen opp med 30 %, for så å gå ned med 40 %.

a. Hvor mange prosent gikk prisen ned med totalt?

I perioden 1993 til 2007 økte de norske utslippene av CO_2 fra 50 millioner tonn til 57 millioner tonn.

b. Hva var den gjennomsnittlige prosentvise årlige økningen av CO_2 - utslippene i denne perioden?

Oppgave 5

En funksjon *f* er definert ved $f(x) = -x^4 + 3x^3$, $D_f = [-1, \frac{7}{2}\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkter til *f*.

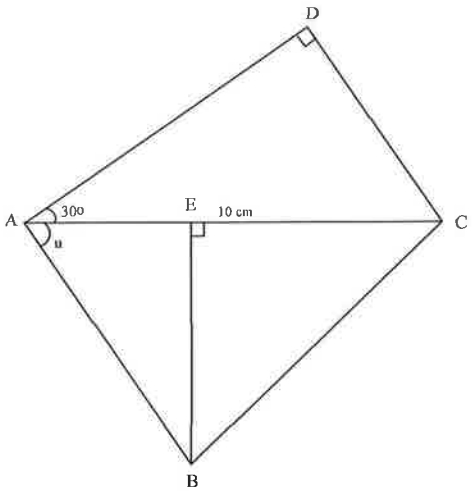
b. Bestem monotoniegenskapene til *f*, og regn ut koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

c. Undersøk hvordan grafen til *f* krummer i de ulike områdene. Finn koordinatene til vendepunktene på grafen til *f*.

d. Tegn grafen til *f*.

e. Grafen til *f* og den positive x-aksen avgrenser en flate. Finn arealet av denne flata.

Oppgave 6



I firkanten ABCD er AC = 10 cm, $\angle$ CDA = 90°, $\angle$ DAC = 30°. Forholdet mellom linjestykkene AE og CE er 2:3.

a. Regn ut lengda av AD og CD.

b. Arealet av firkanten ABCD er 51,8 cm^2. Finn $\angle$ CAB = $\angle$u.

Oppgave 7

I perioden 1987 – 2012 var minkingen i folketallet per år i en kommune til enhver tid proporsjonal med folketallet $y(t)$. Tida t måles i år, og $t = 0$ svarer til slutten av 1987.

a. Sett opp en differensiallikning som viser denne sammenhengen.

Ved slutten av 1987 var folketallet i kommunen 7106, og ved slutten av 2012 var folketallet redusert til 5982.

b. Vis at folketallet i kommunen er gitt ved

$$y(t) = 7106 \cdot e^{-0,00689t}$$

c. I hvilket år passerte folketallet 6490?

Oppgave 8

Funksjonen f er definert ved $f(x,y) = -\frac{7}{2}x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2 + 8x + 4y + 11$

a. Finn maksimumspunktet til funksjonen.

b. Løs differensiallikninga

$y' = 2y^2 - 22y + 60$ med initialbetingelsen $y(0) = \frac{36}{7}$.

Nynorsk

Oppgåve 1

a) Løys likninga

$$\frac{x}{x-13}-\frac{x+3}{x+13}=\frac{-7}{x^2-169}$$

b) Trekk saman og skriv enklast mogleg. Skriv svaret som brøk, og ta med alle utrekningane som blir gjort.

$$\frac{18}{11}+\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{11}-\frac{1}{2}\right)+\frac{44}{15}\cdot\left(\frac{8}{11}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{121}{225}\cdot\left(\frac{7}{5}-\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

Oppgåve 2

a) For to utfall A og B er det gitt at P(A) = 0,50, P(B) = 0,40 og P(A∩B) = 0,30. Rekn ut P($\overline{B}$), P(A∪B) og P(A|B).

b) Frå ein populasjon på N = 7 einingar blir det trekt ut s = 6 einingar.

Kor mange forskjellige utval finst det med ikkje-ordna trekning utan tilbakelegging?

c) I eit fylkesting var det 40 % kvinner, og 10 % av kvinnene representerte Venstre. Av mennene representerte 7 % dette partiet. Vi trekkjer tilfeldig ut ein fylkestingsrepresentant. K er utfallet at representanten var ei kvinne og M ein mann. V er utfallet at representanten representerte Venstre. Finn P(V|M) og P(V).

Oppgåve 3

a. Deriver funksjonane gitt ved

1) $f(x)=\frac{16}{3}x^3-\frac{9}{4}x^2+8x-9$

2) $g(x)=\cos 2x\cdot\ln(x^2+3)$ (*x måles i radianer*)

3) $h(x)=\dfrac{4x^2+5}{6x+7}$

b. 1) Rekn ut eksakt verdi for summen av den uendelege geometriske rekka

$$7+\frac{7(\sqrt{10}-2)}{3}+\frac{7(\sqrt{10}-2)^2}{9}+\frac{7(\sqrt{10}-2)^3}{27}+\ldots$$

2) Løys likninga

$$16^x - 7 \cdot 4^x + 12 = 0$$

c. Rekn ut integrala

1) $\int (-\frac{25}{5}x^4 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{7}{3}x + 8)\, dx$

2) $\int_1^2 x \cdot \ln x^3 dx$

Oppgåve 4

Ei vare kosta først kr 400. Deretter gikk prisen opp med 30 %, for så å gå ned med 40 %.

a. Kor mange prosent gjekk prisen ned med totalt?

I perioden 1993 til 2007 auka dei norske utsleppa av CO_2 frå 50 millionar tonn til 57 millionar tonn.

b. Kva var den gjennomsnittlege prosentvise årlege aukinga av CO_2 - utsleppa i denne perioden?

Oppgåve 5

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = -x^4 + 3x^3$, $D_f = [-1, \frac{7}{2}\rangle$

a. Finn eventuelle nullpunkt til f.

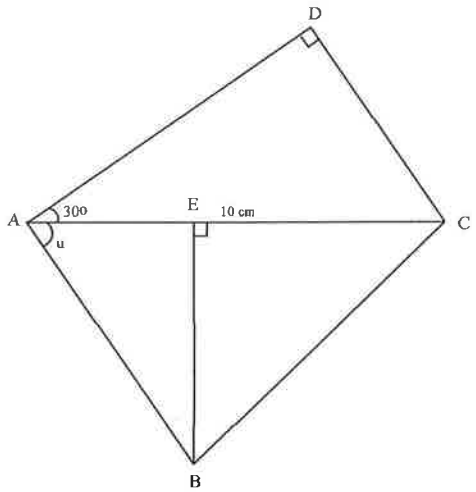
b. Bestem monotonieigenskapane til f, og rekn ut koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c. Undersøk korleis grafen til f krummar i dei ulike områda. Finn koordinatane til vendepunkta på grafen til f.

d. Teikn grafen til f.

e. Grafen til f og den positive x-aksen avgrensar ei flate. Finn arealet av denne flata.

Oppgåve 6



I firkanten ABCD er AC = 10 cm, ∠ CDA = 90° , ∠ DAC = 30°. Forholdet mellom linestykka AE og CE er 2:3.

a. Rekn ut lengda av AD og CD.

b. Arealet av firkanten ABCD er 51,8 cm^2. Finn ∠ CAB = ∠u.

Oppgåve 7

I perioden 1987 – 2012 var minkinga i folketalet per år i ein kommune til ei kvar tid proporsjonal med folketalet $y(t)$. Tida t målast i år, og $t = 0$ svarar til slutten av 1987.

a. Sett opp ei differensiallikning som viser denne samanhengen.

Ved slutten av 1987 var folketalet i kommunen 7106, og ved slutten av 2012 var folketalet redusert til 5982.

b. Vis at folketalet i kommunen er gitt ved

$$y(t) = 7106 \cdot e^{-0,00689t}$$

c. I kva for år passerte folketalet 6490?

Oppgåve 8

Funksjonen f er definert ved $f(x, y) = -\frac{7}{2}x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2 + 8x + 4y + 11$

a. Finn maksimumspunktet til funksjonen.

b. Løys differensiallikninga

$y' = 2y^2 - 22y + 60$ med initialvilkåret $y(0) = \frac{36}{7}$.

FORMELSAMLING TIL "MATEMATIKK FOR ØKOLOGAR"

LIKNINGER FOR RETTE LINJER

$y = ax + b$

Rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stigningstall a er $y - y_1 = a(x - x_1)$

Rett linje gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ANNENGRADSLIKNING

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DERIVASJON

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregler:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

$f(x) = g(x)^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot g(x)^{r-1} \cdot g'(x)$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Kjerneregelen:

Gitt en funksjon $f[g(x)]$, der $g(x) = u$. Da er $f'[g(x)] = f'(u) \cdot u'$

POTENSER

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

$$a^{-x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[y]{a^x}$$

$$(a^x \cdot a^y) = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

EKSPONENTIALFUNKSJONER

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITMEFUNKSJONER

Logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye 10 i for å få a.

$$10^{\log a} = a$$

Den naturlige logaritmen til et positivt tall a er eksponenten i den potensen vi må opphøye e i for å få a.

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^a = a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

INTEGRALREGNING

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Delvis integrasjon :

$$\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

FUNKSJONER MED TO VARIABLE

Dersom en funksjon $f(x,y)$ enten har et maksimumspunkt eller et minimumspunkt for $(x,y) = (a,b)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikningen $y' = k \cdot y$ har løsningen $y = C \cdot e^{k \cdot t}$

Differensiallikningen $y' = ay + b$ har løsningen $y = C \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Differensiallikningen $y' = ay^2 + by + c$ har løsningen $y = A + \frac{B-A}{1 + C \cdot e^{(B-A)at}}$,

der A og B er løsningene av likningen $ay^2 + by + c = 0$.

TRIGONOMETRI

I en rettvinklet trekant gjelder følgende definisjoner:

Sinus til en vinkel er forholdet mellom den motstående kateten til vinkelen og hypotenusen.

Cosinus til en vinkel er forholdet mellom den hosliggende kateten til vinkelen og hypotenusen.

Tangens til en vinkel er forholdet mellom den motstående og hosliggende kateten til vinkelen.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dersom sinus eller cosinus til en vinkel x er kjent, kan vi finne vinkelen x ved å bruke inv sin eller inv cos:

$\sin x = a \Leftrightarrow x = inv\ \sin\ a \quad og \quad \cos x = b \Leftrightarrow x = inv\ \cos\ b$, der x er en vinkel i 1.kvadrant.

PROSENTVIS VEKST

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

GEOMETRISKE REKKER

Det n'te leddet i en geometrisk rekke har uttrykket $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$$

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

1 Regneregler for sannsynlighet

Komplementsetningen: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Addisjonssetningen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Utfallene A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

2 Kombinatorikk

Fra en populasjon på N enheter trekkes et utvalg på s enheter.

Trekkemåte	Antall forskjellige utvalg
Ordnet med tilbakelegging	N^s
Ordnet uten tilbakelegging	$(N)_s = N(N-1)(N-2)\ldots(N-s+1)$
Ikke-ordnet uten tilbakelegging	$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$

Av N enheter kan det dannes $N! = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige rekkefølger.

3 Betinget sannsynlighet og uavhengighet

Betinget sannsynlighet for A gitt B, der $P(B) > 0$, er gitt ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) \qquad P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) \qquad P(A) > 0$$

Bayes lov

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(A)} \qquad P(A) > 0,\ P(B) > 0$$

Lov om total sannsynlighet

$$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) + \ \ldots\ + P(B_r)\,P(A \mid B_r)$$

$B_1, B_2, \ldots, B_r$ er disjunkte utfall, alle med positiv sannsynlighet, og $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r = \Omega$

B-ene sies å være en *oppdeling* av utfallsrommet Ω.

Spesialtilfelle – oppdeling i 2 deler

$$P(A) = P(B)\,P(A \mid B) + P(\overline{B})\,P(A \mid \overline{B})$$

Her er $r = 2$, $B_1 = B$ og $B_2 = \overline{B}$

Uavhengighet

A og B er *uavhengige* utfall dersom $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$