Sivilingeniørutdanningen ved
Institutt for prosessautomatisering
Kybernetikk og industriell IT
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolene i Telemark
DDiR, November 18, 2008

Fag PA3494: Prosessregulering

Løsning til Øving 9

Task 1

a) Ve have that

$$y(s) = h_p(s)h_c(s)\overbrace{(r-y)}^{=0} + h_p(s)u_f + h_d(s)v(s) = r \tag{1}$$

this give the ideal feed-forward controller

$$u_f = \frac{1}{h_p(s)}r - \frac{h_d(s)}{h_p(s)}v. \tag{2}$$

I.e., we have a feed-forward part from the reference, r, and a feed-forward from the disturbance, v.

b) We have that

$$y(s) = h_p(s)h_c(s)(r-y) + h_p(s)u_f + h_d(s)v(s). \tag{3}$$

As we see, the disturbance, v, have no influence upon the output, y, if we chose u_f such that

$$h_p(s)u_f + h_d(s)v(s) = 0. \tag{4}$$

This gives the ideal feed-forward controller

$$u_f = -\frac{h_d(s)}{h_p(s)}v(s). \tag{5}$$

Hence, we have only feed-forward from the disturbance, v, in this case.

Task 2

a) We define

$$h_p(s) = \frac{1-\alpha s}{1+\alpha s} \tag{6}$$

The frequency response is then given by

$$h_p(j\omega) = e^{j\angle h_p(j\omega)} \tag{7}$$

where

$$\angle h_p(j\omega) = \arctan(-\alpha\omega) - \arctan(\alpha\omega)) = -2\arctan(\alpha\omega) \tag{8}$$

We demand that

$$\angle h_p(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

at the frequency $\omega = \frac{\pi}{2\tau}$. This gives

$$\angle h_p(j\omega) = -2\arctan(\alpha\frac{\pi}{2\tau}) = -\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

which gives

$$\alpha = \frac{2\tau}{\pi} \tag{11}$$

because $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) Given a process

$$y = \frac{1-\alpha s}{1+\alpha s}u \tag{12}$$

A state space model is then given by

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha}x + \frac{2}{\alpha}u, \tag{13}$$

$$y = x - u. \tag{14}$$

Prof: We have that

$$y = \frac{1-\alpha s}{1+\alpha s}u = (\frac{2}{1+\alpha s} - \frac{1+\alpha s}{1+\alpha s})u = \frac{2}{1+\alpha s}u - u \tag{15}$$

Defining

$$x = \frac{2}{1+\alpha s}u, \tag{16}$$

får vi

$$y = x - u, \tag{17}$$

and

$$\alpha s x + x = 2u. \tag{18}$$

Ved invers Laplace-transformasjon får vi

$$\dot{x} = -\frac{1}{\alpha}x + \frac{2}{\alpha}u. \tag{19}$$

Tilstandsrommodellen (13) og (14) er dermed gitt ved (17) og (19).

Oppgave 3

c) Vi setter frekvensresponsen til $h_0(s) = h_c(s)h_p(s)$ på polar form

$$h_0(j\omega) = \frac{1}{T_i \omega j} e^{-j\tau\omega} = |h_0(j\omega)| e^{j\angle h_0(j\omega)}. \tag{20}$$

der

$$|h_0(j\omega)| = \frac{1}{T_i \omega}, \tag{21}$$

$$\angle h_0(j\omega) = -\tau\omega - \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

Vi finner fasekryssfrekvensen ω_{180}, dvs.

$$\angle h_0(j\omega_{180}) = -\tau\omega_{180} - \frac{\pi}{2} = -\pi \tag{23}$$

som gir

$$\omega_{180} = \frac{\pi}{2\tau} \tag{24}$$

Systemet er stabilt dersom

$$|h_0(j\omega_{180})| = \frac{1}{T_i \omega_{180}} < 1 \tag{25}$$

Dette gir følgende stabilitetskrav

$$\frac{\tau}{T_i} < \frac{\pi}{2} \tag{26}$$

d) Benytter vi Balchen approksimasjonen

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{2\tau}{\pi} s}{1 + \frac{2\tau}{\pi} s} \tag{27}$$

får vi samme stabilitetsrsultat som i punkt c) over.

Oppgave 4

For å finne en diskret formulering av PID regulatoren finner vi først en kontinuerlig tilstandsrommodell. PID regulatoren kan skrives slik

$$u = K_p e + \frac{K_p}{T_i s} e + K_p T_d s e. \tag{28}$$

Vi definerer regulatortilstanden, z, som

$$z = \frac{K_p}{T_i s} e. \tag{29}$$

Invers Laplacetrabsformasjon av (29) og (28) gir da følgende tilstandsrommodell for PID regulatoren

$$\dot{z} = \frac{K_p}{T_i} e. \tag{30}$$

$$u = K_p e + z + K_p T_d \dot{e} \tag{31}$$

En fornuftig initialverdi ved oppstart for regulatortilstanden, z, er her $z(t_0) = u_0$ der u_0 er et nominelt pådrag.
Vi benytter en eksplisitt Euler approksimasjon til de tidsderiverte og får følgende diskrete tilstandsrommodell for PID regulatoren

$$z_{k+1} = z_k + \Delta t \frac{K_p}{T_i} e_k. \tag{32}$$

$$u_k = K_p e_k + z_k + K_p T_d \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t} \tag{33}$$

der Δt er samplingsintervallet. Merk at det ofte er vanlig å ikke derivere referansesignalet. Referansen er jo som oftest stykkevis konstant og man unngår store sprang i pådraget ved settpunktsendringer. Dette betyr at

$$\dot{e} = -\dot{y} \approx -\frac{y_k - y_{k-1}}{\delta t}. \tag{34}$$

Merk at den diskrete PID regulatoren kan settes på endringsform, dvs. at vi ved hvert sample beregner $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$. Dersom vi deriverer referansen så kan denne skrives slik

$$\Delta u_k = K_p(1 + \frac{T_d}{\Delta t})(e_k - e_{k-1}) + \frac{\Delta t K_p}{T_i} e_{k-1} - \frac{K_p T_d}{\Delta t}(e_{k-1} - e_{k-2}). \tag{35}$$

Vis dette. Dersom vi velger å ikke derivere referansen får vi