Eksamen i fag PA2897 Systemidentifikasjon og prediktiv regulering fredag 25. mai 2001

Emnedelen består av: 4 oppgaver. Det er 5 sider i eksamenssettet.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (20%): Prediktiv regulering

Anta en prosess gitt ved

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + v, \tag{1}$$
$$y_k = x_k + w, \tag{2}$$

der v er en konstant og ukjent prosessforstyrrelse og w er en konstant og ukjent målestøy. Vi antar at modellparametrene (a, b) er kjente.

a) Anta en prediksjonshorisont, $L = 1$, og sett opp en prediksjonsmodell av formen

$$y_{k+1} = p_1^{\Delta} + F_1^{\Delta} \Delta u_k, \tag{3}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$.

Sett opp uttrykk for p_1^{Δ} og F_1^{Δ}. Merk at vi er ute etter en prediksjonsmodell som er uavhengig av de konstante og ukjente forstyrrelsene v og w.

b) Sett opp en passende lineær-kvadratisk kostfunksjon (kriterie/objektfunksjon), J_k, for syntese av en MPC regulator med utgangspunkt i prediksjonsmodellen og prediksjonshorisonten i oppgave 1a). Anta at bare Δu_k og $y_{k+1} - r_{k+1}$ vektes i kostfunksjonen.

c) Beregn den optimale MPC pådragsendringen, Δu_k^*, for det tilfelle at vi ikke har begrensninger. Prediksjonsmodellen og kostfunksjonen er som gitt i oppgave 1a) og 1b). Hvilket MPC pådrag, u_k^*, vil det være rimelig å påtrykke prosessen ?

d) Utfør en statisk analyse av MPC regulatoren i punkt 1c) benyttet på en prosess som gitt i (1) og (2). Dvs. gi en analyse av den statiske prosessutgangen, y_k, når $k \to \infty$ og det MPC regulerte systemet er stabilt.

Oppgave 2 (30%): Prediktiv regulering

Anta en prosess som kan beskrives med tilstandsrommodellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{4}$$

$$y_k = Dx_k. \tag{5}$$

Vi antar at modellmatrisene (A, B, D) er kjente.

a) Foreslå en sammenheng mellom tilstandsrommodellen og en prediksjonsmodell av formen

$$y_{k+1|L} = p_L + F_L u_{k|L}, \tag{6}$$

- Oppgi strukturen på $y_{k+1|L}$ og $u_{k|L}$.
- Oppgi struktur og sammenheng mellom F_L, p_L og modellen (4) og (5).

Du kan her anta at tilstandsvektoren x_k måles.

b) Anta nå at tilstandsvektoren x_k ikke måles og at vi ønsker å beregne et uttrykk for x_k ut i fra matrisene (A, B, D) og J gamle utgangs- og inngangs-vektorer. Skisser en formel for hvordan x_k kan beregnes. Dette "estimatet" skal kunne benyttes i MPC regulatoren.

c) I forbindelse med utviklingen av en MPC regulator kan det være hensiktsmessig å skrive kriteriet på matriseform slik

$$J_k = (y_{k+1|L} - r_{k+1|L})^T Q (y_{k+1|L} - r_{k+1|L}) + u_{k|L}^T P u_{k|L}. \tag{7}$$

- Oppgi struktur og betydning av $r_{k+1|L}$.
- Oppgi struktur og betydning av parametrene i Q og P.

d) Anta her at vi ikke har begrensninger. Ta utgangspunkt i (6) og (7) og vis hvordan vi kan finne ett uttrykk, $u_{k|L}^*$, for de (MPC) optimale pådragene. Hvilket pådrag benyttes i MPC reguleringen ?

e) Anta nå at vi har begrensningene

$$u_{k|L}^{\min} \leq u_{k|L} \leq u_{k|L}^{\max}, \tag{8}$$

$$y_{k+1|L}^{\min} \leq y_{k+1|L} \leq y_{k+1|L}^{\max}. \tag{9}$$

Vis at dette kan skrives som en lineær ulikhet

$$\mathcal{A} u_{k|L} \leq b, \tag{10}$$

og sett opp uttrykk for $\mathcal{A}$ og b.

f) Ta utgangspunkt i kriteriet (7), prediksjonsmodellen (6) og ulikheten (10) og formuler et QP-problem for beregning av MPC løsningen $u_{k|L}^*$. Du skal ikke løse QP-problemet.

Oppgave 3 (30%): Underroms-identifikasjon

Vi antar at et gitt system kan beskrives med en tilstandsrommodell

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ce_k & (11) \\ y_k &= Dx_k + Eu_k + Fe_k & (12) \end{aligned}$$

der e_k er hvit støy med kovariansmatrise $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = I$. En sekvens av inngangs og utgangsdata er kjent, dvs.

$$\left. \begin{array}{l} u_k \\ y_k \end{array} \right\} \ \forall \ k = 0, \ldots, N-1 \quad \text{(kjente data)} \tag{13}$$

a) Vis at systemet (11) og (12) med data som i (13) kan beskrives med en matrise-ligning av formen

$$Y_{k+1|L} = \tilde{A}_L Y_{k|L} + \tilde{B}_L U_{k|L+g} + \tilde{C}_L E_{k|L+1} \tag{14}$$

Det kreves en utledning og en beskrivelse av strukturen på matrisene som inngår i matrise-ligningen.

Med utgangspunkt i de kjente data (13) samt matriseligningen (14) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z_{J|L} \tag{15}$$

der data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ er kjente.

b) Finn uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningen (15) for følgende tre tilfeller:

- et autonomt system, dvs. der $u_k = 0$ og $e_k = 0$.
- et deterministisk system, dvs. der $e_k = 0$.
- et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system. Tips: Sett $k = J$ i (14) og ta utgangspunkt i matrise-ligningen

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+g} + \tilde{C}_L E_{J|L+1} \tag{16}$$

og data-matrisene

$$Y_{0|J} \text{ og } U_{0|J} \tag{17}$$

c) På bakgrunn av matrise-ligningen (15) skal du vise hvordan vi kan estimere

- systemets orden n

- systemets utvidede observerbarhetsmatrise O_L
- systemets transisjonsmatrise A.

d) Anta at systemet er deterministisk slik at vi kan ta utgangspunkt i matriseligningen

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+g} \tag{18}$$

Sett at vi har beregnet R_{ij} sub-matrisen i QR-faktoriseringen

$$\begin{bmatrix} U_{J|L+g} \\ Y_{J|L} \\ Y_{J+1|L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

og der Q_i matrisene er orthogonale slik at $Q_1 Q_1^T = I$, $Q_2 Q_2^T = I$, $Q_3 Q_3^T = I$. Videre er $Q_1 Q_2^T = 0$, $Q_1 Q_3^T = 0$ og $Q_2 Q_3^T = 0$.

Du skal nå finne uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningen (15) som funksjon av R_{ij} sub-matrisen i QR-faktoriseringen over. Tips: uttrykk $U_{J|L+g}$, $Y_{J|L}$ og $Y_{J+1|L}$ ved (19) og sett inn i (18). Ettermultipliser deretter (multipliser fra høyre side) med Q_2^T.

Oppgave 4 (20%): Prediksjonsfeilmetoder

Anta at vi har en prosess

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k && (20)\\
y_k &= Dx_k + Eu_k + w_k && (21)
\end{aligned}
$$

Videre har vi oppgitt følgende Kalman-filter struktur for den optimale prediksjonen $\bar{y}_k$ av utgangen y_k, dvs.

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{k+1} &= (A - KD)\bar{x}_k + (B - KE)u_k + Ky_k, && (22)\\
\bar{y}_k &= D\bar{x}_k + Eu_k, && (23)
\end{aligned}
$$

a) Hva menes med parametervektor, θ. Gi ett eksempel på sammenhengen mellom θ og prediktoren i (22) og (23).

b) Hva menes med prediksjonsfeil, $\varepsilon_k(\theta)$.

c) Hva menes med prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi ett eksempel på ett slikt prediksjonsfeilkriterium.

d) Hvordan beregnes den optimale parametervektoren, θ^*, i en prediksjonsfeilmetode. Bare beskriv kort prinsippet.