Delprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering fredag 24. mars 2006 Tid: kl. 10.15 - 12.15

Delprøven består av: 2 oppgaver.
Prøven teller 30% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (20%): Underroms-identifikasjon

Gitt et system som kan beskrives med modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ce_k, \tag{1}$$

$$y_k = Dx_k + Eu_k + Fe_k \tag{2}$$

der e_k er hvit, $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = I$ og der følgende serie av utgangsdata og inngangsdata er kjent

$$\left.\begin{array}{c} y_k \\ u_k \end{array}\right\} \ \forall\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{3}$$

a) Basert på modellen i (1) og (2) med data som i (3) kan man utlede følgende matrisemodeller

$$Y_{J|L} = O_L X_J + H_L^d U_{J|L} + H_L^s E_{J|L}, \tag{4}$$

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} + \tilde{C}_L E_{J|L+1}, \tag{5}$$

der J og L er to spesifiserte heltall.

1. Oppgi strukturen på matrisene som inngår i ligningene for $N = 8$, $L = 2$, $J = 2$ og $g = 1$.
2. Oppgi en formel for antall kolonner, K, i datamatrisene som inngår i matriseligningene (4) og (5). Sjekk at denne stemmer med det antall kolonner du får i punkt 1. over.

b) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (4) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J|L} = O_L X_J^a \tag{6}$$

der data-matrisen $Z_{J|L}$ er kjent. Videre er det med utgangspunkt i matriseligningen (5) mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z_{J|L} \tag{7}$$

der data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ er kjente.

Finn uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningene (6) og (7) for følgende tre tilfeller:

- et autonomt system, dvs. der $u_k = 0$ og $e_k = 0$.
- et deterministisk system, dvs. der $e_k = 0$.
- et stokastisk system, dvs. der $u_k = 0$.

- et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system.

Merk: du skal definere projeksjonene som evt. inngår i uttrykkene for $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$. Dvs. projeksjoner av typen A/B og $B^{\perp}$ for to matriser A og B.

c) Vis hvordan

- systemets orden, n
- systemets utvidede observerbarhetsmatrise O_L
- systemmatrisene A og D

kan estimeres.

d) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (5) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z^d_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z^d_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} \tag{8}$$

der data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ er kjente.

1. Finn uttrykk for data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ i matrise-ligningen (8). Vi antar et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system.
2. Forklar hvordan B og E matrisene kan estimeres. Ta gjerne utgangspunkt i et gitt eksempel der $L = 2$.

Oppgave 2 (10%): Kalmanfilter

a) Gitt et kontinuerlig system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + v, & (9) \\ y &= Dx + w & (10) \end{aligned}$$

Sett opp strukturen på et Kalmanfilter som skal benyttes til å beregne et estimat, $\hat{x}$, av tilstandsvektoren x.

b) Gitt et diskret system

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k, & (11) \\ y_k &= Dx_k + w_k & (12) \end{aligned}$$

1. Sett opp strukturen på et Kalmanfilter på apriori-aposteriori form som skal benyttes til å beregne tilstandsestimatene, $\bar{x}$, og $\hat{x}$ av tilstandsvektoren x. Hvilket navn benyttes på henholdsvis $\bar{x}$, og $\hat{x}$. Benytt Kalmanfilterforsterkning K i denne formuleringen.
2. Sett opp strukturen på et Kalmanfilter på innovasjonsform som skal benyttes til å beregne et estimat, $\bar{x}$, av tilstandsvektoren x. Benytt Kalmanfilterforsterkning $\tilde{K}$ i denne formuleringen.
3. Finn en sammenheng mellom Kalmanfilterforsterkningen, $\tilde{K}$, i innovasjonsformuleringen i punkt 2. og Kalmanfilterforsterkningen, K, i apriori-aposteriori formuleringen i punkt 1.

c) Hvorfor er et Kalmanfilter en optimal minimum varians estimator. Begrunn svaret.