Sluttprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering tirsdag 30. mai 2006 Tid: kl. 9.00 - 12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Prøven teller 70% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (20%): Prediksjonsfeilmetoder

Et Kalmanfilter på innovasjonsform for et lineært dynamisk system er gitt ved

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + Ke_k, \tag{1}$$

$$y_k = D\bar{x}_k + Eu_k + e_k \tag{2}$$

der $\bar{x}_k$ er er prediktert tilstand og e_k er innovasjonsprosessen.

a) Sett opp et Kalmanfilter på prediksjonsform for beregning av prediktert måling, $\bar{y}_k$, av målingen y_k. Poenget er å bruke prediksjonsformuleringen i en prediksjonsfeilmetode for systemidentifikasjon. Tips: dette er en omskrivning av innovasjonsformuleringen over som er egnet til simulering/beregning av $\bar{y}_k$ basert på kjente data u_k og y_k.

b) Hva menes med en parametervektor, θ. Gi et eksempel på sammenhengen mellom θ og prediksjonsformuleringen av Kalmanfilteret for et system med $n = 2$ tilstander.

c) Definer begrepet prediksjonsfeil, ε_k, som en funksjon av y_k og $\bar{y}_k$.

d) Definer og besvar følgende:

- Hva menes med et prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi et eksempel på et slikt kriterium.
- Beskriv hvordan det optimale parameterestimatet, $\hat{\theta}_N$ kan beregnes.

Oppgave 2 (20%): Minste kvadraters metode og rekursiv systemidentifikasjon

a) Gitt et system

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k \tag{3}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Vis at vi kan sette opp en lineær regressjonsmodell av formen

$$y_k = \varphi_k^T \theta_0 \tag{5}$$

Definer spesielt variabelen φ_k og parametervektoren θ_0.

b)

- Basert på regressjonsmodellen i punkt a) over skal du sette opp en predktor, $\bar{y}_k(\theta)$, for målingen y_k.
- definer prediksjonsfeilen, ε_k.

c) Vi definerer følgende prediksjonsfeilkriterium

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^T \Lambda \varepsilon_k \tag{6}$$

der Λ er en spesifisert og symmetrisk vektmatrise.

Finn minste kvadraters metode estimatet (OLS), $\hat{\theta}_N$, for parametervektoren θ_0.

d) Vis hvordan du basert på OLS løsningen i punkt c) over kan utvikle en rekursiv minste kvadraters metode (ROLS) av formen

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t(y_t - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \tag{7}$$

Du skal finne ligninger for beregning av oppdateringsforsterkningen, K_t.

Oppgave 3 (15%): Lineær regressjon

Gitt den lineære modellen

$$Y = XB + E, \tag{8}$$

der X og Y er kjente datamatriser og E er en ukjent hvitsty matrise.

a) Fitt et uttrykk for minste kvadraters metode estimatet, B_{OLS}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.

b)

- **PCA** Vi antar at X har redusert rang og at vi derfor ikke kan benytte minste kvadraters metode estimatet funnet i punkt a) over. Vis hvordan vi kan benytte singulærverdidekomposisjon (SVD) til å faktorisere X og dermed finne antall prinsipale komponenter (rangen til X).
- **PCR** Benytt resultatene fra PCA analysen over til å finne et prinsipal komponent regressjon (PCR) estimat, B_{PCR}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.

c) Vi ønsker nå å finne et ”partial least squares” (PLS) estimat av B. Sett opp et uttrykk for PLS estimatet, B_{PLS}.

Oppgave 4 (15%): Kalmanfilter og underromsbasert systemidentifikasjon

a) Gitt et system

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k, \tag{9}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \tag{10}$$

der v_k er hvit prosessstøy og w_k er hvit målestøy.

Sett opp et kalmanfilter på apriori-aposteriori form for estimering av systemets tilstandsvektor, x_k.

b) I dette delpunktet og neste antar vi kjente inngangs og utgangsdata

$$\left.\begin{array}{c} u_k \\ y_k \end{array}\right\} \;\forall\; k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11}$$

Ut i fra en deterministisk tilstandsrommodell

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{12}$$
$$y_k = Dx_k, \tag{13}$$

er det mulig å sette opp en matriseligning

$$Y_{0|L} = O_L X_0 + H_L^d U_{0|L-1}. \tag{14}$$

- Beskriv kort strukturen på matrisene som inngår i matriseligningen.
- Beskriv hvordan systemets orden, n, og systemets observerbarhetsmatrise, O_L, kan estimeres ut i fra en projeksjonsdatamatrise, $Z_{J|L}$.

c) Gitt et Kalmanfilter på innovasjonsform

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ke_k, \tag{15}$$
$$y_k = Dx_k + e_k \tag{16}$$

Dersom $J \to \infty$ kan man vise at

$$X_J / \begin{bmatrix} U_{0|J} \\ Y_{0|J} \end{bmatrix} = X_J. \tag{17}$$

Videre har vi fra (16) at

$$Y_{J|1} = DX_J + E_{J|1}. \tag{18}$$

Vis hvordan matrisen, $E_{J|1}$, av innovasjonsprosessene e_k, dvs.

$$E_{J|1} = \begin{bmatrix} e_J & e_{J+1} & \cdots & e_{N-1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

kan estimeres som funksjon av datamatrisene $Y_{J|1}$, $U_{0|J}$ og $Y_{0|J}$.

Ps1: denne algoritmen virker i åpen såvel som i lukket sløyfe.

Ps2: Når innovasjonsprosessen, e_k, er kjent i Kalmanfilteret (15) og (16) står vi igjen med et enkelt deterministisk identifikasjonsproblem for systemmatrisene A, B, K og D.