EKSAMEN
A3894 AVANSERT REGULERINGSTEKNIKK
MANDAG 3. DESEMBER 2000
Tid: kl. 9.00 - 13.00

Klasse: 2PA
Eksamensoppgaven består av: 5 sider, 4 oppgaver, 1 vedlegg
Tillatte hjelpemidler: vedheftet vedlegg

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, 35 51 15 40

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (40%)
(Diskret LQ optimalregulering med integralvirkning)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en modell av formen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v, & (1)\\ y_k &= Dx_k + w, & (2) \end{aligned}$$

der v og w er konstante og ukjente forstyrrelser.
Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å designe en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}((y_k - r)^T Q (y_k - r) + \Delta u_k^T P \Delta u_k). \tag{3}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ og r er en konstant referansevektor. Q og P er symmetriske og positiv semidefinite matriser.

a) Vis at det er mulig å skrive modellen i (1) og (2) på endringsformen

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1} &= A\Delta x_k + B\Delta u_k, & (4)\\ \Delta y_k &= D\Delta x_k, & (5) \end{aligned}$$

der

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \ \Delta u_k = u_k - u_{k-1},\ \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}. \tag{6}$$

Hva er hensikten med dette ?

b) For å løse optimalreguleringsproblemet over så er det hensiktsmessig å skrive tilstandsrommodellen på en form som sammen med kriteriet i (3) danner et "standard LQ-optimalreguleringsproblem". Vis at modellen i (1) og (2) kan skrives på formen

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\Delta u_k, & (7)\\ \tilde{y}_k &= \tilde{D}\tilde{x}_k, & (8) \end{aligned}$$

der

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix},\ \ \tilde{y}_k = y_k - r. \tag{9}$$

Du skal oppgi uttrykk for matrisene $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ og $\tilde{D}$. Merk: du kan her med fordel benytte modellen i (4) og (5).

c) Modellen vi kom frem til i punkt 1b) og kriteriet i (3) danner et standard diskret LQ optimalreguleringsproblem av formen

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k, & (10)\\ \tilde{y}_k &= \tilde{D}\tilde{x}_k, & (11) \end{aligned}$$

med optimalkriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}(\tilde{y}_k^T Q \tilde{y}_k + \tilde{u}_k^T P \tilde{u}_k), \tag{12}$$

der vi for enkelthetsskyld har definert

$$\tilde{u}_k = \Delta u_k. \tag{13}$$

Utled eller sett opp den LQ optimale løsningen av formen

$$\tilde{u}_k = \tilde{G}\tilde{x}_k. \tag{14}$$

Løsningen består av en diskret Riccati ligning og et uttrykk for regulatormatrisen $\tilde{G}$. Sett deretter opp et utrykk for det aktuelle pådraget av formen

$$u_k = f(\cdot) \tag{15}$$

som skal benyttes til å regulere prosessen.

d) En PI regulator kan i Laplace-planet skrives som

$$u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}(r - y). \tag{16}$$

1. Sett opp en kontinuerlig tidsplanbeskrivelse av PI regulatoren i (16).
2. Lag en diskret tidsplanbeskrivelse av PI-regulatoren. Du kan her benytte eksplisitt Eulers metode.
3. Skriv den diskrete PI-regulatoren på endringsform og sammenlign med LQ-optimalregulatoren i punkt 1c).

Oppgave 2 (30%)
(Kontinuerlig LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven studere et kontinuerlig LQ optimalreguleringsproblem. Et utgangspunkt er at vi har gitt en prosess som vi modellerer med en kontinuerlig tilstandsrommodell av formen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{17}$$

$$y = Dx, \tag{18}$$

med kjent initialtilstandsvektor $x(t_0)$.

a) Anta at vi har gitt en objektfunksjon

$$J = \frac{1}{2}y(t_1)^T S y(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y^T Q y + u^T P u) dt. \tag{19}$$

- Utled et uttrykk for det optimale pådraget $u(t)\ \forall\, t_0 \leq t \leq t_1$ for prosessen i (17) og (18) som minimaliserer objektfunksjonen (19).
- Hva blir minimumsverdien av kriteriet.

b) Anta nå at kriteriet i (19) modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (y^T Q y + u^T P u) dt. \tag{20}$$

- Sett opp et uttrykk for det optimale pådraget i dette tilfellet. Hva er spesielt med regulatoren i dette tilfellet sammenlignet med regulatoren i punkt 2a) ?
- Hvilket krav har vi til systemmatrisene A, B og D samt vektmatrisene Q og P for at det optimalregulerte systemet skal være garantert stabilt ?

c) Anta nå at kriteriet er gitt ved

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} ((r-y)^T Q (r-y) + u^T P u) dt. \tag{21}$$

Finn et uttrykk for det optimale pådraget u for prosessen i (17) og (18) som minimaliserer denne objektfunksjonen (21).

Oppgave 3 (15%)
(Multivariabel frekvensanalyse)

Gitt systemet beskrevet ved

$$y(s) = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & -\frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix}}^{H(s)} u(s) \tag{22}$$

a) Bestem systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.

b) Bestem systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

c) Anta nå at vi har en tilstandsrommodell

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{23}$$

$$y = Dx + Eu. \tag{24}$$

Forklar hvordan vi kan beregne systemets transmisjonsnullpunkter ved den generaliserte egenverdimetoden.

Oppgave 4 (15%)
(Diverse spørsmål)

a) Gitt et kontinuerlig system

$$\dot{x} = A_c x + B_c u. \tag{25}$$

Sett opp et uttrykk for en eksakt diskret tilstandsrommodell av formen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{26}$$

der vi antar at pådraget u er konstant over samplingsintervallet Δt.

b) Hva menes med begrepet kontinuerlig optimal regulator- og estimator-dualitet ?

c) Hva menes med separasjonsteoremet ?

d) Anta et SISO system med en tilstand

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{27}$$

$$y = x, \tag{28}$$

og et LQ kriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (qy^2 + pu^2)dt, \tag{29}$$

der q og p er skalare vekter. Anta at tidskonstanten til det optimalregulerte (lukkede) systemet spesifiseres til å være $T = -\frac{1}{\lambda}$ der λ er den tilhørende spesifiserte egenverdien til det regulerte systemet. Finn den vekt q som medfører at det lukkede systemet får tifskonstanten T. Tips: vekten q blir en funksjon av T, a, b og p.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) & (30) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt & (31) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f & (32) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} & (33) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} & (34) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) & (35) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) & (36) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) & (37) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} & (38) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} & (39) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T & (40) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x & (41) \end{aligned}$$