Eksamen i fag PA3894
Avansert reguleringsteknikk
mandag 2. desember 2002

Emnedelen består av: 4 oppgaver. Det er 5 sider i eksamenssettet.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (25%): Optimalregulering

a) Anta en prosessmodell gitt ved

$$y(s) = h_p(s)u(s), \tag{1}$$

der

$$h_p(s) = k\frac{e^{-\tau s}}{1+Ts}. \tag{2}$$

Benytt approksimasjonen

$$e^{-\tau s} \approx 1 - \tau s \tag{3}$$

og vis at denne modellen er ekvivalent med en tilstandsrommodell av formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, && (4) \\ y &= Dx + Eu, && (5) \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{T}, \quad B = \frac{k}{T}(1+\frac{\tau}{T}) && (6) \\ D &= 1, \qquad E = -\frac{k\tau}{T}. && (7) \end{aligned}$$

b) Anta at vi ønsker en LQ-optimalregulator for prosessen i punkt a) over. Augmenter tilstandsrommodellen (4) og (5) med en integratortilstand

$$\dot{z} = r - y \tag{8}$$

for å oppnå integralvirkning i den resulterende regulatoren og sett opp en augmentert modell av formen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, && (9) \\ y &= \tilde{D}\tilde{x} + Eu, && (10) \end{aligned}$$

der vi har satt $r = 0$ for enkelthets skyld.

c) Gitt et system modellert med tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{11}$$

Gitt et LQ-optimalkriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + u^T P u)dt \tag{12}$$

Benytt maksimumsprinsippet og finn det optimale pådraget, u^*, som minimaliserer kriteriet (12) med modellen (11) som bibetingelse. Løsningen skal bestå av en formel for u^* og en Riccati-ligning.

d) Gitt et system modellert med tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{13}$$
$$y = Dx + Eu. \tag{14}$$

Anta nå at LQ-optimalkriteriet modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y^T Q_y y + u^T P u)dt \tag{15}$$

Benytt maksimumsprinsippet og finn det optimale pådraget, u^*, som minimaliserer kriteriet (15) med modellen (13) og (14) som bibetingelse. Løsningen skal bestå av en formel for u^* og en Riccati-ligning.

e) En PI-regulator kan i Laplace-planet utrykkes ved

$$u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}(r - y) \tag{16}$$

- Formuler en tilstandsrommodell for PI-regulatoren.
- Forsøk å gi en sammenligning av LQ-regulatoren funnet i punkt 1c) og PI-regulatoren.

Oppgave 2 (25%): Prediktiv regulering

Anta en prosess gitt ved

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + v, \tag{17}$$
$$y_k = x_k + w, \tag{18}$$

der v er en konstant og ukjent prosessforstyrrelse og w er en konstant og ukjent målestøy. Vi antar at modellparametrene (a, b) er kjente.

a) Forklar kort hva som menes med modell basert prediktiv regulering (MPC). Hva er sammenhengen mellom MPC og optimalregulering?

b) Anta en prediksjonshorisont, $L = 1$, og sett opp en prediksjonsmodell av formen

$$y_{k+1} = p_1^\Delta + F_1^\Delta \Delta u_k, \tag{19}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$.

Sett opp uttrykk for p_1^Δ og F_1^Δ. Merk at vi er ute etter en prediksjonsmodell som er uavhengig av de konstante og ukjente forstyrrelsene v og w.

c) Sett opp en passende lineær-kvadratisk kostfunksjon (kriterie/objekt-funksjon), J_k, for syntese av en MPC regulator med utgangspunkt i prediksjonsmodellen og prediksjonshorisonten i oppgave 2*b*). Anta at bare Δu_k og $y_{k+1} - r_{k+1}$ vektes i kostfunksjonen.

d) Beregn den optimale MPC pådragsendringen, Δu_k^*, for det tilfelle at vi ikke har begrensninger. Prediksjonsmodellen og kostfunksjonen er som gitt i oppgave 2*b*) og 2*c*). Hvilket MPC pådrag, u_k^*, vil det være rimelig å påtrykke prosessen ?

e) Kan du si noe om de statiske egenskapene til et system regulert med MPC regulatoren over ? Du kan anta at det regulerte systemet er stabilt.

Oppgave 3 (25%): diskret optimalregulering med følging

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Cr_k, \quad (20)$$

$$y_k = Dx_k. \quad (21)$$

Gitt et lineær kvadratisk (LQ) kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2}(r_N - y_N)^T S_N (r_N - y_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[(r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k) + u_k^T P_k u_k], \quad (22)$$

der $S_N \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vektmatriser og r_k er en kjent referansevektor for utgangsvektoren y_k.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (22). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k^*.
2. En Riccati ligning og en differens ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen og differens ligningen.

b) Gi et motiv for å ha med leddet Cr_k i tilstandsligningen (20).

c) Anta nå at vi ønsker å vektlegge pådragsendringen $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ i LQ-kriteriet, dvs. at kriteriet modifiseres til

$$J_i = \frac{1}{2}(r_N - y_N)^T S_N (r_N - y_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[(r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k) + \Delta u_k^T \mathcal{R}_k \Delta u_k], \quad (23)$$

der $\mathcal{R}_k$ er en vektmatrise for pådragsendringen Δu_k. Anta at vi ønsker en optimal reguleringsstruktur som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (23), med prosessmodellen (20) og (21) som bibetingelse.

1. Beskriv hvordan vi kan benytte resultatene i punkt a) til å finne den LQ-optimale pådragsendringen Δu_k^* for dette problemet.
2. Hvilket pådrag, u_k^*, er det da rimelig å påtrykke prosessen ?

Oppgave 4 (25%): Optimalregulering

a) Gi en definisjon av styrbarhetsgramianmatrisen og beskriv hva man benytter denne til.

b) Hva menes med detekterbarhet ?

c) Hva menes med begrepet stabiliserbarhet ?

d) Hva menes med separasjonsteoremet ?

e) Hva menes med estimator-regulator dualitet ?

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,u,t) && (24)\\
J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (25)
\end{aligned}
$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$
\begin{aligned}
H &= L + p^T f && (26)\\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (27)\\
p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (28)
\end{aligned}
$$

Diskret optimalregulering

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - x_k &= f(x_k,u_k,k) && (29)\\
J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k,u_k,k) && (30)
\end{aligned}
$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$
\begin{aligned}
H_k &= L(x_k,u_k,k) + p_{k+1}^T(x_{k+1}-x_k) && (31)\\
p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (32)\\
p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (33)
\end{aligned}
$$

Derivasjonsregler

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (34)\\
\frac{\partial}{\partial x}(x^TQx) &= Qx + Q^Tx && (35)
\end{aligned}
$$