

Master study
Systems and Control Engineering
Department of Technology
Telemark University College
DDiR, August 30, 2010

SCEV3006 Advanced Control with Implementation

Exercise 2b

Task 1

Pole polynomial and system poles

The pole polynomial is given by the least common denominator for all sub determinants of all orders of the system transfer matrix. We note that the system has $r = 2$ inputs and $m = 3$ outputs. The system transfer matrix $H(s)$ has therefore the maximal rank $r_H = 2$. For this system we have both 1st order and 2nd order sub determinants. The sub determinants of 1st order is identic with the six elements in the transfer matrix. Furthermore, we have three 2nd order sub determinants. These are as follows

$$H_{1,2}^1(s) = \frac{2s^2 - s - 8 + s^2 + s - 4}{(s^2 + 3s + 2)^2} = \frac{3(s+2)(s-2)}{(s+2)^2(s+1)^2} = \frac{3(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}, \quad (1)$$

$$H_{1,3}^2(s) = \frac{2s - 4 + s - 2}{(s^2 + 3s + 2)(s+1)} = \frac{3(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}, \quad (2)$$

$$H_{2,3}^3(s) = \frac{(s^2 + s - 4)(2s - 4) - (s - 2)(2s^2 - s - 8)}{(s^2 + 3s + 2)(s+1)} = \frac{3s(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}. \quad (3)$$

Note that super script 1, 2 and 3 in the notations $H_{1,2}^1(s)$, $H_{1,3}^2(s)$ and $H_{2,3}^3(s)$ denotes sub determinant one, two and three. Sub script (1, 2) means that sub determinant $H_{1,2}^1(s)$ is computed from the sub matrix formed by using row one and row two in the transfer matrix. Sub script (1, 3) means that sub determinant $H_{1,3}^1(s)$ is computed from the sub matrix formed by using row one and row three in the transfer matrix. Sub script (2, 3) means that sub determinant $H_{2,3}^1(s)$ is computed from the sub matrix formed by using row two and row three in the transfer matrix.

We construct a common denominator from the 1st and the 2nd order determinants. This gives the pole polynomial:

$$\pi(s) = (s+1)^2(s+2). \quad (4)$$

The system poles are then given by the solution of $\pi(s) = 0$, i.e., the system have three poles $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ og $s_3 = -2$.

Zero polynomial and system zeroes

The zero polynomial is found as the largest common numerator (divisor) to all sub determinants of order equal to the natural rank, $r_H = \min(m, r)$, of the transfer matrix $H(s)$, in this case the sub determinants of 2nd order, supposed they are justified such that they have the pole polynomial as denominator. As we see, the sub determinants $H_{1,2}^1(s)$, $H_{1,3}^2(s)$ and $H_{2,3}^3(s)$ have the pole polynomial $\pi(s)$ as denominator. The zero polynomial is therefore given by

$$\rho(s) = s - 2. \quad (5)$$

The system have one transmission zero at $s_0 = 2$ which is given by $\rho(s) = 0$. We note that system is a non-minimum-phase system.

Oppgave 2

Determinanten (av 2. orden) til transfermatrisen er gitt ved

$$\det(H(s)) = \frac{-s^2(s+1)^2 + s^2(s+1)^4}{(s+1)^4(s+2)^4} = \frac{s^2(s+1)^2(-1 + (s+1)^2)}{(s+1)^4(s+2)^4} \quad (6)$$

$$= \frac{s^3(s+1)^2(s+2)}{(s+1)^4(s+2)^4} = \frac{s^3}{(s+1)^2(s+2)^3}. \quad (7)$$

Polynom og poler

Den største felles divisor (nevner polynom) for underdeterminantene av 1. orden (elementene i $H(s)$) og 2. ordens determinanten gir oss polynomet

$$\pi(s) = (s+1)^2(s+2)^3. \quad (8)$$

Systemets poler er gitt ved $\pi(s) = 0$, dvs. to poler $s_{1,2} = -1$ og tre poler $s_{3,4,5} = -2$.

Nullpunktspolynom og nullpunkter

Vi ser at 2. ordens determinanten over har polynomet som nevner. Nullpunktspolynomet er derfor gitt som

$$\rho(s) = s^3. \quad (9)$$

Systemet har derfor tre nullpunkter i origo, dvs. $s_{1,2,3}^0 = 0$.

Oppgave 3

Vi definerer systemmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

samt den “generaliserte” identitetsmatrisen

$$I_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Systemets nullpunkter er gitt av de endelige (generaliserte) egenverdiene til følgende generaliserte egenvektor-egenverdi problem

$$SM = I_g M \Lambda. \quad (12)$$

Dette problemet inneholder tre generaliserte egenvektorer m_1 , m_2 og m_3 . Disse er kolonner i egenvektormatrisen $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$. Λ er en diagonalmatrise med de generaliserte egenverdiene λ_1 , λ_2 og λ_3 på diagonalen. Merk at egenverdiene kan være komplekse så vel som av uendelig størrelse.

Vi definerer

$$m_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Vi har følgende problem

$$S m_1 = I_g m_1 \lambda_1 \quad (14)$$

for bestemmelse av m_1 og λ_1 . Dette gir

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} \lambda_1 \quad (15)$$

Dette gir

$$-m_{11} + m_{21} + 2m_{31} = m_{11} \lambda_1, \quad (16)$$

$$m_{11} - m_{21} = 0, \quad (17)$$

$$2m_{11} - m_{31} = 0. \quad (18)$$

De to siste ligningene gir at $m_{31} = 2m_{11}$ og $m_{21} = m_{11}$. Innsetter vi dette i den første ligningen får vi at

$$-m_{11} + m_{11} + 4m_{11} = m_{11} \lambda_1. \quad (19)$$

Denne må gjelde for alle m_{11} forskjellig fra null. Følgelig er $\lambda_1 = 4$.

Systemet har derfor et nullpunkt for $s = 4$.

Det kan vises at dette systemet bare har et nullpunkt. Vi konsentrerer oss derfor bare om å finne den ene generaliserte egenverdien svarende til den av endelig størrelse, dvs. λ_1 . Merk at det generaliserte egenverdiproblemet over i tillegg har to generaliserte egenverdier av uendelig størrelse, dvs. $\lambda_2 = \infty$ og $\lambda_3 = \infty$.

Oppgave 4

Systemet har et nullpunkt for

$$s_0 = -\frac{e+1}{e}. \quad (20)$$

Systemet har et nullpunkt for alle $e \neq 0$. Dette kan vi for eksempel finne fra systemets transferfunksjon

$$h(s) = \frac{es + e + 1}{s + 1}. \quad (21)$$

Systemet er ikke-minimum-fase for alle $0 < e < 1$. Systemet har et nullpunkt $s = s_0$ i høyre halvplan i dette tilfellet.

Oppgave 5

- a) Transfermatrisen $H(s)$ er en $m \times r$ matrise der $m = 3$ og $r = 2$ i dette tilfellet. Systemet har $r = 2$ pådrag og $m = 3$ utganger. Rangene til $H(s)$ kan derfor bli maksimalt $\min(m,r) = 2$. Dette betegnes ofte for den naturlige rangen til $H(s)$.

Merk at det kan eksistere verdier $s = z$ slik at $\text{rang}(H(z)) < \min(m,r)$. En slik verdi for s er definert som et *transmisjonsnullpunkt* for et multivariabelt system. Normalt sier vi bare *nullpunkt* også for multivariable systemer.

- b) Systemet har et nullpunkt $z = 2$. Vi har at

$$H(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

- c) Vi ser at $\text{rang}(H(2)) = 1$ fordi kolonne en i $H(2)$ er lik kolonne to.

- d) En Singulær Verdi Dekomposisjon (SVD) av $H(2)$ er gitt ved

$$H(2) = USV^T = \sum_{i=1}^{\min(m,r)} u_i s_i v_i^T = u_1 s_1 v_1^T + u_2 s_2 v_2^T, \quad (23)$$

der

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2635 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

og

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Vi kan finne u_z som den høyre singularvektoren som svarer til den singularverdi som er identisk lik null. I dette tilfellet blir dette $u_z = v_2$ der v_2 er kolonne to i V der $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$. Dette gir

$$u_z = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Et slikt pådrag vil resultere i at $y = Gu_z = 0$.

Dette kan vi vise ved å postmultiplisere ligning (23), dvs. $H(2) = u_1 s_1 v_1^T + u_2 s_2 v_2^T$ med $u_z = v_2$. Dette gir

$$H(2)v_2 = u_1 s_1 v_1^T v_2 + u_2 s_2 v_2^T v_2, \quad (28)$$

og benytte at V er en ortogonal matrise, dvs. slik at $V^T V = I$, $v_1^T v_2 = 0$ og $v_2^T v_2 = 1$. Vi har da at

$$H(2)v_2 = u_2 s_2. \quad (29)$$

Nå er $s_2 = 0$. $u_z = v_2$ er derfor det søkte pådraget.

Merk: Vi har $\min(m, r) = 2$ singularverdier, dvs. $s_1 = 0.2635$ og $s_2 = 0$. Verdien av disse er identisk med diagonalelementene til S . Vi ser av dette at $\text{rang}(H(z)) = 1$ fordi det bare er en singularverdi som er forskjellig fra null.