Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolene i Telemark
DDiR, 11. september 1998

Avansert reguleringsteknikk

Løsningsforslag til øving 2b

Oppgave 1

Polpolynom og poler

Polpolynomet er gitt som den minste felles nevner til alle underdeterminanter av alle ordner til systemets transfermatrise. Vi legger merke til at systemet har to innganger (pådrag) og tre utganger (målinger). Den maksimale rangen til transfermatrisen er derfor to. For dette systemet har vi derfor 1. ordens og 2. ordens underdeterminanter. Underdeterminantene av 1. orden er identisk med elementene i transfermatrisen. Det er videre tre 2. ordens underdeterminanter. Disse blir som følger.

$$H^1_{1,2}(s) = \frac{2s^2 - s - 8 + s^2 + s - 4}{(s^2 + 3s + 2)^2} = \frac{3(s+2)(s-2)}{(s+2)^2(s+1)^2} = \frac{3(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}, \quad (1)$$

$$H^2_{1,3}(s) = \frac{2s - 4 + s - 2}{(s^2 + 3s + 2)(s+1)} = \frac{3(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}, \quad (2)$$

$$H^3_{2,3}(s) = \frac{(s^2 + s - 4)(2s - 4) - (s-2)(2s^2 - s - 8)}{(s^2 + 3s + 2)(s+1)} = \frac{3s(s-2)}{(s+2)(s+1)^2}. \quad (3)$$

Merk at superskrift 1, 2 og 3 i notasjonen $H^1_{1,2}(s)$, $H^2_{1,3}(s)$ og $H^3_{2,3}(s)$ betegner underdeterminant en, to og tre. Subskrift $(1,2)$ betegner at underdeterminanten $H^1_{1,2}(s)$ er dannet av rekke en og rekke to i transfermatrisen. Subskrift $(1,3)$ betegner at underdeterminanten $H^2_{1,3}(s)$ er dannet av rekke en og rekke tre i transfermatrisen. Subskrift $(2,3)$ betegner at underdeterminanten $H^3_{2,3}(s)$ er dannet av rekke to og rekke tre i transfermatrisen.
Vi lager en fellesnevner ut i fra 1. og 2. ordens underdeterminantene. Dette gir polpolynomet

$$\pi(s) = (s+1)^2(s+2). \quad (4)$$

Systemets poler er videre gitt som løsningene av $\pi(s) = 0$, dvs. systemet har tre poler $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ og $s_3 = -2$.

Nullpunktspolynom og nullpunkter

Nullpunktspolynomet finnes som den minste felles divisor (teller) til alle underdeterminanter av orden lik den naturlige rangen til transfermatrisen, i dette tilfellet underdeterminantene av 2. orden, forutsatt at disse er justert slik at de har polpolynomet som nevner.
Vi ser at underdeterminantene $H^1_{1,2}(s)$, $H^2_{1,3}(s)$ og $H^3_{2,3}(s)$ har polpolynomet som nevner. Videre har alle tre underdeterminanter et felles teller-polynom, nemlig $s-2$. Nullpunktspolynomet er derfor gitt som

$$\rho(s) = s - 2. \tag{5}$$

Systemet har derfor et transmisjonsnullpunkt $s_0 = 2$ som er gitt av $\rho(s) = 0$. Vi merker oss at systemet er ikke-minimum-fase.

Oppgave 2

Determinanten (av 2. orden) til transfermatrisen er gitt ved

$$\begin{aligned}
\det(H(s)) &= \frac{-s^2(s+1)^2 + s^2(s+1)^4}{(s+1)^4(s+2)^4} = \frac{s^2(s+1)^2(-1+(s+1)^2)}{(s+1)^4(s+2)^4} \quad (6)\\
&= \frac{s^3(s+1)^2(s+2)}{(s+1)^4(s+2)^4} = \frac{s^3}{(s+1)^2(s+2)^3}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Polpolynom og poler

Den største felles divisor (nevner polynom) for underdeterminantene av 1. orden (elementene i $H(s)$) og 2. ordens determinanten gir oss polpolynomet

$$\pi(s) = (s+1)^2(s+2)^3. \tag{8}$$

Systemets poler er gitt ved $\pi(s) = 0$, dvs. to poler $s_{1,2} = -1$ og tre poler $s_{3,4,5} = -2$.

Nullpunktspolynom og nullpunkter

Vi ser at 2. ordens determinanten over har polpolynomet som nevner. Nullpunktspolynomet er derfor gitt som

$$\rho(s) = s^3. \tag{9}$$

Systemet har derfor tre nullpunkter i origo, dvs. $s^0_{1,2,3} = 0$.

Oppgave 3

Vi definerer systemmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

samt den "generaliserte" identitetsmatrisen

$$I_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Systemets nullpunkter er gitt av de endelige (generaliserte) egenverdiene til følgende generaliserte egenvektor-egenverdi problem

$$SM = I_g M \Lambda. \tag{12}$$

Dette problemet inneholder tre generaliserte egenvektorer m_1, m_2 og m_3. Disse er kolonner i egenvektormatrisen $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$. Λ er en diagonalmatrise med de generaliserte egenverdiene λ_1, λ_2 og λ_3 på diagonalen. Merk at egenverdiene kan være komplekse så vel som av uendelig størrelse.
Vi definerer

$$m_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Vi har følgende problem

$$Sm_1 = I_g m_1 \lambda_1 \tag{14}$$

for bestemmelse av m_1 og λ_1. Dette gir

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} \lambda_1 \tag{15}$$

Dette gir

$$-m_{11} + m_{21} + 2m_{31} = m_{11}\lambda_1, \tag{16}$$

$$m_{11} - m_{21} = 0, \tag{17}$$

$$2m_{11} - m_{31} = 0. \tag{18}$$

De to siste ligningene gir at $m_{31} = 2m_{11}$ og $m_{21} = m_{11}$. Innsetter vi dette i den første ligningen får vi at

$$-m_{11} + m_{11} + 4m_{11} = m_{11}\lambda_1. \tag{19}$$

Denne må gjelde for alle m_{11} forskjellig fra null. Følgelig er $\lambda_1 = 4$.
Systemet har derfor et nullpunkt for $s = 4$.
Det kan vises at dette systemet bare har et nullpunkt. Vi konsentrerer oss derfor bare om å finne den ene generaliserte egenverdien svarende til den av endelig størrelse, dvs. λ_1. Merk at det generaliserte egenverdiproblemet over i tillegg har to generaliserte egenverdier av uendelig størrelse, dvs. $\lambda_2 = \infty$ og $\lambda_3 = \infty$.

Oppgave 4

Systemet har et nullpunkt for

$$s_0 = -\frac{e+1}{e}. \tag{20}$$

Systemet har et nullpunkt for alle $e \neq 0$. Dette kan vi for eksempel finne fra systemets transferfunksjon

$$h(s) = \frac{es+e+1}{s+1}. \tag{21}$$

Systemet er ikke-minimum-fase for alle $0 < e < 1$. Systemet har et nullpunkt $s = s_0$ i høyre halvplan i dette tilfellet.

Oppgave 5

a) Transfermatrisen $H(s)$ er en $m \times r$ matrise der $m = 3$ og $r = 2$ i dette tilfellet. Systemet har $r = 2$ pådrag og $m = 3$ utganger. Rangen til $H(s)$ kan derfor bli maksimalt min(m,r) = 2. Dette betegnes ofte for den naturlige rangen til $H(s)$.

   Merk at det kan eksistere verdier $s = z$ slik at $\text{rang}(H(z)) < \min(m, r)$. En slik verdi for s er definert som et *transmisjonsnullpunkt* for et multivariabelt system. Normalt sier vi bare *nullpunkt* også for multivariable systemer.

b) Systemet har et nullpunkt $z = 2$. Vi har at

$$H(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

c) Vi ser at $\text{rang}(H(2)) = 1$ fordi kolonne en i $H(2)$ er lik kolonne to.

d) En Singulær Verdi Dekomposisjon (SVD) av $H(2)$ er gitt ved

$$H(2) = USV^T = \sum_{i=1}^{\min(m,r)} u_i s_i v_i^T = u_1 s_1 v_1^T + u_2 s_2 v_2^T, \tag{23}$$

   der

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2635 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

og

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Vi kan finne u_z som den høyre singulærvektoren som svarer til den singulærverdi som er identisk lik null. I dette tilfellet blir dette $u_z = v_2$ der v_2 er kolonne to i V der $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$. Dette gir

$$u_z = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Et slikt pådrag vil resultere i at $y = Gu_z = 0$.

Dette kan vi vise ved å postmultiplisere ligning (23), dvs. $H(2) = u_1 s_1 v_1^T + u_2 s_2 v_2^T$ med $u_z = v_2$. Dette gir

$$H(2)v_2 = u_1 s_1 v_1^T v_2 + u_2 s_2 v_2^T v_2, \tag{28}$$

og benytte at V er en ortogonal matrise, dvs. slik at $V^T V = I$, $v_1^T v_2 = 0$ og $v_2^T v_2 = 1$. Vi har da at

$$H(2)v_2 = u_2 s_2. \tag{29}$$

Nå er $s_2 = 0$. $u_z = v_2$ er derfor det søkte pådraget.

Merk: Vi har $\min(m, r) = 2$ singulærverdier, dvs. $s_1 = 0.2635$ og $s_2 = 0$. Verdien av disse er identisk med diagonalelementene til S. Vi ser av dette at $\text{rang}(H(z)) = 1$ fordi det bare er en singulærverdi som er forskjellig fra null.