Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolene i Telemark
DDiR, 6. april 1995, revidert November 6, 2001

Avansert reguleringsteknikk

LØSNING 9

Oppgave 1

1. Kalmanfilteret kan settes opp ved å benytte dualitetsprinsippet mellom optimal LQ regulering og optimal minimum varians tilstandsestimering.

2. Riccatiligningen blir

$$2aX - d^2W^{-1}X^2 + V = 0 \tag{1}$$

der $V = q_0$ og $W = r_0$. Dette gir løsningen

$$X = \frac{ar_0}{d^2} + \sqrt{\frac{a^2r_0^2}{d^4} + \frac{q_0r_0}{d^2}} \tag{2}$$

Kalmanfilterforsterkningen blir

$$K = XD^TW^{-1} = \frac{1}{d}(a + \sqrt{a^2 + d^2\frac{q_0}{r_0}}) \tag{3}$$

Videre er filteret gitt ved differensialligningen

$$\dot{\hat{x}} = -\sqrt{a^2 + d^2\frac{q_0}{r_0}}\hat{x} + bu + Ky. \tag{4}$$

Vi ser at dynamikken til filteret blir raskere dersom forholdet $\frac{q_0}{r_0}$ øker. Det er altså dette forholdet som spiller inn når det gjelder filterets dynamikk. Merk også at vi i mange tilfeller kan betrakte dette forholdet som en tuningsfaktor. Dvs. slik at vi velger $\frac{q_0}{r_0}$ slik at vi får ønsket innsvingningshastighet på tilstandsestimatet $\hat{x}$.

3. I en LQG regulator benytter vi en LQ-optimal tilbakekoblingsmatrise, $G = -P^{-1}B^TR$, og tar tilbakekopling fra den estimerte tilstandsvektoren, $\hat{x}$. Dvs.

$$u = G\hat{x} \tag{5}$$

Oppgave 2

Gitt sytemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu + cv & (6) \\ y &= x + w & (7) \end{aligned}$$

Forstyrrelsen har ikke null middelverdi. Vi modellerer v med en integrator eksitert av hvit støy (dv).

$$\dot{v} = dv \tag{8}$$

Vi har følgende augmenterte modell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv & (9) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + w & (10) \end{aligned}$$

Vi ønsker å bestemme det kontinuerlige Kalman-filteret. Modellen er på formen

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + Cdv & (11) \\ y &= D\tilde{x} + w & (12) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige og stasjonære Kalman filteret er gitt ved

$$AX + XA^T - XD^TW^{-1}DX + CVC^T = 0 \tag{13}$$

$$K = XD^TW^{-1} \tag{14}$$

der W er kovariansen til målestøyen og V er kovariansen til prosesstøyen. Vi har

$$\begin{aligned} W &= r_0^2 & (15) \\ V &= q_0^2 & (16) \end{aligned}$$

Noe regning gir

$$\begin{bmatrix} 2(ax_{11} + cx_{21}) & ax_{21} + cx_{22} \\ ax_{21} + cx_{22} & 0 \end{bmatrix} - W^{-1} \begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{11}x_{21} \\ x_{11}x_{21} & x_{21}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

To av de tre ligningene er nødvendige for å bestemme x_{11} og x_{21}, dvs.

$$2(ax_{11} + cx_{21}) - W^{-1}x_{11}^2 = 0 \tag{18}$$

$$-W^{-1}x_{21}^2 + V = 0 \tag{19}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} x_{21} &= \sqrt{VW} & (20) \\ x_{11} &= \frac{a + \sqrt{(a^2 + 2cW^{-1}\sqrt{VW})}}{W^{-1}} & (21) \end{aligned}$$

Kalman-filter forsterkninges matrisen er gitt ved

$$K = XD^TW^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}W^{-1} \\ x_{21}W^{-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Dette gir

$$k_{11} = a + \sqrt{(a^2 + 2c\sqrt{\frac{V}{W}})} \tag{23}$$

$$k_{21} = \sqrt{\frac{V}{W}} \tag{24}$$

Vi kan også sette inn for variansene (V og W), dvs.

$$k_{11} = f + \sqrt{(f^2 + 2c\frac{q_0}{r_0})} \tag{25}$$

$$k_{21} = \frac{q_0}{r_0} \tag{26}$$

Vi ser at det er forholdet mellom standardavviket for prosess-støyen, q_0, (evnt. variansen V) og standardavviket for målestøyen, r_0, (evnt. variansen W) som bestemmer elementene i Kalman-filter forsterkningsmatrisen K. Vi ser at forsterkningen k_{21} øker når forholdet $\frac{q_0}{r_0}$ øker, dvs. at stor prosess-støy (stor varians) gir stor forsterkning, mens stor målestøy derimot gir liten forsterkning. Det siste følger av at når målingen blir mer usikker, vil vi legge mindre vekt på den, dvs. minske forsterkningen.
Selve filteret er gitt av ligningene

$$\dot{\hat{\hat{x}}} = A\hat{\hat{x}} + Bu + K(y - \hat{y}) \tag{27}$$

$$\hat{y} = D\hat{\hat{x}} \tag{28}$$

Vi er garantert stabilitet av estimatoren dersom forutsettningene fra LQ teorien er oppfyllt. Husk at estimeringsproblemet er dualt til reguleringsproblemet. Vi kan imidlertid sjekke egenverdienes plassering ved å analysere

$$\dot{\hat{\hat{x}}} = (A - KD)\hat{\hat{x}} + Bu + Ky \tag{29}$$

$$\hat{y} = D\hat{\hat{x}} \tag{30}$$

Dvs. filteret kan oppfattes som et separat system som er drevet av målingen y, og der systemets dynamikk er bestemmt av matrisen $A - KD$. Vi har

$$A - KD = \begin{bmatrix} f - k_{11} & c \\ -k_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Vi vil ikke gå mer detaljert inn på hvordan egenverdiene avhenger av V og W. Men vi kan konstatere at vi kan få flere frihetsgrader til å styre filterets dynamikk dersom vi hadde valgt følgende beskrivelse av systemet

$$\dot{x} = ax + bu + cv + dx \tag{32}$$

$$y = x + w \tag{33}$$

der dx er en (vanligvis ukjent) hvit prosess-støy med null middelverdi og varians V_x. dx kan betraktes som usikkerhet, f.eks. umodellerte effekter. Den augmenterte modellen blir da drevet av både dx og dv. Den agmenterte prosesstøyen får da kovariansmatrisen.

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_x & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \tag{34}$$

Vi har dermed fått en frihetsgrad til for å styre filterets dynamikk, nemlig V_x. Man kan nå sette (34) inn i ligning (17). Prosedyren for beregning av filterforsterknings matrisen blir den samme som over.

Det viktige er imidlertid at det er mulig å oppnå bedre estimater dersom vi antar at alle tilstandsvariable er beheftet med støy.

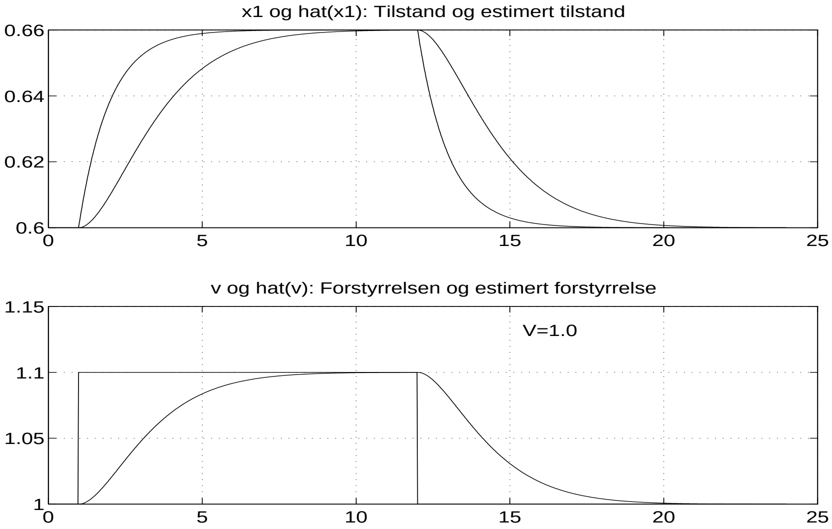

Figure 1: Simulerings-resultater med variansene $W = 1$ og $V = 1$. Se ellers matlab filen ov9s.m.

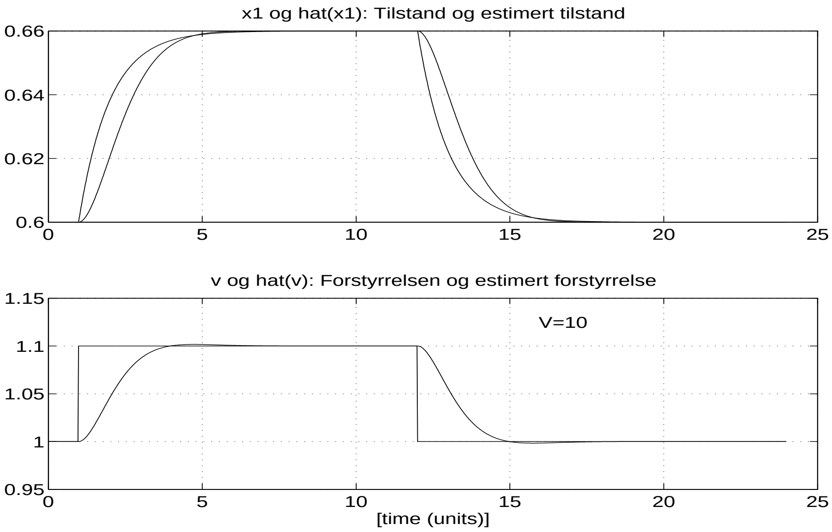

Figure 2: Simulerings-resultater med variansene $W = 1$ og $V = 10$. Se ellers matlab filen ov9s.m.

```
% OV9S.M %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Formaal                                                                        %
%  Script for oving 9 oppgave 2                                                   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=-1; b=0.5; d=1; c=0.6;                  % Prosessmodellen
W=1;                                      % Vekt"matrise" for maalestoeyen, W=E(w w')
V=10.0;                                   % Vekt "matrise" for stoeyen,     V=E(v v')
A=[a,c;0,0]; C=[0;1]; D=[1,0];            % Augmenterte systemmatriser
[l,x]=lqe(A,C,D,V,W);                     % Control system toolbox finksjon
k1=l(1,1);                                % Kalman forsterkning for estimering av x
k2=l(2,1);                                % Kalman forsterkning for estimering av v

at=[a,0,0;k1,a-k1,c;k2,-k2,0];            % Augmenter modell for simulering av
bt=[b;b;0];                               % system og estimator med feks. lsim.
ct=[c;0;0];
dt=eye(3);
et=zeros(3,2);

N=1200;                                   % Antall sampler
v=ones(N,1);                              % Simulerer med et sprang i forstyrrelsen
v(50:600,1)=v(50:600,1)+ones(551,1)*0.1;% Sprang ved sample 50
u=zeros(N,1);                             % Null paadrag, annet alternativ er randn(N,1)
t=0:N-1; t=t'/50;
x0=[0.6;0.6;1.0];                         % Initialverdier, stasjonaerverdier
y=lsim(at,[bt,ct],dt,et,[u,v],t,x0);      %Simulerer

subplot(211), plot(t,[y(:,1),y(:,2)])     % Plotter resultatene
grid
title('x1 og hat(x1): Tilstand og estimert tilstand')
```

```
subplot(212), plot(t,[y(:,3),v])
grid
title('v og hat(v): Forstyrrelsen og estimert forstyrrelse')
xlabel('[time (units)]')
```