Sivilingeniørutdanningen i prosessautomatisering
Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolene i Telemark
DDiR, 21. mars 1995, revidert November 6, 2001

Avansert reguleringsteknikk

Øving 9 (LQG, regulering og estimering)

Oppgave 1

Gitt et SISO en tilstand system beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = ax + bu + v \tag{1}$$
$$y = x + w \tag{2}$$

der x er systemets indre tilstand, y er målingen, v er (ukorrelert) hvit prosess støy med null middelverdi og gitt kovarians, w er (ukorrelert) hvit måle støy med null middelverdi og gitt kovarians. Dvs.

$$E(v(t)) = 0 \quad \text{og} \quad E(v(t)v^T(t+\tau)) = q_0^2\delta(\tau) \tag{3}$$
$$E(w(t)) = 0 \quad \text{og} \quad E(w(t)w^T(t+\tau)) = r_0^2\delta(\tau) \tag{4}$$

der

$$\delta(\tau) = 1 \quad \text{for} \quad \tau = 0 \tag{5}$$
$$\delta(\tau) = 0 \quad \text{for} \quad \tau \neq 0 \tag{6}$$

Merknader
q_0^2 er kovariansen til støyprosessen v mens q_0 er standardavviket. Dvs. standardavviket er kvadratroten av kovariansen. Dersom v er en vektor av støy prosesser vil kovariansen bli en matrise ($E(v(t)v^T(t)) = V$). Denne matrisen vil bli positiv definit ($V > 0$), forutsatt at enkelte støyprosesser i vektoren v ikke er identisk lik null. I så fall vil kovariansmatrisen V bli positiv semidefinit ($V \geq 0$). Kovarians matrisen kan Cholesky faktoriseres dersom $V > 0$, dvs. $V = V_0 V_0^T$ der V_0 er en øvre triangulær matrise. Dette kalles også (litt upresist) for kvadratrotfaktorisering. Standardavviket til de enkelte støyprosessene i vektoren v er nå gitt som kvadratroten av diagonalelementene i kovariansmatrisen V. Diagonalelement v_{ii} i matrisen V er variansene til støyprosessen v_i, der v_i er element i i vektoren v. Antar vi at v er gitt for et sett av N diskrete tidspunkt kan kovariansmatrisen beregnes/estimeres slik

$$V = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} v_t v_t^T \quad \text{(biased estimate)} \tag{7}$$

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} v_t v_t^T \quad \text{(unbiased estimate)} \tag{8}$$

1. Bestem en optimal estimator, Kalman filter, for systemet. Benytt dualitetsprinsippet og komenter sammenhengen med LQ optimal regulering.

2. Diskuter løsningen som funksjon av standardavikene q_0 og r_0.

3. Anta at vi ønsker en LQG regulator. Beskriv prinsippet for denne.

Oppgave 2

Gitt et SISO en tilstand system beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = ax + bu + cv \tag{9}$$

$$y = x + w \tag{10}$$

Modellen er den samme som i oppgave 1 men prosesstøyen har ikke lenger middelverdi lik null. Dvs.

$$E(v) = \bar{v} \tag{11}$$

1. Anta at støyen v er langsomt varierende. Støyen kan da modelleres som en såkalt *random walk*, dvs.

   $$v_{t+1} = v_t + \Delta t dv \quad \text{diskret støymodell} \tag{12}$$

   $$\dot{v} = dv \quad \text{kontinuerlig støymodell} \tag{13}$$

   der Δt er samplingstid. Merk at den diskrete modellen fremkommer ved Euler diskretisering av den kontinuerlige. dv er en hvitstøy prosess med null middelverdi og gitt kovarians q_0^2. Augmenter den kontinuerlige støymodellen med prosessmodellen med tanke på design av en optimal estimator.

2. Bestem en optimal estimator, Kalman filter, for systemet (augmentert system). Benytt uendelig tidshorisont (stasjonært Kalman filter.) (Benytt gjerne *MATLAB* og funksjonen **lqe**, passende tallverdier kan da være $a = -1$, $b = 0.5$, $c = 0.6$, $r_0 = 1$ og $0.01 \leq q_0 \leq 10$, simuler systemet og estimatoren med funksjonen **dlsim** eller **dsrsim**.)