Bokmål

Kartlegging av matematikkforståelse

Matematikk på småskoletrinnet

Utdanningsdirektoratet

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Bjørnar Alseth

Matematikk
på
småskoletrinnet

Trykk: GAN Grafisk AS

ISBN 82-7726-508-5

FORORD

Dette veiledningsheftet er skrevet av høgskolelektor Bjørnar Alseth ved Telemarksforsking-Notodden som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling ved Universitetet i Oslo.

I tillegg til dette veiledningsheftet er det tidligere utviklet veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innenfor områdene:

- *Tall og tallregning*
- *Funksjoner*

Det er også utviklet et hefte, *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som diskuterer matematisk kompetanse og arbeidsmåter i faget. Alle heftene er tilgjengelige fra Nasjonalt læremiddelsenter.

Veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innen områdene *Algebra* og *Måling og enheter* er under utarbeiding. Likeledes har et arbeid med veiledningshefte for *Tall og tallregning for videregående opplæring* startet.

En undersøkelse av elevers tanker om matematikkfaget og deres holdninger til undervisningen i faget er gjennomført. Et veiledningshefte knyttet til dette temaet er under utarbeiding.

INNHOLD

INNLEDNING

Dette veiledningsheftet om matematikk på småskoletrinnet, som er produsert innen KIM-prosjektet, skiller seg ut fra de tidligere heftene fra prosjektet. Dette heftet er ikke basert på en diskusjon av viktige faglige problemer med bakgrunn i innsamlede data om elevprestasjoner. Heftet baserer seg på utprøving av læringsaktiviteter knyttet til prosjektet og på erfaringer fra klasseromsforskning i mange land knyttet til den første matematikkopplæringen.

Hensikten med heftet er å presentere og diskutere viktige sider ved den faglige utviklingen hos elever på småskoletrinnet innen faglige emner i matematikk. De utvalgte emnene er sentrale i læreplanen L97. Det blir fokusert både på hva det vil si å kunne matematikk på dette alderstrinnet, og på forskjellige måter matematikken kan møtes på. Dette blir vist gjennom illustrasjoner av konkrete aktiviteter som sikter mot bestemte læringselementer.

Heftet er ment som noe mer enn en samling av «gode» aktiviteter som elevene kan arbeide med. Derfor blir det lagt vekt på å knytte aktivitetene til en teoretisk bakgrunn som kan løfte oppmerksomheten fra de enkelte eksemplene. Ved å knytte praktiske aktiviteter til teoretiske betraktninger vil heftet kunne være med på å danne en gjennomtenkt holdning til faglige og didaktiske utfordringer som ligger i det å undervise i matematikk i de første årene i skolen.

Del 1 gir et læringsteoretisk grunnlag for undervisning og læring i matematikk. Denne delen er skrevet slik at leseren gjennom eksempler kan få innblikk i viktige elementer ved dette grunnlaget.

I del 2 er de ulike delene av faginnholdet i de første årene i skolen presentert mer utførlig med vekt på elevers oppfatninger av matematiske begreper og på hvordan disse oppfatningene utvikles. Det er mulig å lese del 2 før del 1, men betydningen av å ha et teoretisk fundament når en står overfor valg i undervisningen, understrekes. På den måten kan en «parallell lesning» av de to delene være aktuell.

DEL 1 LÆRINGSTEORETISK GRUNNLAG

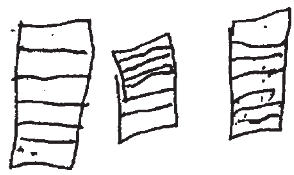
1 Hvorfor trenger vi læringsteori?

I begynneropplæringen i matematikk bruker man gjerne det første halvåret av første klasse til å introdusere tallene opp til ti. Dette gjøres ofte ved at elevene arbeider med mange forskjellige aktiviteter hvor tallene fra en til ti inngår. Det vil ofte dreie seg om arbeid med oppgaver i ei arbeidsbok, som det å skrive lange rekker av de forskjellige tallsymbolene, å telle opp forskjellig antall objekter og å utføre forskjellige addisjons- og subtraksjonsstykker.

- Hvorfor starter matematikkundervisningen på denne måten?
- Hva er det elevene lærer av en slik undervisning?

Her ser du hvordan ei jente på 7 år løste denne tekstoppgaven:

Kristian har 3 tyggegummipakker med 6 tyggegummier i hver pakke. Hvor mange tyggegummier har han?



Hun tegnet altså de tre pakkene med 6 tyggegummier i hver. Deretter telte hun seg fram til svaret.

I en klasse med 14-åringer, som jeg var lærer for, klarte kun 2 av 25 elever denne oppgaven:

En kilo kjøttdeig koster 87,50 kr/kg. En mann kjøper 0,78 kg. Hvor mye må han betale?

- Hvordan kan det ha seg at ei jente på 8 år svarer riktig på en multiplikasjonsoppgave mens nesten ingen av 14-åringene svarer riktig på en annen?

Mange lærere har opplevd at elevene liker å arbeide med arbeidsbøkene når de begynner på skolen. Men så etter noen års skolegang synes de ikke det er like morsomt lenger. Undersøkelser viser at i 5.-6. klasse begynner ganske mange elever å mislike matematikkfaget.

- Hvorfor liker elever i første klasse å arbeide med lærebøkene sine, og hvorfor synes de ikke det er noe stas et par år seinere? Hva er det ved matematikkundervisningen eller matematikkfaget som gjør at så mange elever begynner å mislike faget?

Slike spørsmål er en lærers hverdag fylt med. For noen lærere skaper alle disse spørsmålene usikkerhet, men for de fleste er det disse utfordringene som gjør jobben spennende. En forutsetning for at en slik usikkerhet vendes til noe positivt, til en mulighet til stadig forbedring, er at man har verktøy å møte usikkerheten med, at man har redskaper til å behandle alle spørsmålene. I dette heftet blir enkelte teorier for læring og undervisning presentert som kan fungere som slike redskaper. Teoriene blir grundig illustrert med praktiske erfaringer, både fra aktiviteter utviklet og utprøvd innen KIM-prosjektet og fra aktuell forskning innen dette området. Det er umulig å gi noen entydige svar på *hvordan* man bør undervise, til det er fagstoffet, elevene, lærerne og skolenes omgivelser for forskjellige. Målet med dette heftet er at leseren selv skal kunne gi rasjonelle og begrunnede svar på spørsmål som dukker opp i klasseromssituasjoner. Til det trengs teori; som lærere trenger vi teoretiske begreper som

- gir en god og troverdig beskrivelse av det vi observerer
- hjelper oss i planleggingen og gjennomføringen av en undervisningssekvens
- gjør oss i stand til å begrunne og reflektere over de valgene vi gjør

Er det så nødvendig med slike teorier? Hva med «den gode læreren» vi husker fra vår egen skolegang, hadde hun en læringsteori eller undervisningsteori? Det hadde hun ganske sikkert. De aller fleste lærere gjør seg en rekke tanker om sin virksomhet, om hvordan man best underviser, om hvordan elevene reagerer på forskjellige aktiviteter, om hvilket lærestoff som passer til hvilket alderstrinn, og så videre. I tillegg er alle lærere preget av den tradisjonen de virker i. Enhver lærer blir påvirket av lærings- og undervisningsteorier for eksempel gjennom sin egen skolegang, både når hun selv var elev og gjennom sin profesjonsutdanning. For eksempel er det god grunn til å tro at lærere med bakgrunn fra førskolelærerutdanning til en viss grad vil ha en annen undervisningspraksis enn de med bakgrunn fra allmennlærerutdanning. Så selv om en lærer ikke gjør egne refleksjoner, ikke stiller spørsmål til sin virksomhet, så vil hun likevel være påvirket av et (eller flere) teorisyn. Hvis det er tilfellet, vil læreren ha et *ubevisst* teorigrunnlag. Alle lærere *har* altså en teori for læring og undervisning, enten den er uttalt og reflektert eller ikke. Dette blir ofte kalt *praksisteori* (Selle, 1995).

Vil man imidlertid *utvikle* seg som lærer, skjer det ved at man stiller spørsmål tilknyttet sin egen undervisningspraksis. En teori for læring og undervisning vil gi hjelp både til det å stille slike spørsmål og til det å nærme seg svar. Det er i dette møtet mellom teori og praksis at muligheten for vekst ligger.

Best utviklingsmuligheter har dermed den læreren som har et *bevisst* teorigrunnlag. Med kjennskap til forskjellige teorier vil hun kunne reflektere over elevenes og sine egne handlinger, en refleksjon som på sikt forhåpentligvis fører til en forbedret undervisningspraksis. Motsatt vil det at hun knytter de teoriene hun har til sin egen praksis føre til at hennes forståelse av de teoriene utvikles. På den måten oppstår en spiral hvor teori og praksis påvirker og utvikler hverandre. Det er viktig å påpeke at begge sidene er avhengig av den andre for å skape slik utvikling. Hvis man kun beskjeftiger seg med teori, vil man kunne bli det som noe ondskapsfullt kalles «skrivebordspedagog»; man bruker begreper som nok utgjør fine teoretiske byggverk, men som er lite egnet til å fange den praksisen som en lærer opplever. Hvis man på den andre siden utelater teoretiske aspekter fullstendig, vil praksisen bli svært tilfeldig. Det vil for eksempel være tilfeldig hvilke hjelpemidler man bruker i undervisningen fordi man ikke reflekterer over hvorvidt et hjelpemiddel er bedre egnet enn et annet.

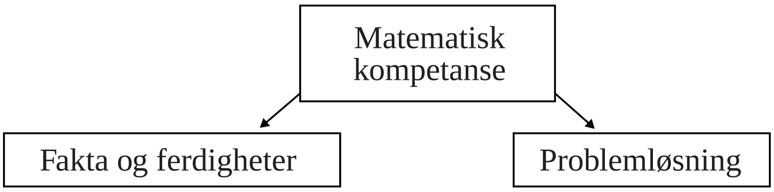
I denne første delen av heftet forsøker vi derfor å legge et teoretisk grunnlag for læring og undervisning. Dette gjøre vi gjennom en presentasjon av noen prinsipper for undervisning i matematikk. Gjennom hele kapitlet blir teorien belyst med praktiske eksempler. Hovedtyngden av praktiske eksempler kommer seinere, i del 2, i tilknytning til de forskjellige faglige emnene.

2 Hva er kompetanse i matematikk?

I matematikkdelen i L97 står det:

> *Elever som strever med multiplikasjonstabellen, må likevel få arbeide videre med begreper og oppgaver som bygger på ideer om multiplikasjon. Mer vesentlig enn å pugge tabellen er det å forstå selve begrepet multiplikasjon og kunne bruke det.*

Elevene skal på den ene siden lære seg bestemte faktakunnskaper og ferdigheter. På den andre siden framhever planen at det er viktigere å forstå selve begrepene og å kunne bruke dem. Forståelse av begrepene er avgjørende når en trenger å kunne bruke fakta og ferdigheter i praktiske sammenhenger. Når det gjelder begrepet multiplikasjon, kan man si at *en* side av det å kunne multiplikasjon er å kunne gangetabellen og ulike utregningsmetoder for multiplikasjon. Det å vite *når* en skal multiplisere i en praktisk situasjon man står ovenfor, er en annen side av den matematiske kompetansen knyttet til multiplikasjon. Grovt sett kan den matematiske kompetansen deles i to:



Med ordet problemløsning menes både begrepsforståelse og strategier for problemløsning. Mer om dette følger nedenfor. Det kan hevdes at tradisjonell matematikkundervisning i Norge har lagt stor vekt på fakta- og ferdighetsdelen av kompetansen. Dette kan blant annet ses gjennom lærebøkenes utstrakte bruk av oppgaver som fokuserer på dette aspektet. Det er imidlertid ikke slik at den ene kunnskapen følger direkte av den andre. Det er derfor nødvendig å rette undervisningen mot begge aspektene:

Det er viktig både med gode regneferdigheter og med evne til å kunne bruke disse ferdighetene i forskjellige sammenhenger.

Dette er også poengtert i L97. I et godt matematisk begrep inngår begge disse komponentene, og elevene trenger å utvikle begge disse formene for kunnskap.

3 Matematisk kunnskap

I dette kapitlet fokuseres det på hva kunnskap i matematikk kan være. Kunnskap er noe som sitter inni hodet til hvert enkelt menneske, og det er derfor umulig å dissekere og beskrive kunnskap på samme måte som man kan med for eksempel en frosk. Kunnskapene til en person er resultater av modning og refleksjoner over erfaringer som denne personen har gjort seg. I tillegg vil kunnskap ha mange dynamiske trekk. Med det menes at tenkning i en viss grad er situasjonsbestemt. Følgen av det er at den formen en bestemt kunnskap hos en person har, vil være avhengig av den situasjonen hvor kunnskapen tas i bruk. I matematikk kan det komme til uttrykk ved at noen elever kan være flinke til å regne når de får praktiske oppgaver utenfor skolen, mens de gjør det dårlig på tilsvarende oppgaver i matematikktimene.

Dette gjør det umulig å gi en korrekt eller fullstendig beskrivelse av en persons matematiske kunnskap. Det man kan gjøre, er å lage en modell for hvordan man antar at denne kunnskapen er bygd opp, og hvordan den fungerer. Ved å studere hvordan elever lærer og ved å diskutere med lærere og forskere i matematikkdidaktikk, kan en slik modell enten forkastes, eller den kan stadig forbedres. Seinere i dette kapitlet legges det fram en modell som kan brukes til å beskrive hvordan elever tenker når de arbeider med matematikk.

Løs følgende oppgave:

> *Oddvar kjøper et dusin malingbokser. Hver boks koster 34 kr. Hvor mye må han betale?*

Hvilke kunnskaper er nødvendig for å løse denne oppgaven? En viktig ting man må vite for å komme i gang, er å innse at dette er en «matematikkoppgave». Det betyr at det er en oppgave som løses med de reglene som gjelder for denne typen oppgaver. Det betyr at oppgaven har ett riktig svar. Dette svaret kan man finne ved å multiplisere 34 med 12, noe som gir 408 kroner. Hvis dette i stedet hadde vært et realistisk tilfelle, kunne Oddvar i stedet ha kjøpt noen større bokser, eller han kunne ha fått avslag fordi han kjøpte så mange. Slike vurderinger skal man vanligvis ikke inkludere i løsningen av matematikkoppgaver, man skal holde seg strengt til de opplysningene som er gitt i oppgaven. Det er vanskelig å komme utenom at det gjelder andre regler i et klasserom enn utenfor, men det er viktig at lærere både kjenner til disse reglene, og at de vet at slike regler styrer hvordan elevene løser oppgaver i matematikktimene. Da først kan de arbeide aktivt for å minske avstanden mellom «skolematematikken» og matematikken i hverdagslivet.

Når man skal løse oppgaven om malingsboksene, må man videre vite at et dusin er det samme som 12. Deretter må man kjenne igjen strukturen i oppgaven. Det vil si at man må vite at det her er snakk om multiplikasjon (eller at en må addere 34 tolv ganger). Til slutt må man være i stand til å utføre selve multiplikasjonen: $12 \cdot 34$. En måte å løse den på er ved den såkalte standardalgoritmen for multiplikasjon av store tall. En litt annen måte er å dele opp 12 i $10 + 2$, så regne ut $10 \cdot 34 = 340$ og $2 \cdot 34 = 68$. Svaret blir da $340 + 68 = 408$. Til å løse en slik oppgave trengs derfor *faktakunnskaper* som at et dusin er 12 og at $2 \cdot 4 = 8$. I tillegg trengs *ferdigheter* som det å gjennomføre en multiplikasjonsalgoritme. I tillegg trengs kunnskaper om det å multiplisere, for eksempel det å vite at i denne situasjonen er det snakk om det vi kaller en *multiplikativ struktur*. Multiplikasjon er et matematisk *begrep* som vi kommer grundig tilbake til i kapitlet om *tallregning*. Kunnskap om multiplikasjonsbegrepet må man ha for eksempel for å vite at man her skal multiplisere og ikke dividere.

Disse forskjellige kunnskapsformene blir beskrevet nærmere nedenfor, men først et eksempel til:

> *Noen mennesker går på kafé. Der kjøper de kaffe til 5 kr per kopp og kake til 9 kr per stykke. Alle bestiller det samme, og til sammen måtte de betale 133 kr. Hvor mange kopper kaffe drakk hver person?*

Denne oppgaven kan løses på flere måter. Her følger noen:

1) Bestem hvor mange personer som var på kafeen. Her er vi nødt til å prøve oss fram. Hvis det var to personer der, måtte de ha betalt 133 : 2 = 66,50 kr. Men siden både kaffen og kakene kostet heltallige beløp, er det umulig at de betalte 66,50 hver. Tilsvarende undersøker vi om det var 3, 4, ... personer i kafeen:

Antall	2	3	4	5	6	7
Hver må betale	66,50	44,33	33,25	26,60	22,17	19,00

   Vi ser at det kan være 7 personer som betalte 19 kr hver. I så fall må vi finne ut hvordan de kunne betale 19 kr. Den eneste måten å få til det på er ved at hver kjøpte to kopper kaffe og et kakestykke. Siden $7 \cdot 19$ er den eneste måten å faktorisere 133, er dette den eneste mulige løsningen. Vi kunne også hatt 19 personer som betalte 7 kr hver, men siden kaffen kostet 5 og kakene 9 kr, går det ikke an at de betalte 7 kr hver.

2) Vi undersøker systematisk på et samlet antall kakestykker som blir kjøpt, og ser om resten

kan fordeles på kaffekopper. Hvis de kjøpte ett stykke til sammen, blir det igjen 124 kr til kaffe, men 124 lar seg ikke dele på 5 (prisen på en kaffekopp) og derfor er dette umulig. Hvis de kjøpte to kakestykker, blir det igjen 115 kr. Dette tilsvarer 23 kaffekopper. Beløpet kan altså deles opp i 2 kakestykker og 23 kaffekopper. Men siden det er to personer som kjøper hvert sitt kakestykke, er ikke dette mulig fordi 23 kaffekopper ikke kan deles likt på 2. Vi fortsetter å prøve med 3, 4, 5 ... kakestykker. Neste gang vi får noe som lar seg dele på 5, er ved 7 kakestykker. Det gir 133 - 7 · 9 = 70 kroner til kaffe. Dette tilsvarer 14 kaffekopper, og vi er framme: 7 kakestykker og 14 kaffekopper passer hvis det var 7 personer som spiste ett kakestykke og drakk to kaffekopper hver.

3) Vi vet at alle kaffekoppene vil koste noe i 5-gangen, noe som ender enten på 0 eller 5. Hvis vi trekker dette fra 133, står vi igjen med at beløpet til kakene må ende på 3 eller 8. Siden kakene kostet 9 kroner, må vi undersøke hva det er i 9-gangen som ender på 3 eller 8. En mulighet er 18, det gir 2 kakestykker og svært mange kaffekopper. Vi prøver videre. Den neste muligheten i 9-gangen er 63. Det gir 7 kakestykker og 70 kroner til kaffe, altså 14 kaffekopper. Dette gir løsningen.

Hvilke kunnskaper må til for å løse denne oppgaven? Her er det også snakk om fakta og ferdigheter. Vi må ha slike basiskunnskaper om alle de fire regneartene. Denne oppgaven ble gitt til 50 elever i første klasse på videregående skole. Det var kun 6 elever som svarte riktig. Hvorfor er denne oppgaven så vanskelig? Den kan, som vist over, løses med enkel bruk av de fire regneartene, men det er nødvendig med kunnskaper utover dette. Det som trengs i tillegg, er *strategikunnskap*. Man må vite hvilke fakta og ferdigheter som bør tas i bruk etter hvert som man arbeider med problemet. Det er altså ikke nok bare å ha evnen til å gjøre utregningene, man må også vite *hva* man skal regne på.

Det er spesielt nyttig å kjenne til forskjellige strategier når man skal løse problemer. Med *problemer* i matematikk menes utfordringer hvor løseren ikke umiddelbart vet hvordan han skal finne et svar. Man vet ikke om fakta eller algoritmer som kan tas i bruk direkte og som vil gi en løsning av problemet. Det vil være tilfellet for mange i oppgaven over. En strategi man da kan bruke, kalles «gjett-og-sjekk». Den innebærer at man gjetter på en av de ukjente i situasjonen og ser om det fungerer. Hvis ikke gjetter man noe annet. Svaralternativ 1) er et eksempel på dette. Her gjettes det systematisk på antall personer som besøkte kafeen, og når man kommer til 7 personer, får man en løsning som stemmer med premissene i oppgaveteksten. Når elever på ungdomstrinnet skal lage en konstruksjon i geometri, blir de ofte oppfordret til å tegne en hjelpefigur. Hensikten med det er at en slik figur kan gi elevene en bedre oppfatning av oppgaven, en bedre forståelse av hvordan den ferdige tegningen skal se ut. Dermed vil det kunne være enklere å finne ut hvilke konstrueringer som må gjøres.

I det følgende kapitlet blir disse kunnskapsformene diskutert mer i detalj. Disse er tidligere beskrevet i KIM-prosjektet i heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning*.

3.1 Fakta og ferdigheter

Med faktakunnskap menes den type kunnskap som brukes når man besvarer et spørsmål umiddelbart etter at spørsmålet er stilt. I matematikk finnes mange kunnskaper av denne typen som elevene må lære. Noen av de første faktakunnskapene som små barn lærer, er uttalelsen av tallordene og rekkefølgen av dem. Seinere læres navn på geometriske objekter som linje, trekant og kule. På småskoletrinnet vil elevene utvikle sine faktakunnskaper til også å omfatte kunnskaper knyttet til regning med de fire regneartene. Etter hvert vil de for eksempel vite at det dobbelte av 3 er 6, at 5 + 2 = 7 osv. Når voksne ser et slikt regnestykke, kan vi svare med en gang, vi behøver ikke å tenke oss om eller regne ut et svar. Derfor er slike faktakunnskaper svært nyttige i matematisk tenkning. Hvis man vet svaret på slike forholdsvis enkle oppgaver umiddelbart, kan man bruke tenkekapasiteten sin på andre, mer kompliserte forhold.

Faktakunnskap kan altså være navn knyttet til et begrep. De kan også være *definisjoner* eller *konvensjoner* som man har funnet det tjenlig å lage. Definisjoner og konvensjoner er ikke utledet av noe annet, og de behøver ikke å være logiske. Et eksempel på en slik konvensjon er måten vi skriver tallsymboler på. Hevdvunne notasjoner er også faktakunnskap som må læres. De er eksempler på at menneskene har blitt enige om å symbolisere et bestemt meningsinnhold på en entydig måte. Det er ikke naturgitt eller selvinnlysende at meningsinnholdet til det sammensatte tallsymbolet 32 er verdien 3 multiplisert med 10 og addert til 2. Det er verdt å merke seg at det har tatt svært lang tid å utvikle denne konvensjonen. Mange fakta er altså menneskeskapte. Dette gjelder både navn på matematiske objekter og måter å symbolisere matematiske størrelser. Å få et meningsfylt forhold til symboliseringen av faktakunnskaper kan være svært vanskelig. Dette er diskutert grundig av Høines (1987).

Ferdigheter er en type kunnskap som kommer til syne når vi løser en oppgave ved å bruke en bestemt framgangsmåte. I slike tilfeller kan man ikke svare umiddelbart, men man er nødt til å utføre en eller annen operasjon for å komme fram til et svar. Et barn som ikke vet svaret på 5 + 2, kan telle opp fem fingrer på den ene hånden, to på den andre og deretter telle hvor mange dette blir til sammen. Han bruker en bestemt framgangsmåte, og dette er dermed en ferdighet barnet besitter. En slik framgangsmåte kalles i matematikken ofte en *algoritme*.

En algoritme består av et avgrenset antall operasjoner. Når man har lært seg en algoritme, vet man akkurat hvordan hver operasjon skal utføres og i hvilken rekkefølge de skal utføres. Når man skal bruke algoritmen for addisjon av flersifrede tall, skal først tallene settes under hverandre slik at enerne kommer under hverandre, tierne under hverandre osv. Så skal enerne legges sammen. Hvis den summen blir over ti, skrives antall tiere over tierkolonnen, mens antall enere skrives under enerne i svarfeltet. Deretter summeres tierne osv. På den måten vil en algoritme alltid gi et svar hvis den blir fullført. Det kan hende at svaret er feil fordi algoritmen er blitt utført feil, eller fordi det ikke passet å bruke akkurat den algoritmen ved det tilfellet, men en algoritme leder alltid fram til et svar.

Det krever mer av den som arbeider med et matematisk problem å utføre en algoritme enn det gjør å hente fram faktakunnskap. Men siden det er håpløst å lære seg svar på alle mulige spørsmål i form av faktakunnskap, er man nødt til å lære ferdigheter som er mer generelle måter å komme fram til et svar på. Slike algoritmer vil være til hjelp når man skal løse oppgaver hvor man ikke sitter inne med et faktasvar. Algoritmene blir spesielt nyttige når de blir automatiserte. Er man godt drillet i multiplikasjonsalgoritmen for flersifrede tall, kan man multiplisere svært store tall på en enkel måte. Det hadde vært atskillig vanskeligere å få til hvis man var nødt til å utvikle en metode hver gang en slik multiplikasjon skulle utføres. Det at trinnene i algoritmen er automatiserte, fører både til at arbeidet går lettere, og til at man gjør færre feil. Automatiserte algoritmer krever ikke så mye tenking, noe som fører til at man kan konsentrere seg om andre sider ved arbeidet med å løse et problem.

Et spesielt aspekt ved mange matematiske begreper er at de både har en ferdighetsside og en faktaside. Som nevnt løser små barn enkle addisjonsoppgaver ved hjelp av en eller annen algoritme. Seinere utvikles dette til faktakunnskap som igjen kan inngå i andre algoritmer som addisjonsalgoritmen. Et annet eksempel er knyttet til multiplikasjon. Det læres ofte som gjentatt addisjon, at $5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. På denne måten kan elevene finne svar på multiplikasjonsoppgaver ved å utføre en algoritme: Skriv opp multiplikasjonen på addisjonsform, utfør addisjonen. Deretter vil de fleste elevene lære den lille multiplikasjonstabellen som faktakunnskap. Da behøver de ikke lenger å gå veien om addisjon, gå veien om en algoritme. De vet umiddelbart at $5 \cdot 4 = 20$. Tilsvarende blir divisjon først sett på som en prosess, som noe man skal gjøre, for eksempel at man skal fordele 8 druer likt mellom 4 barn. Dette er også en ferdighet som etter hvert utvikles til faktakunnskap. Elevene vil vite at $8 : 4 = 2$.

Det er svært viktig for elevenes matematiske kompetanse at de gjør slike utvidelser av ferdighetene sine til også å omfatte faktakunnskap. Grunnen til det er at når elevene seinere skal løse mer kompliserte oppgaver og utvikle mer avanserte algoritmer, vil det være et stort, kanskje uoverkommelig hinder hvis elevene ikke har lært enkelte faktakunnskaper. Det er mye enklere å lære addisjonsalgoritmen hvis man har en god del faktakunnskaper om addisjon. Motsatt er det svært vanskelig å løse multiplikasjonsoppgaver hvis man alltid er nødt til å gå veien om mange og lange addisjonsstykker. Derfor bør det være et mål med matematikkundervisningen at elevene utvikler nyttige faktakunnskaper i tillegg til algoritmer. I L97 legges det opp til dette gjennom en økt vektlegging av hoderegning. For å kunne løse oppgaver i hodet, må man ha gode faktakunnskaper. Også ved hoderegning er det nyttig å kunne effektive algoritmer som ikke er mer omfattende enn at man kan utføre dem «i hodet», uten penn og papir.

3.2 Strategier

Kaféoppgaven viser at det er mer som skal til for å løse matematiske oppgaver enn bare fakta og ferdigheter. Det er også nødvendig å vite *når* de forskjellige faktaene skal brukes, og hvilke ferdigheter som er passende. Dette er dels avhengig av at man har utviklet gode begreper, noe som diskuteres nedenfor, og det er avhengig av at man har strategier for hvordan bestemte problemer kan løses.

Med strategier menes overordnede framgangsmåter som kan brukes i forskjellige sammenhenger og ved forskjellige oppgaver. Som tidligere nevnt bygger det første løsningsforslaget til kaféoppgaven på en strategi som kan kalles *gjett-og-sjekk*. Det er en strategi som ofte er nyttig i arbeidet med matematiske problemer. Ved å gjette på en løsning (at det var to personer som besøkte kafeen) og sjekke om det stemmer (finne ut hvor mye hver enkelt da må betale), vil man kunne få en bedre forståelse av problemet, og man vil kunne nærme seg en løsning. Det er imidlertid ikke slik at en strategi nødvendigvis fører til en løsning av problemet. Mens en algoritme alltid gir en, om enn feilaktig, løsning, kan det vise seg under løsningsarbeidet at det er umulig å fortsette med den strategien man har valgt. Derfor er det viktig at man vurderer strategien man bruker underveis: er jeg på rett vei, kan jeg effektivisere denne strategien, bør jeg heller velge en annen strategi?

Den mest nyttige strategien i arbeidet med matematiske problemer er antakeligvis det å lage en tegning eller et diagram av det aktuelle problemet. Helt i starten av Del 1 var det et eksempel hvor ei jente på 7 år løste oppgaven *«Kristian har 3 tyggegummipakker med 6 tyggegummier i hver pakke. Hvor mange tyggegummier har han?»* Hun gjorde det ved å lage en tegning av pakkene. På den måten klarte hun å løse en nokså vanskelig tekstoppgave. Seinere i heftet, både i resten av denne delen og i del 2, presenteres mange flere slike eksempler hvor elever løser oppgaver ved å lage en tegning eller diagram. Når man lager et diagram, vil man kunne få en bedre forståelse av det problemet man vil løse. I tillegg kan et diagram gi direkte hjelp til hvordan man kan finne en løsning. 7-åringen som fant antall tyggegummier, ville neppe klart dette hvis hun ikke hadde laget en tegning til hjelp. Strategien med å lage en tegning gjorde at hun kunne liste opp pakke for pakke på papiret og deretter bruke dette til å finne en løsning på oppgaven. Det er derfor gunstig at elever tidlig ser nytten av det å kunne lage gode diagrammer eller tegninger av matematiske problemsituasjoner.

3.3 Begrepsdanning

Tradisjonell matematikkundervisning har lagt stor vekt på å formidle faktakunnskaper og ferdigheter. Det har likevel vist seg at elever ofte har problemer med å løse selv enkle tekstoppgaver i matematikk. Det er et av KIM-prosjektets hovedsiktemål å studere grundig *hvordan* elever tenker når de løser oppgaver innen forskjellige matematiske emner og forsøke å beskrive hvilke vanlige oppfatninger elever har av forskjellige matematiske begreper. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for *misoppfatninger*.

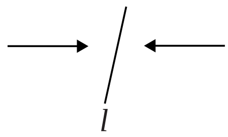
Det er viktig å forstå forskjellen på de *feil* elevene gjør, og de *misoppfatninger* de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, fordi en ikke er oppmerksom nok eller ikke leser en oppgave godt nok, osv. Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning – en idé – som brukes nokså konsekvent. Ofte er dette et resultat av det en kan kalle en overgeneralisering av tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut. En kan se på dette som forsøk på å skape mening og sammenheng i det en lærer. I KIM-heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning* er det gitt en mer utførlig diskusjon om misoppfatninger og betydningen av å fokusere på slike ideer i matematikkundervisningen.

KIM-prosjektet har så langt vist at det kan være stor forskjell mellom det fagstoffet som blir undervist, og de begrepene som den enkelte eleven danner. I del 2 vil vi presentere noen av de ideene elever på småskoletrinnet har knyttet til spesifikke matematiske begreper.

En konsekvens av resultatene fra KIM-prosjektet er at det er viktig at lærere i matematikkundervisningen legger vekt på at de matematiske begrepene er svært mangfoldige. De matematiske begrepene henger sammen på mange måter, de eksisterer i nettverk (se heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning*). Dette er framhevet i L97 hvor det å lære matematikk sammenlignes med det å klatre i et tre. Her er et lite eksempel: En klasse med 7-åringer løste et problem hvor de skulle fordele 14 nøtter på 3 ekornunger. Noen av elevene gjorde det ved å gjette på et rimelig antall, for eksempel at hver unge fikk 3 nøtter hver. Da hadde ekornmora delt ut 3 + 3 + 3 = 9 nøtter. Da var det 14 - 9 = 5 nøtter igjen. Så delte de ut ei nøtt til hver, slik at ekornungene fikk 4 hver. Da hadde mora delt ut 9 + 3 = 12 nøtter, og det var kun 14 - 12 = 2 nøtter igjen. Disse ble til overs. For å løse denne oppgaven, som vi kanskje vil kalle en divisjonsoppgave, brukte disse elevene både addisjon og subtraksjon. Dette viser at bruk av matematikk i en praktisk situasjon svært ofte inkluderer flere matematiske begreper, samtidig og på en integrert måte.

I kapitlene som omhandler de forskjellige matematiske begrepene i Del 2, presenteres grundigere hva som ligger i såkalte «rike begreper». Her følger noen eksempler:

Eksempel 1



Her ser du hvordan en elev kan speile pila til venstre om linja *l*:

Her speiler eleven pila som om linja *l* er vertikal, han bryr seg ikke om at linja står på skrå. Dette er en vanlig misoppfatning. Det er viktig å påpeke at slike misoppfatninger ikke er noe som læreren har fortalt elevene. Som vi pekte på ovenfor, er misoppfatninger som regel generaliseringer som elevene har gjort ut fra de erfaringene de har gjort. I dette eksemplet skyldes en slik misoppfatning antakeligvis at elevene stort sett har gjort erfaringer med speiling om vertikale og horisontale linjer. Hvis det er tilfellet, kan elevene utvikle algoritmer og tenkemønstre som er effektive i akkurat de tilfellene, men, som her, ikke lar seg overføre til andre situasjoner. Erfaringer med begrepet speiling fra et lite utvalg situasjoner, gir en snever begrepsoppfatning hos elevene.

Eksempel 2

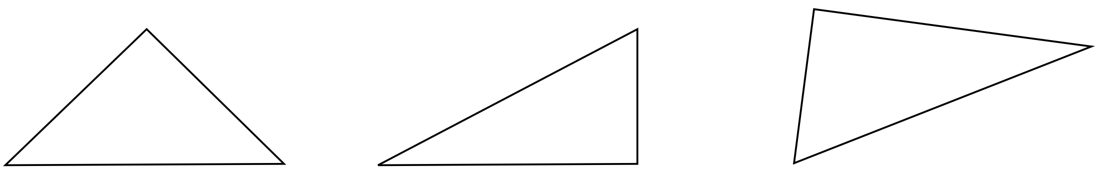
Mange elever tror at multiplikasjon alltid gir et svar som er større enn det man startet med. Dette vil være tilfellet ved oppgaver hvor multiplikasjon kan erstattes med gjentatt addisjon: *Anne har lagt ei halv lakrisstang i 3 bokser. Hvor mange lakrisstenger har hun totalt?* Denne oppgaven kan løses både med multiplikasjon, $0{,}5 \cdot 3$, og med gjentatt addisjon, $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5$. Multiplikasjon gir også alltid et større svar så lenge det tallet det multipliseres med, er et heltall. Elever som kun gjør erfaringer med multiplikasjon gjennom oppgaver med heltall og som har en struktur bygd på gjentatt addisjon, vil lett danne en slik oppfatning. Denne oppfatningen vil dessverre være feilaktig i andre sammenhenger hvor man multipliserer med et tall mindre enn 1. Denne misoppfatningen kommer ofte til uttrykk når elever skal velge et regneuttrykk som gir rett svar på problemet i en oppgavetekst:

> *Kaker skal fylles i bokser med 0,75 kg i hver. Hvor mange bokser kan fylles med 6 kg kaker?*
>
> $6 \cdot 0{,}75$ $\quad 6 : 0{,}75$ $\qquad 0{,}75 : 6$ $\qquad 0{,}75 \cdot 6$ $\qquad 6 - 0{,}75$ $\qquad 6 + 0{,}75$

I oppgaveteksten er utgangspunktet én kakeboks som tar 0,75 kg. Når man skal fylle opp med 6 kg kaker, trengs mer enn denne ene boksen, og dermed foreslås multiplikasjon som den riktige regneoperasjonen. Grunnen til denne misoppfatningen ligger, som nevnt over, i det at elevene i overveiende grad har arbeidet med multiplikasjon og divisjon med hele tall. Da gjelder regelen «multiplikasjon gjør større». Vi kommer som nevnt tilbake til slike misoppfatninger seinere. Misoppfatninger som elever kan ha tilknyttet tall og regning, er grundig beskrevet i KIM-heftet *Veiledning til tall og tallregning*.

Eksempel 3

Hvilke av disse trekantene er rettvinklet?



Her er det mange elever som svarer at kun den midterste trekanten er rettvinklet. Faktisk er alle tre rettvinklet, den eneste forskjellen er at ved høyre og venstre trekant er den rette vinkelen, den som er 90°, «øverst». Når elever sier at kun den midterste er rettvinklet, skyldes det antakeligvis at de tidligere kun har sett rettvinklete trekanter av denne typen. Igjen skyldes misoppfatningen at elevene generaliserer fra en begrenset erfaringsbakgrunn. Johnsen (1996) viser at mange slike misoppfatninger er vanskelige å bli kvitt, slik at de gjør seg gjeldende også hos eldre elever.

I matematikkundervisningen prøver vi som lærere ofte å gjøre lærestoffet enklere for elevene ved å forenkle situasjonene og ved å velge enkle tall. Det er ofte nødvendig å gjøre slike forenklinger for at elevene skal kunne sette seg inn i nye og uvante situasjoner. Men utbredelsen av misoppfatninger, slik det er vist her, tyder på at lærere kan gjøre elevene en bjørnetjeneste hvis de kun gir oppgaver fra slike forenklede situasjoner. Skal man unngå at elevene danner misoppfatninger og i stedet utvikler allsidige og rike matematiske begreper, må elevene gjøre erfaringer med begrepene i mange forskjellige situasjoner. De matematiske begrepene er mangesidige, og dette må avspeiles i undervisningen. Hvis undervisningen skal dreie seg om speiling, må elevene få anledning til å arbeide med speiling i så mange forskjellige sammenhenger som mulig. Det samme gjelder ved multiplikasjon. Multiplikasjon er mye mer enn gjentatt addisjon, og et godt multiplikasjonsbegrep utvikles kun hvis elevene får møte multiplikasjonsbegrepet i alle dets avskygninger.

Det kan argumenteres for at tradisjonell matematikkundervisning i overveiende grad har dreid seg om å oppøve elevenes faktakunnskaper og ferdigheter. I dette heftet legges det opp til en undervisning som sikter mot en mer allsidig matematisk kompetanse. Kort fortalt er den ekstra komponenten kalt *problemløsning*. Ordet problemløsning blir dermed brukt i en videre betydning enn det som ble betont i M87. I denne komponenten ligger mange elementer. I arbeidet med kaféoppgaven ble noen av dem brakt på bane:

analysere, «133 er et ganske spesielt tall, det kan bare deles på 7 og 19…»
klassifisere, se på hvilke penger som går til a) kaffe og b) kaker?
sammenligne, «hva fikk dere?", «hvordan regnet dere?»
trekke slutning, «nå har jeg det! Hvis vi gjetter på hvor mange personer det var, så …»
forklare, å svare på hvorfor noe er riktig
estimere, å svare på «hva kan være et passende antall kaffekopper per person?»
organisere, gjette systematisk og ordne resultatene i en tabell
se mønstre, spesielt det siste forslaget: trekker du fra kaffekopper, vil du ha igjen 128, 123, 118, 113, 108, 103 … kroner.
representere, la tallene stå for antall kroner eller antall personer
vurdere, «er vi på rett vei, er framgangsmåten og svaret riktig?»

Anvendelige og solide matematiske begreper dannes av gode faktakunnskaper, godt innøvde ferdigheter og ved at begrepene blir satt sammen til helhetlige begrepsstrukturer. For at elevene i tillegg skal bli gode til å bruke matematikk til å løse problemer, trengs gode strategiske kunnskaper. En undervisning som skal bygge opp kompetanse på alle disse feltene, må være variert. Elevene trenger «vanlige» regneoppgaver for å øve opp faktakunnskaper og ferdigheter. I tillegg trengs erfaringer fra arbeid med praktiske problemer. I neste kapittel presenteres noen prinsipper for matematikkundervisning bygd opp omkring slike praktiske problemer, kalt *aktivitetsbasert undervisning*.

4 Prinsipper for aktivitetsbasert undervisning

I matematikkdelen i L97 heter det: *Opplæringen må ta hensyn til de enkelte elevers forutsetninger.* Planen framhever viktigheten av at undervisningen må bygge på det den enkelte eleven alt vet. Dette poengteres seinere i planen hvor det framheves at elever konstruerer ny kunnskap på grunnlag av tidligere erfaringer: *Elevenes erfaringer, deres tidligere kunnskaper og de oppgaver de stilles overfor, blir vesentlige elementer i læringsprosessen.* Videre skisseres et godt undervisningsopplegg gjennom det at det har *meningsfylte situasjoner* som utgangspunkt. Deretter dannes begreper gjennom samtale og ettertanke. Når det gjelder småskoletrinnet, hevder planen at dette gjelder med spesiell styrke: *På småskoletrinnet spiller elevenes egne erfaringer og opplevelser en spesielt viktig rolle.*

Den aktivitetsbaserte undervisningen som presenteres i dette kapitlet, har dette som utgangspunkt. Undervisningen skal bygge på noe som elevene har kjennskap til fra før, fortrinnsvis situasjoner som er meningsfulle for elevene. Ut fra et slikt startsted skal elevene arbeide med oppgaver hvor de møter noe ukjent. Det er i et slikt møte mellom noe kjent og ukjent at elevene lærer. Det ukjente tolkes i forhold til de erfaringene den enkelte eleven har gjort tidligere, i forhold til det eleven kjenner fra før. En aktivitetsbasert undervisning har dermed følgende grunnleggende prinsipper:

1 Start med noe som elevene har et visst kjennskap til fra før.
2 Gi oppgaver som involverer noe ukjent.
3 La elevene få anledning til å tolke dette nye og til å reflektere over de erfaringene de har gjort.
4 Konsolidering, repetisjon

I det følgende blir disse punktene utdypet, og det blir forsøkt vist hvordan de vil arte seg i konkret matematikkundervisning.

4.1 Ta utgangspunkt i en situasjon

I stedet for direkte å gi oppgaver som elevene skal arbeide med, kan undervisningen ha en eller annen situasjon som utgangspunkt. En slik situasjon kan fungere som et springbrett for elevenes utvikling. Det betyr at situasjonen må inneholde elementer som elevene har god kjennskap til. Et eksempel som vi skal følge videre, er et undervisningsopplegg knyttet til noen ekorn og deres arbeid med å fordele nøtter. Dette opplegget ble prøvd ut på en klasse med 7-8-åringer, og det startet med en time hvor elevene lærte litt om ekorn. Her fikk elevene fortelle om egne møter med ekorn, se på bilder av ekorn og lignende. Da de kom til matematikktimen, fortalte læreren om ekornenes arbeid med å fordele nøtter. Alt dette hadde som hensikt å sette en situasjon for elevene, danne en bakgrunn for det videre arbeidet. På dette tidspunktet hadde det ennå ikke vært noe snakk om *hva* elevene skulle gjøre, hvilke oppgaver de skulle arbeide med, eller hva de skulle komme fram til. Fokus var rettet mot å gi elevene en oppfatning av den praktiske situasjonen som elevene skulle arbeide innenfor, ikke på hva det var tenkt de skulle gjøre.

Slike situasjoner må være såpass kjente for elevene at de kan leve seg inn i dem. Dette kan gjøres med utgangspunkt i elevenes hverdag. Det kan også gjøres gjennom forskjellige spill eller leiker. Dette kan enten være spill og leiker som er spesielt designet med tanke på matematikkundervisning, eller det kan være frie former for leik og spill som man utnytter i ettertid. En tredje mulighet er å ta utgangspunkt i et eventyr eller en annen fantasisituasjon. Det viktigste kravet er at elevene nokså raskt kan få en felles forståelse av hva som er hovedideene i situasjonen.

Et annet, og viktig, krav til slike situasjoner er at de rommer de matematiske begrepene som læreren vil at elevene skal arbeide med. Når det gjelder ekorneksemplet, vil lærerens fokusering på antall nøtter og fordeling av disse føre til at elevene antakeligvis vil arbeide med divisjon eller multiplikasjon. Vi kommer nærmere tilbake til disse begrepene i kap. 7.

Situasjonene må også være *rike* i den forstand at de stimulerer til at elevene tar i bruk sin egen fantasi, at elevene bruker av seg selv, og at de får mulighet til å påvirke arbeidet i situasjonen. Dette sikrer at arbeidet blir meningsfullt, samtidig som det motiverer til deltakelse i aktivitetene. Ved at elevene får arbeide innenfor kjente situasjoner, vil de gå inn i arbeidet med sin egen forståelse. Dette gjør at de kan bruke sin egen fornuft, og ikke kun akseptere noe som riktig fordi læreren eller læreboka har sagt at «slik er det». Elever i alle aldrer er i stand til selv å utvikle algoritmer for å løse mange problemer. Slike selvutviklede algoritmer vil ha en helt annen status hos eleven enn de som er kopiert av noe læreren eller læreboka har vist. En stor sørafrikansk undersøkelse blant 7- og 8-åringer (Olivier et al, 1990) viser at når elever bruker framgangsmåter som de selv har kommet fram til, løser de regneoppgaver både med færre feil og de feilene de gjør er mindre. En forutsetning for at elevene utvikler egne algoritmer, er at de har en god forståelse av den situasjonen som arbeidet springer ut av. Da vil de i stor grad kunne knytte den nye kunnskapen til det de vet fra før. De kan reflektere over og skape fornuft ut av de erfaringene de gjør.

Et siste krav til slike situasjoner som matematikkundervisning kan bygges på, er at de bør kunne gi rom for differensiering. Situasjonene bør være såpass enkle at alle elevene forstår grunnidéene. I tillegg bør de være såpass åpne at de kan utvides slik at også de flinkeste elevene kan finne passende utfordringer. I ekorneksemplet ble dette sikret ved at elevene selv måtte finne på hvilke antall nøtter de skulle arbeide med. Det viste seg at noen elever kun arbeidet med størrelser under ti, mens andre arbeidet med antall opptil hundre. Ved å undervise med utgangspunkt i situasjoner, vil differensieringsproblematikken dermed kunne dempes. Siden elevene kommer til matematikkundervisningen med til dels svært forskjellige utgangspunkt, blir differensiering en stor utfordring. Når elevene slippes mer løs, når de selv får være med på å bestemme hvordan og med hva de skal arbeide, vil de selv kunne finne seg passende utfordringer (med innspill fra læreren), og differensieringen vil dermed kunne gå nærmest av seg selv.

Men nå er det ikke sånn at elevene slippes helt fri. L97 spesifiserer faglige mål som matematikkundervisningen skal forsøke å nå, og alle lærere ønsker at elevene skal ha utbytte av undervisningen i form av matematiske kunnskaper. Derfor legges rammer for elevenes aktivitet gjennom presentasjonen av den aktuelle situasjonen og gjennom spesifisering av arbeidsoppgaver. Mer om dette i kapittel 4.2. I hvilken grad vi velger å spesifisere, vil være avgjørende for hvor stort rom elevene får å boltre seg i. Dette diskuteres også nærmere nedenfor.

Problemsituasjoner kan som nevnt ha mange forskjellige utspring:

- Fra elevenes egne interesser, en uuttømmelig kilde til problemsituasjoner. Disse kan utvikles gjennom bruk av bilder eller historier.
- Fra hendelser i klasserommet, elever som stiller spørsmål eller bringer med seg ting av interesse til skolen.
- Temaer, gjerne tverrfaglige.
- Leik, spill.

Når utgangspunktet for undervisningen er fra en verden elevene har kjenskap til eller kan leve seg inn i, skapes det et handlingsrom i henhold til det å finne løsninger på oppgavene som blir stilt i situasjonene.

4.2 Gi oppgaver som involverer noe ukjent

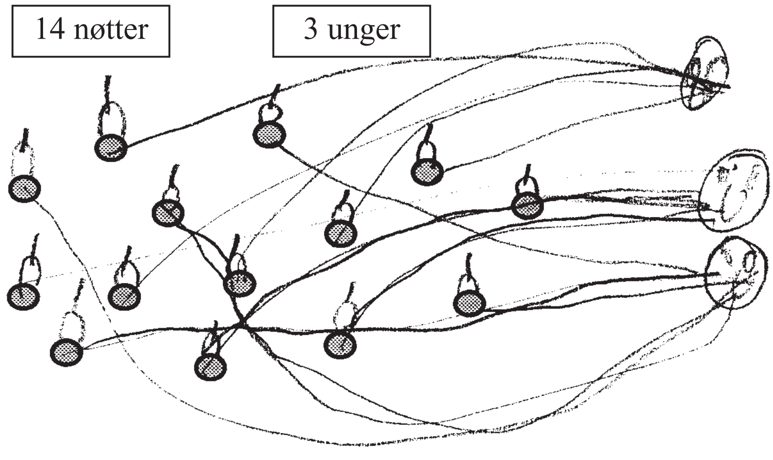
Når det kjente er etablert gjennom en presentasjon av den situasjonen læreren vil at elevene skal arbeide innenfor, er det nødvendig å spesifisere *hva* man vil at elevene skal arbeide med. Ved spesifisering av oppgaver gis aktiviteten en **retning**, elevenes arbeid blir rettet mot de matematiske begrepene som læreren vil at elevene skal gjøre erfaringer med.

I ekorneksemplet dreide den første oppgaven seg om fordeling av et antall nøtter til noen ekornunger. Til den aller første oppgaven fikk elevene et ark hvor det stod hvor mange nøtter som skulle deles ut (14) og hvor mange unger som skulle dele disse nøttene (3). I tillegg var de 14 nøttene tegnet som små sirkler på arket. Dette er dermed en oppgave hvor det er nokså grundig spesifisert hva målet for arbeidet er. Imidlertid er det et viktig poeng at det ikke er antydet noe om *hvordan* oppgaven skal løses. Her blir det altså fire nøtter til hver unge, og to nøtter blir til overs. Det er heller ikke spesifisert hva elevene skal gjøre når divisjonen ikke går opp. Dette viste seg imidlertid ikke å være noe problem. Etter et elevene hadde tenkt seg litt om, haglet det med forskjellige løsningsforslag: Noen ville gi de ekstra nøttene til ekornmora, noen ville spise dem selv, mens andre ville gå ut i skogen og plukke ei nøtt til.

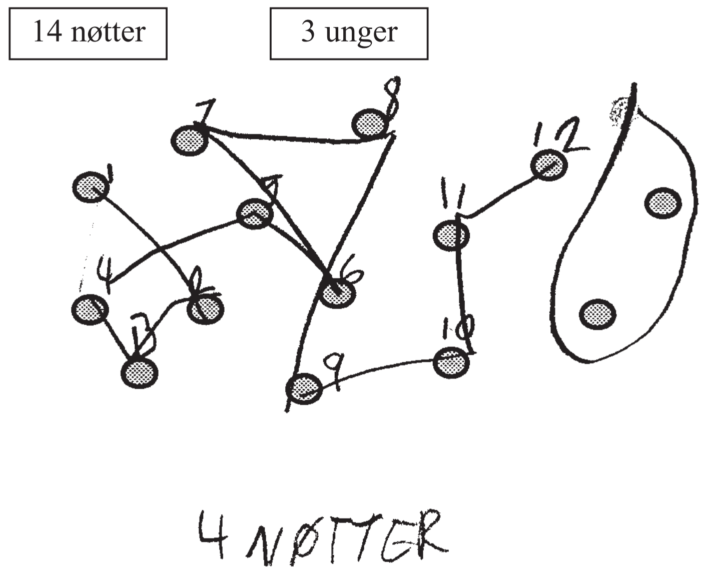
To elever som læreren karakteriserte som svake i matematikk, hadde problemer med å komme i gang. Det kunne virke som om de 14 tegnede nøttene ikke ga noen særlig mening. Disse elevene fikk da hver sin eske med små terninger, og de ble oppfordret til å late som om disse terningene var nøtter. Da gikk oppgaveløsningen mye greiere. Etter å ha løst et par oppgaver med hjelp av terninger, begynte begge elevene å tegne nøtter i stedet. De hadde da fått en bedre forståelse av hva som skjedde i denne situasjonen, og de var dermed i stand til å løse oppgavene ved tegning. Dette illustrerer et viktig prinsipp i undervisning i matematikk: Når elever skal løse problemer, må de arbeide med symboler eller representasjoner som gir mening for dem. For elever på småskoletrinnet vil det kunne være konkrete objekter, som terninger, det kan være tegninger eller diagrammer, og etter hvert vil det kunne være matematiske symboler, som skrevne tall, bokstaver og andre tegn.

Etter denne første oppgaven ble elevene bedt om selv å finne på tall, både for antall nøtter og antall unger. Det var stor variasjon på hvilke tall elevene valgte, men de aller fleste valgte å tegne nøttene som en hjelp i løsningsarbeidet.

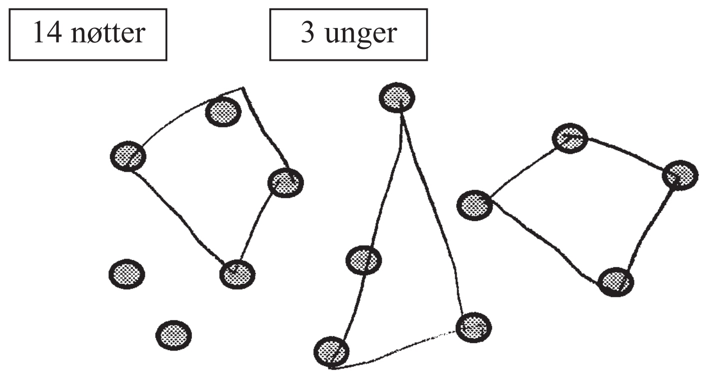
Læreren som hadde disse elevene til daglig, var en smule skeptisk til hvorvidt elevene klarte å løse disse oppgavene. De fleste lærebøkene etter M87 presenterte divisjon med rest i 4. klasse, og her skulle elevene arbeide med det i 1. klasse. Det viste seg imidlertid at alle elevene klarte å løse oppgavene. Her ser du noen eksempler på hvordan elevene løste den første oppgaven med 14 nøtter fordelt på 3 unger:



Denne eleven har tegnet inn de tre ekornungene og fordelt nøtt for nøtt. Dette er en svært konkret bruk av de 14 ringene som alt er tegnet inn. Denne eleven fortsatte å bruke denne måten å tegne på også på de neste oppgavene, men han forenklet tegningene stadig mer. Han brukte for eksempel kun sirkler for å angi hodene uten å tegne inn øyne og munn.



Her har eleven antakeligvis telt seg fram mens han holdt styr på hvilke han har fordelt ved å tegne en strek fra nøtt til nøtt. De to nøttene som ble til overs, er tydelig angitt. Ved de neste oppgavene tegnet denne eleven kun det antall nøtter som oppgaven oppga, ikke streken. Det indikerer at streken ikke tjener noen betydelig rolle for denne eleven i det å finne et svar.



Denne eleven har antakelig løst problemet først, sett at svaret ble fire og så angitt det ved å ringe inn de fire som hver unge skal få. De neste oppgavene ble løst på samme måte.

En grunn til at elevene klarte dette så fint, er at de kunne leve seg inn i situasjonen, og «spille» seg fram til en løsning. I noen av eksemplene skjer det en faktisk fordeling: Nøtt for nøtt blir fordelt til de tre ungene. Problemet med de to nøttene som ble til overs, viser også at elevene levde seg inn i situasjonen. Hvis aktiviteten ikke var rotfestet i en meningsfull situasjon, ville elevene antakeligvis hatt mye større problemer med å finne brukbare løsninger. Da ville de ikke hatt en kjent referanseramme som de kunne bruke til å skape forståelse av oppgaven, og til å lete etter brukbare løsningsmetoder.

Når læreren gir bestemte oppgaver i en situasjon, vil graden av spesifisering påvirke aktiviteten i klasserommet. Hvis man lar elevene velge fritt hvilke oppgaver det skal arbeides med, får vi noe nær «fri leik». Denne formen for aktivitet har mange positive sider pedagogisk sett, som det er viktig at lærere verdsetter. Når det gjelder matematikkundervisning, så vil den i overveiende grad fokusere på et bestemt læringsinnhold. Derfor vil det i de aller fleste tilfellene være nødvendig å gi aktiviteten en retning gjennom å bestemme noen oppgaver som elevene skal arbeide med. Det er imidlertid viktig å påpeke at også fri leik kan brukes som et utgangspunkt for diskusjon omkring matematiske begreper. Ofte vil barnas leik inneholde matematikk, ved at de bruker tall, regner, bruker geometriske former o.l. Etter at leiken er ferdig, kan læreren ta tak i denne matematikken og bruke leiken som en situasjon, et utgangspunkt for undervisningen. I så fall kommer matematikken inn i etterkant. Aktiviteten er ikke planlagt på forhånd med tanke på undervisning av et bestemt fagstoff.

Et eksempel på en motsatt undervisningssituasjon, hvor det faglige innholdet i større grad er bestemt på forhånd, er gitt av Ahlberg (1995). Her skulle en klasse med 6-åringer arbeide med temaet «tre» i en periode, og læreren hadde på forhånd laget bestemte oppgaver som elevene skulle arbeide med. En av oppgavene gikk ut på å finne alderen på forskjellige trær. Målet med aktiviteten var dermed bestemt, men når det gjaldt framgangsmåten, stod elevene svært fritt. De som stod bak undervisningen, hadde tenkt å fokusere på årringer og telling av disse, men elevene løste oppgaven annerledes. De ville heller se på hvor tykke trestammene var, og de mente nok at det var et like fint mål på alderen til et tre. Dermed ble det matematiske utbyttet knyttet til målinger, ikke kun til telling. Elevene fant metoder for å måle denne tykkelsen, og de fant passende måleenheter. Dette eksemplet viser at det matematiske læringsutbyttet kan bli stort selv med oppgaver som elevene tolker annerledes enn det læreren hadde tenkt på forhånd. Ved å gi mer klart definerte oppgaver er læreren sikrere på at elevene vil arbeide med de matematiske begrepene som hun ønsker. Det man taper ved mindre frie oppgaver, er at elevene ikke får påvirke aktiviteten like mye, og slik mister man mange av fordelene ved dette. Det er lærerens oppgave å vurdere i de forskjellige tilfellene hvor styrende oppgavene skal være.

Til slutt er det viktig å nevne at når en situasjon først er etablert, vil det ofte være ønskelig å gi varierte oppgaver i den situasjonen. Dette er slik av flere grunner. For det første tar det tid å etablere en situasjon som elevene er fortrolig med. Dette gjør det gunstig å utnytte den aktuelle situasjonen så mye som mulig. I stedet for å etablere en ny situasjon straks man har løst noen oppgaver, kan man for eksempel variere tallene som inngår. Dette kan enten gjøres ved at læreren foreslår andre tall, eller ved at elevene selv finner på tall. Fordelen med det siste er at elevene da vil velge tall de er fortrolige med, tall som ligger innenfor deres beherskelse. Noen ganger kan læreren ønske å utfordre noen elever ved å be dem arbeide med noe større tall enn de er vant til. Dette kan både utvide deres fortrolighet med slike tall, og det kan spore dem til å utvikle nye algoritmer som er mer passende i dette tallområdet. I en situasjon kan man også variere oppgavetypen. I ekorneksemplet kan det gjøres ved at man snur problemstillingen. I stedet for «14 nøtter fordeles på 3 unger, hvor mye på hver?» kan man spørre «hver av ungene vil ha 5 nøtter til middag, hvor mange må moren plukke?» eller «24 nøtter skal fordeles slik at hver ekornunge får 4 nøtter hver. Hvor mange unger rekker nøttene til?». Slike variasjoner gir elevene erfaringer med det å bruke en bestemt metode på forskjellige tall (variasjon av tallene som inngår) og med det å velge løsningsmetode avhengig av hva som er kjent/ukjent (variasjon av hvilke størrelser som er kjent/ukjent). Dermed blir den aktuelle situasjonen mer utnyttet enn om elevene kun skulle løse én oppgave innenfor denne konteksten - det er det som er vanlig med matematiske tekststykker.

4.3 Tolkning og refleksjon

Som nevnt er ekornoppgaven et eksempel på en nokså styrt aktivitet. Imidlertid fikk elevene selv utvikle egne framgangsmåter, og det viste seg at det klarte de utmerket. I timen etter at de hadde arbeidet med selve oppgavene, lot læreren elevene komme fram på tavla for å forklare for de andre hvordan de hadde arbeidet. Da viste det seg at i denne klassen på 18 elever hadde de løst oppgaven med 6 forskjellige metoder. Under framleggingen ble de forskjellige metodene kommentert, og ved et par tilfeller kom elevene med forslag til hvordan de metodene som ble presentert, kunne utvides/modifiseres. Dette viser at førsteklassinger er i stand til å snakke om og beskrive egne framgangsmetoder. De er også i stand til å reflektere over andres metoder. På denne måten skapte læreren en arena for refleksjon over forskjellige løsningsmetoder for dette problemet. Hun kunne også gjort tilsvarende for løsningsstrategier. Som tidligere nevnt er strategier mer overordnede framgangsmåter, og den strategien de fleste elevene brukte her, var å lage tegning eller diagram.

Det tar tid for elevene å sette seg inn i nye situasjoner slik det er foreslått her. Det er derfor nødvendig for et godt læringsutbytte at elevene får anledning til å bruke den tiden de trenger til dette. Først da vil oppgavene bli meningsfulle slik at elevene har mulighet til å bruke sine egne kunnskaper i arbeidet med å finne en løsning. Et annet viktig spørsmål er: Hva er den egentlige hensikten med de aktivitetene som elevene engasjeres i? I første omgang vil det være å finne løsninger på de aktuelle oppgavene. Men hovedhensikten er at elevene skal gjøre erfaringer som gir dem kunnskaper som de også kan bruke ved seinere anledninger når de blir stilt overfor andre oppgaver i nye situasjoner. Vi vil poengtere at det er svært viktig for den matematiske læringen at elevene ikke blir værende i situasjonen, men at de får hjelp av læreren til å trekke matematikken ut av de praktiske forholdene som situasjonen har skapt. En slik synliggjøring av matematikken i en aktivitet skjer ved at elevene reflekterer over de handlingene de har gjort. En slik refleksjon kan blant annet skje etter at aktiviteten er ferdig ved at elevene forteller hva de har gjort, og hvordan de løste oppgavene. Fokusering på framgangsmåter kan også skje underveis ved at elevene blir bedt om å sammenligne hverandres løsningsmetoder; Hvilken metode er enklest, gir alle metodene samme løsning, eventuelt hvorfor ikke, osv. Gjennom slike diskusjoner vil fokus rettes vekk fra den praktiske situasjonen og mot løsningsmetodene og det matematiske innholdet. Derfor er denne fasen spesielt viktig for elevenes læringsutbytte.

Refleksjon kan også skapes ved at læreren varierer situasjonen, ved at hun gir nokså like oppgaver fra to forskjellige situasjoner. Nå kan elevene vurdere sine egne løsningsmetoder på oppgavene fra de to situasjonene; Kunne man bruke samme løsningsmetode, hvorfor/hvorfor ikke? I kapittel 4.2 framhevet vi viktigheten av å variere oppgavene fra en bestemt situasjon. Det var nødvendig for å avdekke så mye matematikk som mulig fra den aktuelle situasjonen. Men som vi ser her, så er det også viktig å variere situasjonene. I ekorneksemplet kan det gjøres ved at man introduserer en ny situasjon hvor det også er snakk om fordeling, for eksempel at noen barn har samlet skjell i en haug på stranda og når de skal dra hjem, vil de fordele skjellene likt mellom seg. Ved å løse oppgaver med samme *struktur* (her: fordeling) fra forskjellige situasjoner, gis elevene en mulighet til å avdekke hva som er felles, underliggende prinsipper i situasjonen. Dermed får de også se at de løsningsmetodene som de bruker, har en viss generalitet. Her er det ikke snakk om abstrahering i streng matematisk forstand, men generalitet i betydningen at samme løsningsmetode kan brukes i forskjellige situasjoner. I kap. 7 gis en gjennomgang av hvilke strukturer som gir opphav til oppgaver i de fire regneartene. Der blir det blant annet vist at det er mange forskjellige underliggende strukturer som gir opphav til divisjonsoppgaver.

Variasjon antas altså å være av stor betydning for elevenes læring. Dette fordi det er variasjon som gjør at man fester oppmerksomheten på et eller annet. Hvis elever blir bedt om å regne flere sider med tosifret multiplikasjon, hvor eneste variasjon er størrelsen på tallene, så vil fokus bli rettet nettopp mot tosifret multiplikasjon med forskjellige tallstørrelser. Hvis de derimot blir bedt om å løse tekstoppgaver hvor man må variere regneart, vil fokus bli rettet mot det å finne riktig regneart til varierte tekstoppgaver. Tradisjonell matematikkundervisning har i stor grad fokusert på det første, regnetekniske aspektet og i mindre grad på det andre, problemløsende aspektet. I ei tradisjonell lærebok presenteres den aktuelle regnemetoden og deretter en rekke oppgaver som alle kan løses med denne metoden. Det som varierer, er tallene som inngår i de forskjellige oppgavene. Ut fra dette kan man tro at norske elever blir dårlige til å finne riktig regneart, men gode til å beregne svaret hvis regnearten er oppgitt. Denne påstanden blir underbygd med resultater fra andre deler av KIM-prosjektet i del 2 i dette heftet.

Her foreslås altså to måter å skape refleksjon på: enten ved at elevene sammenligner egne løsningsmetoder med andres, eller ved at de løser nokså like oppgaver fra forskjellige situasjoner. I begge tilfellene er det elevenes egne metoder som danner utgangspunkt for diskusjon, enten ved å sammenligne egne metoder mot andres eller egne metoder i to forskjellige sammenhenger. Mange vil stille seg spørsmål om hva som vil skje hvis elevene regner feil, hvis de kommer fram til en feilaktig framgangsmåte. Dette vil vanligvis skape en uoverensstemmelse som elevene selv vil kunne oppdage. Det kan for eksempel skje ved at to elever som har brukt forskjellige metoder, kommer fram til forskjellige svar. Lærerens rolle blir da å gjøre elevene oppmerksomme på denne uoverensstemmelsen og med det skape det Piaget kaller en *akkomodasjons*konflikt. Det betyr at den måten en elev tenker på, ikke helt passer med virkeligheten. For å løse en slik konflikt er det nødvendig at eleven selv blir klar over at hans tenkning er utilstrekkelig eller feilaktig. Det er ikke nok at læreren forteller ham det og så viser hvordan han bør tenke. Eleven må selv fornemme konflikten og innse at det er noe ved hans tenkning som må endres. Det er svært viktig at elevene selv innser at det er noe som ikke stemmer, og at dette ikke kun er noe som læreren hevder. Først da kan eleven ta et skikkelig oppgjør med den feilaktige tenkningen. Undervisning som tar sikte på å skape en kognitiv konflikt som elevene får anledning til å løse gjennom en fokusering på misoppfatninger, er grundig beskrevet i KIM-heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning*.

Det å løse slike konflikter kan være vanskelig. Noen ganger kan det skje gjennom diskusjoner med andre elever. I klassediskusjoner kan læreren forsøke å få alle elevene til å uttrykke hvordan de har løst enkelte oppgaver. Dette forutsetter en fortrolig atmosfære. Det må være lov også å legge fram feilaktige metoder uten at dette blir sett på som noe negativt. Det viktige i slike diskusjoner er at alle elevene engasjeres i samtaler om *hvordan* man kan løse de aktuelle oppgavene. Hvis to metoder gir forskjellige løsninger, bør elevene selv få diskutere hvorfor det er tilfellet, og hvis en metode er feil, argumentere for hvilken de tror er den riktige.

For noen elever kan det å legge fram egne løsningsmetoder virke truende, spesielt før de blir vant til denne formen for diskusjon. Da kan man be elevene først diskutere i smågrupper og at en elev fra hver gruppe legger fram gruppas syn. Da minskes denne trusselen i og med at det ikke er ens eget syn man forsvarer, men gruppas.

Det at elevene får en slik tillit, både til å utvikle egne metoder og at de selv er med og bestemmer hva som er riktig, gir økt trygghet i forhold til egne evner i matematikk.

4.4 Konsolidering, repetisjon

Når elevene har vært gjennom innledende aktiviteter hvor de har utviklet egne metoder og fått anledning til å reflektere over disse, er det nødvendig med en konsolideringsperiode. I denne fasen bør elevene løse nokså like oppgaver med den framgangsmåten de nettopp har utviklet, for eksempel ved å løse oppgaver i læreboka. En slik repetisjon bidrar til at den enkelte eleven blir sikrere i bruken av metoden, kunnskapen fester seg bedre i hukommelsen. Eleven har kunnskapsstrukturer som passer til de oppgavene han skal løse, og oppgaveløsningen går nærmest av seg selv. Med Piagets terminologi kalles dette *assimilasjon*. Gjennom repetisjon vil disse kunnskapsstrukturene bli styrket, og elevene blir tryggere på de framgangsmåtene de har utviklet.

En annen positiv effekt ved en slik fase er at elevene ofte vil modifisere løsningsmetodene sine. Dette gjelder spesielt når undervisningen er lagt opp etter de prinsippene som presenteres i dette heftet. Grunnen til det er at hvis elevene har utviklet egne løsningsmetoder, vil de ha et eiendomsforhold til disse metodene. Dette gjelder både skrevne algoritmer og i særlig grad metoder for hoderegning. Metodene man bruker for hoderegning, vil i svært stor grad være «ens egne» og utviklet på egen hånd.

Det at elevene utvikler egne metoder, alene og i diskusjon med andre, leder til to viktige momenter. For det første er metodene logiske for elevene. De har selv gjort overgangen fra den situasjonen som dannet utgangspunktet og funnet en algoritme som har gitt et svar. For det andre står eleven fritt til å modifisere denne algoritmen. Det vil ikke alltid være tilfellet hvis algoritmen er formidlet av læreren eller læreboka. Da vil algoritmen få et stempel av autoritet: Dette er den offisielle og beste løsningsmetoden. Hvorfor skulle læreren ellers ta seg bryet med å undervise den for elevene? Holdningsundersøkelser blant ungdomsskoleelever viser at de ofte tror at matematikk er utviklet av noen få «genier», og at de selv aldri kan klare å finne på noe selv. De tror at matematikk er å kopiere andre, enten læreren eller læreboka. Med en slik holdning vil man, når man har lært seg en «offisiell» algoritme, holde fast ved denne uansett hvilke problemer man står overfor. Har man derimot funnet på en løsningsalgoritme selv, står man fritt til å gjøre endringer på den.

Hvis elevene blir vant til å utvikle egne algoritmer, får de etter hvert tillit til egne evner i den retning. Derfor vil det ofte kunne skje at når elever blir bedt om å løse mange nokså likelydende oppgaver, vil de gjøre endringer i måten de løser den typen oppgaver. De vil kunne lete etter stadig mer effektive algoritmer. Det kan hende de gjør mindre endringer på den algoritmen de alt bruker, eller det kan være at de prøver ut helt nye algoritmer. På den måten vil gjentatt arbeid med nokså likelydende oppgaver føre til at elevene blir sikrere til å utføre en bestemt algoritme, eller til at de finner bedre og mer effektive måter å løse slike oppgaver på.

Det å løse mange nokså likelydende oppgaver vil altså i seg selv kunne føre til at enkelte elever prøver å finne mer effektive framgangsmåter. I tillegg kan slik effektivisering stimuleres i denne repetisjons- og konsolideringsfasen ved:

- fjerning av konkreter
- bruk av større tall
- se på spesielle egenskaper
- diskusjon med andre

Fjerning av konkreter
Dette punktet er nærmest åpenbart. Man kan tenke seg en elev som bruker en strategi hvor det å telle opp og flytte rundt på terninger er sentralt. Hvis terningene blir fjernet, vil denne eleven bli nødt til å endre strategi. Han kan i stedet for å la terninger representere de aktuelle objektene, for eksempel lage tegninger av objektene.

Bruk av store tall
Mange elever bruker telling til å løse praktiske problemer. Dette er gunstig på småskoletrinnet siden det gir elevene mulighet til å arbeide med nokså kompliserte matematiske aktiviteter og det gir fortrolighet med tallinja. Imidlertid er telling en svært tungvint måte å regne på. Derfor er det ønskelig utover i 1. og 2. klasse at elevene begynner å bruke mer effektive metoder. En måte å gjøre det på er å be elevene løse oppgaver med forholdsvis store tall. Telling, enten i hodet eller på tegninger/konkreter, er greit med tall opp til 20-30, men blir tallene større enn det, er det en ugunstig strategi. Det tar lang tid og mye arbeid å utføre selv enkle addisjonsoppgaver. Dette vil elevene innse selv, noe som kan gi dem insentiv til å lete etter andre og raskere måter å gjøre regnestykkene på.

Se på spesielle egenskaper
Ved å se på spesielle egenskaper ved tallene/regningen kan elevene få idéer til mer effektive algoritmer. Hvis man ønsker at noen elever skal innse nytten av å bruke faktakunnskaper ved addisjon i stedet for telling, er det flere mulige egenskaper man kan fokusere på. En egenskap er knyttet til kommutativitet, det at når du legger sammen to tall, blir svaret det samme uansett hvilken rekkefølge tallene kommer i. Læreren kan holde opp lapper med addisjonsstykker som elevene skal regne ut i hodet, annethvert stykke er en ombytting av det forrige:

$\boxed{\mathbf{3 + 2 =}}$ $\boxed{\mathbf{2 + 3 =}}$ $\boxed{\mathbf{2 + 6 =}}$ $\boxed{\mathbf{6 + 2 =}}$ $\boxed{\mathbf{7 + 4 =}}$ $\boxed{\mathbf{4 + 7 =}}$

Hvis elevene teller for å finne svarene ved de første oppgavene, vil de etter hvert kunne finne ut at annethvert svar blir det samme. Dermed er ikke veien lang til å innse at når man adderer, har ikke rekkefølgen noen betydning for svaret. Har man innsett det, behøver man ikke å huske så mange løsrevne fakta. Man behøver ikke lære seg hva 2 + 5 er hvis man har lært seg at 5 + 2 = 7. En annen egenskap til hjelp ved addisjon er at noen tallkombinasjoner er lettere å huske enn andre. Et eksempel på det er dobling; at 4 + 4 = 8, 6 + 6 = 12 o.l. En lærer kan hjelpe elever til å huske slike doblinger ved å gi oppgaver som fokuserer på dette. Hvis for eksempel to tvillinger har akkurat like mange av forskjellige ting, kan man regne på hvor mange ting de har til sammen. Hvis hver har 5 lekebamser, har de 10 bamser til sammen, hvis hver har 3 hårbånd, har de 6 til sammen, osv. Seinere kan man bruke lapper som i eksemplet over. Gjennom denne formen for hoderegning oppfordres elevene til å finne enklere måter å løse oppgaver på enn telling. Det er også enklere å huske de summene som gir 10 til svar enn mange andre summer. Det at 3 + 7 blir 10 til sammen, gjør at 3 og 7 kan kalles «tiervenner». Elevene kan få i oppgave å finne andre slike tiervenner, to tall som man vet blir 10 til sammen. Når elevene har etablert det som faktakunnskap, kan dette utnyttes til å finne andre summer: 7 + 4 er det samme som

7 + 3 + 1 altså 10 + 1 = 11. Også dobling kan utvides til andre summer: 8 + 7 = 8 + 8 - 1 = 16 - 1 = 15 (eller = 7 + 7 + 1).

I tillegg kan man bruke tallinja til å finne summer hvor man legger til en eller to. Dette vil kunne være en mer effektiv måte å gjøre utregninger på enn ved telling. Anta at noen elever teller når de skal legge sammen 7 + 1. Det vil si at de teller først opp 7, så en til, og til slutt teller de alle 8. Ved å arbeide mye med å gå opp (og ned) på tallinja, vil disse elevene etter hvert kunne se at det å legge til en er det samme som det å finne det neste tallet i tallrekka.

Et siste eksempel er å utnytte tieroppbyggingen av tallene for å finne summer. Skal man legge sammen 13 og 25 ved telling, så er det en veldig tid- og arbeidskrevende oppgave. Ved hjelp av konkretiseringsmateriell som samler tiere og enere for seg, kan elevene erfare at man kan legge tierne sammen for seg og enerne for seg. Da blir 13 + 25 et atskillig enklere regnestykke; det blir til sammen 3 tiere og 8 enere, altså 38.

Diskusjon med andre
Som nevnt tidligere, er det veldig viktig at elevene går gjennom en refleksjonsfase etter at de har arbeidet med noen oppgaver. I denne refleksjonsfasen bør elevene få legge fram sine løsningsmetoder for andre, enten i ei gruppe eller for hele klassen. Når de må legge fram sin algoritme for de andre, må de samtidig gå gjennom trinnene i algoritmen på en annen måte enn når de bruker den til å beregne et svar. Dette gir en betydelig læringseffekt. Det er en kjent erfaring at når man forklarer ting for andre, får man en bedre forståelse av stoffet selv. I en slik framlegging vil de andre elevene som hører på, i tillegg kunne få idéer til hvordan de selv kan løse denne typen oppgaver på en bedre og mer effektiv måte. Man kan få lure tips av det de andre presenterer. Dermed vil slik sammenligning av løsningsmetoder kunne føre til effektivisering av ens egne algoritmer.

5 Å uttrykke matematikk

Som tidligere nevnt i dette heftet, kan elever løse enkle tekstoppgaver allerede før de begynner på skolen. Da bruker de gjerne ineffektive algoritmer og uttrykker seg på tungvinte måter. Spesielt vil de intuitive metodene være uhensiktsmessige ved store tall. Se for eksempel på følgende oppgave:

> *Berit har 8 pakker med 10 skjell i hver pakke. En dag finner hun 15 nye skjell på stranda. Hvor mange skjell har hun nå til sammen?*

Skal man løse denne oppgaven ved å tegne alle skjellene og deretter telle dem, så tar det for det første svært lang tid, og i tillegg er det stor sjanse for å gjøre en feil før eller siden. Matematiske algoritmer er utviklet nettopp for å gjøre slike og andre beregninger enklere. Derfor må læreren legge opp til leik og aktiviteter som stimulerer elevene til å utvikle gode matematiske begreper og effektive algoritmer. Som tidligere nevnt, er det gunstig å ta hensyn til barnas ståsted og i tillegg å gjennomføre en undervisning hvor elevene får anledning til å arbeide med nye, formelle aspekter ved matematikken.

Med formell matematikk menes blant annet det å presentere matematikk på en mer formell måte, med matematikkens formelle symbolspråk. Matematikk kan imidlertid uttrykkes på mange forskjellige måter. Vi skal her se grundigere på hvilke måter matematisk tenkning kan representeres, og på styrker og svakheter ved de forskjellige representasjonsformene:

1 Direkte modell
2 Konkret modell
3 Bruk av billedlige representanter
4 Bruk av ikoner (en-til-en)
5 Bruk av symboler

Hvis du skal løse en oppgave hvor utgangspunktet er 8 epler, så kan dette representeres ved at du henter 8 epler. Dette danner en direkte modell. Styrken med en direkte modell er naturligvis dens nærhet til problemstillingen. Hvis oppgaven er *«Du har 8 epler og spiser opp 2, hvor mange har du igjen?»*, kan du spise 2 av de 8 eplene og regne ut hvor mange du har igjen. Eller rettere sagt: Du behøver ikke engang å regne det ut, du kan bare vise fram de resterende og si: «Så mange har jeg igjen!». Svakhetene ved direkte modeller er at man ikke alltid har de tingene man regner på like tilgjengelig, og at arbeidet med utregningen er svært knyttet til den aktuelle problemstillingen. Den framgangsmåten som blir brukt til å finne et svar, kan ikke uten videre overføres til andre situasjoner.

I en konkret *modell* brukes andre konkrete objekter i stedet for eplene. Man kan for eksempel bruke små terninger eller brikker og late som om hver terning/brikke er et eple. En studie av Carpenter & al (1993) viser at 5 år gamle barn som har fått opplæring i det å representere tekstoppgaver med klosser, kan løse regneoppgaver innen alle 4 regnearter med tall opp til 30. Barna i studien lærte å bruke terninger til å representere de størrelsene som inngikk i de oppgavene de arbeidet med. Ved å bruke terningene kunne de «spille» det som foregikk, og omtrent 75 % av barna klarte å løse oppgaver som *«Tad hadde 15 guppier. Han puttet 3 guppier i hvert glass. Hvor mange glass puttet Tad guppiene oppi?»*. Som tidligere nevnt, var det to elever som løste ekorn-oppgaven ved å bruke terninger til å representere de nøttene som skulle fordeles. Denne formen for representasjon avspeiler den konkrete problemsituasjonen, man bruker terninger eller lignende i stedet for de faktiske tingene i situasjonen. Som ved direkte modeller gjør konkrete modeller det enkelt for små barn å leve seg inn i situasjonen og dermed finne svar på oppgaver. En fordel med konkrete modeller framfor de virkelige objektene er naturligvis at terninger eller lignende er mer tilgjengelig. En ulempe er at også dette er en tungvint måte å finne svar på.

En annen måte å representere en mengde på er ved å tegne de aktuelle tingene. I eksemplet her kan det gjøres ved å tegne åtte epler. En mer abstrakt framstillingsmåte er å tegne ikoner. Et ikon er en svært forenklet tegning av objektet. For eksempel kan man lage tellestreker, en strek for hvert objekt. Åtte epler kan på denne måten framstilles ved åtte streker eller slik: ~~||||~~ |||

Det å spise to epler kan illustreres på tegningen ved enten å viske ut to streker, eller ved å angi på en annen måte at de blir spist. Deretter kan man finne svaret ved å telle de resterende. Det er mange fordeler med diagrammer og tegninger, og som tidligere nevnt er dette en av de mest nyttige strategiene for problemløsning i matematikk (Hembree, 1992). Grunnen til det er at ved å representere en oppgave ved hjelp av et diagram eller en tegning, vil eleven kunne få en mye klarere oppfatning av problemstillingen, og han vil kunne få hjelp til selve utregningen av et svar. I tillegg er dette en strategi som ofte lar seg gjennomføre fordi man som regel har papir og blyant tilgjengelig. Det hjelper også at selv små barn er vant til å lage tegninger hvor selve tegningen representerer virkelige figurer eller objekter. Dette er illustrert ved ekornoppgaven hvor de aller fleste førsteklassingene klarte å dele 14 nøtter på 3 ekornunger ved å bruke de 14 nøttene som alt var tegnet på det arket de fikk utlevert. Når de etterpå skulle finne svar på andre oppgaver, ble disse oppgavene i de aller fleste tilfellene også løst ved at elevene først tegnet de nøttene som skulle fordeles, og deretter hvordan selve fordelingen skulle foregå. På den måten fungerte tegningen som et hjelpemiddel til både å få klarhet i problemsituasjonen og til å beregne en løsning. Svakheten ved slike tegninger er igjen at de også er nokså tungvinte. Det går atskillig raskere å løse ekornoppgaven symbolsk: 14:3 = 4 og 2 til rest.

Den mest abstrakte måten å representere antall på, er ved å bruke symboler. For eksempel bruker vi et bestemt tallsymbol for hvert antall. Nå brukes dette symbolet for åtte: 8. Til andre tider og i andre kulturer har andre symboler blitt brukt. Romerne brukte VIII, Maya-indianerne ville ha skrevet: ⋯ . Den fundamentale forskjellen mellom bruk av symboler og de øvrige representasjonsformene er at symbolene (som oftest) ikke har noen mening i seg selv. Når man ser 8 streker, kan man forstå at det dreier seg om åtte av et eller annet. Men symbolet 8 gir ikke umiddelbart en assosiasjon til det bestemt antallet. Alle er nødt til å lære hvilken mening som tillegges slike symboler. Selv om det som regel er raskest å regne med symbolsk representasjon, må man i undervisningen huske på at det er en omstendelig prosess å bli fortrolig med nye symboler. Meningen med et symbol kan sjeldent avledes direkte fra selve symbolet, meningen må avledes fra hvordan symbolet blir brukt, fra de erfaringene man gjør ved bruk av symbolet.

Ved forskjellige representasjoner er den matematiske ideen altså den samme, men den framstår på forskjellige uttrykksmåter. Når man skal representere et antall, er konkreter og tegninger/ikoner de mest intuitive måtene. Skal man uttrykke seg ved symboler, må man først lære seg hvordan dette gjøres. Men når man først har lært å bruke alle de forskjellige representasjonsformene, er den konkrete modelleringen den mest tungvinte, og bruk av symboler den letteste. Aller lettest er det å bruke de matematiske symbolene – de er laget nettopp for å gjøre beregninger lettest mulig. Derfor legges det i matematikkundervisningen stor vekt på at elevene skal lære å bruke matematiske symboler. For å kunne løse et problem ved hjelp av symboler og symbolmanipulasjon, må man både ha godt innblikk i problemsituasjonen og ha god beherskelse av symbolene.

Den tradisjonelle matematikken har i stor grad fokusert på oppøving av elevenes evne til å bruke de formelle matematiske symbolene. Dette ses blant annet ved det at elevene i første klasse kun arbeider med tallene (tallsymbolene) opp til ti. Svært mange 6-åringer er i stand til å arbeide med atskillig større tall, men dette vil ofte fordre at de uttrykker disse tallstørrelsene på andre måter enn ved de formelle symbolene. I kap. 6 blir det vist eksempler på elever i 1. klasse (7 år gamle) som gjør beregninger med tall over 1000. Selv om det er viktig å utvikle elevenes fortrolighet med de formelle symbolene, er det svært gunstig for å utvikle elevenes matematiske kompetanse at de får anledning til å arbeide med utfordrende problemstillinger med mer familiære representasjonsformer. Det er tidligere vist i forbindelse med ekornoppgaven at når elever lærer å uttrykke seg med tegninger og diagrammer, vil de være i stand til å løse kompliserte matematiske problemer. Dermed kan det legges opp til en atskillig mer utfordrende og spennende matematikkundervisning. Det forløsende er at elevene får uttrykke seg på en måte som er naturlig for dem.

DEL 2 GRUNNLEGGENDE BEGREPS-DANNING OG UNDERVISNINGS-AKTIVITETER

I denne delen presenteres de ulike matematiske emnene som er mest aktuelle på småskoletrinnet. Emnene presenteres i hovedsak langs tre dimensjoner: som matematiske begreper, slik begrepene blir brukt i dagliglivet og slik begrepene oppfattes av elevene. Hele presentasjonen ledsages av praktiske undervisningsaktiviteter.

6 Tall

I L97 framheves tall og tallregning som de viktigste emnene i matematikkfaget: *Tallforståelse, behandling av tall og bruk av regneartene vektlegges og skal være et fundament i arbeidet med faget.* Tallbegrepet er et komplekst begrep ved at det er sammensatt av mange ulike aspekter. Vi skal i dette kapitlet se på noen av disse. Vi kommer tilbake til tallregning i neste kapittel selv om dette er to emner som er nært knyttet til hverandre.

Når dannes tallbegrepet? Det er nok ikke mulig å svare på et slikt spørsmål. Den enkeltes tallforståelse utvikles gjennom hele livet. For eksempel er det grunn til å tro at ditt eget tallbegrep vil endres/utvides mens du leser dette kapitlet. En begynnende tallforståelse kan man spore hos svært små barn. Det er gjort undersøkelser med barn som kun er noen måneder gamle, hvor hvert barn fikk se et ark med to figurer av et eller annet slag. Dette syntes barna var interessant, noe som kom til uttrykk gjennom barnas bevegelser (øyne, armer o.a.). Så ble arket fjernet, og et annet med to andre figurer ble holdt fram. Slik fortsatte man med stadig nye figurer, to på hvert ark, helt til barna ikke viste den samme interessen lengre. Da holdt man opp et ark med tre figurer foran dem, og i de aller fleste tilfellene ble barnas interesse tent på nytt. På denne måten kan man hevde at selv babyer har et tallbegrep. Denne evnen til å kjenne igjen mengder uten å telle kalles *subitizing*. Man antar at et menneske kan kjenne igjen antallet i mengder med opp til 5 eller 6 elementer uten å måtte telle hvert element i mengden. I den følgende delen skal vi se nærmere på den første tallforståelsen.

6.1 Den begynnende tallforståelsen

Ifølge Piagets stadieteori har barn en dårlig tallforståelse før de har utviklet *konservasjonsprinsippet*, noe som ifølge Piaget inntreffer i 6-7-årsalderen. Testen Piaget brukte for å teste om barn hadde utviklet denne evnen, er følgende: Elevene får se noen brikker lagt på ei rekke på et bord. Så blir brikkene flyttet slik at de utgjør ei lengre rekke:

Oppgaven til barna er å si hvor det er flest brikker, eller om det er like mange i de to rekkene. Piaget finner her at barn yngre enn 6 år svært ofte svarer at det er flest brikker i den rekka hvor brikkene er mest spredt.

Hughes (1986) stiller seg tvilende til Piagets teori. Han mener at barna svarer slik de gjør fordi de har problemer med å skjønne hensikten med denne oppgaven. I stedet for å gi dem slike «meningsløse» oppgaver, ga han dem i en undersøkelse følgende problem: Han hadde tre like bokser med lokk. I den første la han én terning, i den andre to terninger og i den tredje la han tre terninger. Så satte han på lokkene og byttet raskt om rekkefølgen på boksene. Deretter skulle barna si hvor mange terninger det var i de forskjellige boksene. Boksene var ugjennomsiktige, så barna klarte svært sjeldent å gjette riktig. De fikk imidlertid lov til å prøve en gang til, og nå fikk de i tillegg lov til å skrive et eller annet på boksene som hjelp til å huske det riktige antallet. Når lokkene nå ble satt på og boksene byttet om, klarte unger helt nede i 3-4-årsalderen å si riktig antall på grunnlag av det de hadde skrevet på boksen. Noen skrev tall, andre skrev andre tegn som skulle bety antall terninger i boksen. De fleste lagde tegninger av sirkler eller andre objekter, like mange objekter som det var terninger i boksen. Det Hughes hevder er at når det å vite antallet har en hensikt som barna forstår, viser barna god tallforståelse lenge før 6-årsalderen. Han synes ikke det er så rart at de bommer på Piagets oppgave. Det skyldes at det trengs modning for å skjønne hva utspørreren egentlig er på jakt etter, og det skyldes *ikke* at de har en dårlig tallforståelse.

En annen undersøkelse av barns talloppfatning ble gjennomført av Irwin (1996). Den oppgaven hun forela barna, gikk ut på at hun viste dem noen knapper som hun holdt i den ene hånden sin, og hun lot barna telle hvor mange knapper det var. Så lukket hun neven sin rundt knappene og overførte noen av knappene, mens barna så på, over til den andre neven, som hun så lukket. På den måten ble det totale utgangspunktet delt opp i mindre deler. Til slutt skulle barnet enten fjerne en knapp fra ei hånd, legge til en knapp eller overføre en knapp fra en neve til den andre. Den endelige oppgaven for barna var å si hvor mange knapper det til slutt var i de to nevene til sammen. Dette er en test som fokuserer direkte på det Piaget kaller konservering av antall. Konservering betyr her at man innser at et antall av noen objekter forblir det samme selv om man manipulerer hvordan objektene er organisert. Om de for eksempel blir delt i to hauger, vil det totale antallet objekter i de to haugene forbli det samme selv om man fjerner et objekt fra en haug og tilføyer et objekt i den andre, osv. I følge Piaget inntreffer denne evnen til konservering i 6-7-årsalderen. Men på samme måte som Hughes utfordrer testen til Irwin denne påstanden. Hun finner at over halvparten av 5-åringene svarer riktig på oppgaven. Antallet som svarer riktig, stiger jo eldre barna blir opp til 95 % for 8-åringene.

Hva er grunnen til at Irwin og Hughes får andre resultater enn Piaget? Svaret på det finner man antagelig hvis man ser på hvilken *hensikt* barna har med tellingen sin. Barn har ofte andre grunner for å telle enn det voksne har. Hvis du spør en 5-6-åring om *hvorfor* han teller, vil han kanskje se rart på deg, andre svarer «fordi mamma forteller meg hvilke tall som kommer». Mange svarer på spørsmålet om hva regning er med å begynne å telle. Når barn lærer å telle av sine foreldre, vil hovedvekten ofte legges på det å kunne tallrekka, ikke på det å finne antallet av en eller annen mengde. I enhver aktivitet lærer ikke barna kun den spesifikke aktiviteten. De lærer også noe om hensikten og viktigheten med aktiviteten og om når aktiviteten dukker opp. Når det gjelder telling, kommer mange barn til skolen med den oppfatningen at hovedhensikten med det å telle er å framsi ei lang rekke tall. Se på dette eksemplet:

L: Anne har 2 boller i en pose og 3 i en annen, hvor mange boller har hun til sammen?
E: 5
L: Så hva blir 2 pluss 3 ?
E: ..eh..6

Det kan hende eleven svarer på det første spørsmålet ved å telle på fingrene eller ved å se for seg alle bollene og så telle dem. Eleven forstår imidlertid ikke det andre spørsmålet, så han bruker en annen strategi. Han ser ikke lenger på oppgaven som noe som har med det å legge sammen to tall. I den andre oppgaven nevner læreren to tall som ikke angir antallet av et eller annet, tallene står alene. Den erfaringen eleven har gjort med slike tall kommer fra telling ved å framsi tallrekka, altså uten at man har telt noe spesielt. Dette prøver eleven å overføre til denne oppgaven, så han svarer «6», tallet som kommer etter 5 i tallrekka. Et annet mulig svar hadde vært «4» siden det følger etter 2 og 3.

På den måten vil elevene ofte ha andre hensikter med telling enn voksne. Det er derfor viktig at læreren i den begynnende regneundervisningen ikke kun fokuserer på selve regningen, men at hun også viser *hvorfor* regning er nyttig. Dette betyr naturligvis at det å telle må knyttes til situasjoner hvor tellingen har en hensikt, hvor det å finne antall objekter spiller en viktig rolle.

6.2 Tallenes forskjellige egenskaper

Tall brukes i samfunnet på mange forskjellige måter. Det innebærer at også elever på småskoletrinnet har gjort erfaringer med tall i svært mange og til dels svært forskjellige situasjoner. Hvis vi ser på et bestemt tall, for eksempel 30, så møter barna dette tallet i sammenhenger som: 30 km/t som fartsgrense på trafikkskilt, de kan kjenne noen som fyller 30 år, de kan fylle et akvarium med 30 liter vann, det kan hende de kjøper en leke som koster 30 kroner, kan hende slutter deres telefonnummer på 30, og de kan finne fram til kanal nummer 30 med fjernkontrollen. Alle disse erfaringene er med på å prege barnas tallbegrep. Dette viser at den enkeltes tallbegrep er svært sammensatt, og at det ikke er nok kun med opplæring i formell matematikk. Det å forstå hva 30 liter vann er, kan ikke utledes direkte fra tallet 30. Tilsvarende kan heller ikke en pris på 30 kr for en leke forstås direkte fra tallet 30. Det er nødvendig både å fokusere på tallene og deres matematiske egenskaper og bruken av tallene i praktiske sammenhenger. Først gjennom en slik tosidig fokusering kan et godt tallbegrep utvikles.

I det følgende presenteres aspekt ved tallbegrepet som er spesielt aktuelle for barn på småskoletrinnet:

- Kardinalitet, det å angi antallet i en mengde, for eksempel antall epler i en pose.
- Ordinalitet, det å ordne noe i rekkefølge, for eksempel gatenummer.
- Som symboler uten referanse til antall e.l., som telefonnummer og bilskilt.

Det er viktig å skille mellom disse forskjellige bruksmåtene, for de angir fundamentalt forskjellige aspekter ved tallbegrepet. Hvis man oppgir et tall som forteller hvor mange mennesker det er i en kinosal, bruker man tallenes kardinale aspekt. For å finne et slikt antall kan man telle alle som går inn i salen. En annen måte er å be alle om å sette seg. Hvis man vet hvor mange seter det er i kinosalen, kan man bruke det til å sammenligne. Hvis man er så heldig at alle setene blir brukt og det ikke er noen mennesker til overs, vil antall mennesker naturligvis være det samme som antall seter. To mengder som inneholder like mange elementer (antall stoler er lik antall mennesker i kinosalen) har samme kardinalitet. Det er dermed to måter å teste om dette er tilfellet: Vi kan telle antall elementer i hver av mengdene og se om vi kommer fram til samme antall. Eller vi kan koble mengdene sammen slik at et element fra den ene mengden danner par med et element fra den andre mengden. Hvis vi da ikke får noen enslige elementer, er det vist at mengdene har samme kardinalitet uten at vi har telt noe som helst.

Det ordinale aspektet innebærer at tallene har en helt bestemt ordning, en helt bestemt rekkefølge. Hvis man sammenligner med alfabetet, vil man kanskje si at bokstavene også har en bestemt rekkefølge: a, b, c, d, … Men denne rekkefølgen er kun noe vi har bestemt oss for slik at vi lettere kan huske bokstavene, og for at vi lettere kan finne fram i lister som leksika, telefonkataloger, kartotek o.l. Denne rekkefølgen er helt tilfeldig, den bygger ikke på noen logisk struktur. Det er ingen ting i veien for at ikke de siste bokstavene i vårt alfabet skulle ha vært: x, y, z, ø, æ, å. Blant annet er rekkefølgen på bokstavene som angir tonene i C-dur-skalaen følgende: C - D - E - F - G - A - H - C. Hvis man i stedet startet på A (som er kammertonen) og bytter ut H med B (som er en halvtone lavere enn H), får man de sju første bokstavene i alfabetet: A - B - C - D - E - F - G - A. Men denne rekkefølgen brukes altså ikke, i stedet har man byttet om, og det synes alle er helt greit.

En slik ombytting hadde ikke gått greit når det gjelder tallfølgen! All telling for å finne et antall (kardinalitet) mister sin hensikt hvis man starter et annet sted enn én. Like galt går det hvis man bytter om rekkefølgen på tallene, noe mange unger gjør det helt opp til åtte-ni-årsalderen. Hvis man kun ser på ordinalitet, så er rekkefølgen det viktige. Hvis jeg har startnummer 34 i et skirenn og Vegard Ulvang nummer 35, kan jeg anta at han er den mannen som starter etter meg. Det vil gjelde uavhengig av hvem eller hvor mange som starter før oss. Det kan f. eks. hende at de ti første numrene ikke er i bruk, slik at jeg er den 24. som faktisk starter. Da er vi inne på kardinalitet igjen, altså at vi ser på det antallet som har startet. Det ordinale aspektet innebærer kun at 35 kommer etter 34.

Som en tredje mulighet brukes tall uten at de verken refererer til antall eller til plassering i ei rekke. Det er som nevnt tilfellet med bilnummer og telefonnummer. Her kunne tallene like gjerne bli byttet ut med andre symboler. For eksempel kunne bilnumrene like gjerne bestått av bokstaver, i enkelte land, bl.a. USA, kan de gjøre det. En fordel med å bruke tall er at de er lett gjenkjennelige.

Jeg spurte en gang ei jente på fem år hvor mange tallerkener hun satte på bordet, hun skulle hjelpe til å dekke på. Da telte hun høyt og tydelig for meg: *en, to, tre, fire, fem, **fem**!* Så gikk hun etter glass, og jeg spurte henne hvor mange glass hun satte på bordet: *en, to, tre, fire, fem, **fem**!* Til slutt gikk hun etter teskjeer. Igjen spurte jeg om hvor mange skjeer hun hadde, og igjen telte hun som de første gangene. Dette viser at hun har god forståelse av ordinalitet for såpass små tall. I tillegg visste hun at det siste tallet var det som anga antallet. Dermed hadde hun en viss forståelse av kardinaliteten. Men hun brukte ikke det at kardinaliteten kan avgjøres ved å sammenligne mengder ved å danne par av elementene. Her kunne hun ha sett at glass og tallerkener dannet par, og at det dermed måtte være like mange glass og skjeer som tallerkener.

Det er viktig for en lærer å kunne skille mellom disse forskjellige aspektene ved tallene. For å gi passende undervisning til en elev eller ei gruppe av elever, må læreren vite hvilke utfordringer de trenger: Hvis de er usikre på det ordinale aspektet, bør de arbeide med aktiviteter som fokuserer på tallsekvenser. En måte er å bruke sanger som fokuserer på dette («En-og-to-og-tre-indianere…»). En annen måte, som finnes i de fleste lærebøker, er å lage tegninger ved å la blyanten gå fra punkt til punkt langs stigende tall. Hvis derimot noen elever sliter med det kardinale aspektet, bør de arbeide med aktiviteter som styrker forståelsen av antall. Mange spill fokuserer på nettopp dette. Et eksempel er terningspill, hvor man skal flytte en brikke samme antall plasser som det er øyne på terningen.

6.2.1 Telling

For mange barn er telling det samme som å uttale ei regle. De lærer denne regla fra de er svært små, og utvider stadig lengden på den. Først læres «en to tre», dernest tallene opp til ti. Et barn vil ofte lære noen brokker av regla før andre. En femåring vil kunne telle «en to tre», så være usikker fram til «åtte-ni-ti», som imidlertid kommer som et skudd.

For eldre barn og voksne følger tallene fra 11 til 19 som en logisk fortsettelse av tallrekka: Det er tallene fra en til ni om igjen med en tier i tillegg. Denne logikken kommer kun til syne når vi ser tallene nedskrevet: 11, 12, 13, 14, den kommer ikke fram i måten vi uttaler disse tallene: «elleve», «tolv», «tretten», «fjorten». Derfor har førskolebarn vansker med å avsløre dette systemet. For dem er det kun en videreføring av tallrekka som ikke har noen bestemt logikk knyttet til oppbyggingen av tallene i tiere . De vil oppdage denne logikken først når de begynner å lære seg enda større tall: tjueen, tjueto, tjuetre og trettien, trettito, trettitre. Dette betyr at barna ser på tallene opp til 20 som én lang «setning». Når små barn teller, kan dette ses ved at de teller raskt opp til tjue. Dette utgjør den første setningen. Deretter teller de tierne hver for seg, gjerne med en liten pause før de begynner på neste tier. I Japan og Kina uttales tallene fra 11 og oppover som en-en, en-to, en-tre osv. Det blir på samme måte som vi teller større tall, og det at japanerne og kineserne teller mer systematisk enn oss, gjør at barna der raskere lærer å telle.

Når barna begynner på skolen, kan de fleste telle opp til 29. Men det å lære alle tierne «tretti, førti, femti …» og rekkefølgen på dem er et stort sprang. Mye av vanskene ligger i at tallene her blir så store at de ikke gir mening for barna. De har aldri hatt bruk for å telle opp mengder større enn tretti. Hvis de har så mange klinkekuler, vil de kun si at de har «mange». Og hvis de skal sammenligne hvem som har flest av et eller annet av store mengder, vil de bruke andre strategier, for eksempel kjenne hvem som veier tyngst, eller se på hvilken mengde som har størst omfang. Her er et eksempel på hvordan en gutt på sju år telte når han skulle telle så langt han kunne: Først telte han raskt og riktig opp til 39. Deretter sa han «50» og telte opp til 59. Så begynte han på 30 igjen og telte opp til 39. Deretter fulgte: «39, 80, 81, 82, …, 89, 30, 31, 32, …, 39, 50, 51, 52, …, 59, 30, 31, 32, …, 39, 40, 41, 42, …, 49, seis, fårten, fårten-en, fjårten-to, fjorten-tre, fjorten-fire. He?». Seinere klarte han uten problemer å finne fram 16 terninger. Denne gutten hadde et godt tak på tallene opp til omkring tjue, kanskje opp til 29, men han ser på telling som det å si ei regle. Og på samme måte som at regler kan gjentas, kan også tallene gjentas. Gutten virket spesielt sikker på regla fra 30 til 39 og fra 50 til 59. Tallbegrepet hans innbefatter ikke det at tierne telles opp omtrent på samme måte som tallene opp til ti.

Ei jente, som også var sju år, fortalte at hun kunne telle til hundre, men da måtte moren hennes være til stede. Hun telte greit opp til 29. Da stoppet hun og ventet på at noen skulle si hvilken tier som kom, det var det som var morens oppgave. Da det ikke ble sagt noe, fortsatte hun med «30, 31, 32, …, 39». Så stoppet hun igjen. Etter en kort pause hvor hun heller ikke nå fikk noen respons, fortsatte hun å telle fra 40 opp til 49. Deretter kom tierne hulter til bulter, 60, 80, 50, før hun stoppet. Hver gang hun hadde bestemt seg for en tier, kom alle tallene som hører til den tieren umiddelbart.

Disse problemene med å huske rekkefølgen på tierne kan synes underlig på voksne. Grunnen til det er at vi er så vant til å se tallene representert skriftlig. «Tjue» er da et to-tall med en null etter, «tretti» er neste tier; et tre-tall med en null etter. Men små barn har ikke denne referansen. For voksne er «ti» spesielt, fordi det er det tallet hvor man begynner å bruke to sifre. Deretter begynner man nærmest å telle på nytt: en-en blir elleve, en-to blir tolv osv. For barna er ikke ti spesielt på denne måten. For dem er det kun neste ord i regla. Når 7-åringer får se tallet 16, kan mange se at det er et 16-tall. Men de har ikke forstått den logiske oppbygningen i denne måten å symbolisere tall på. Hvis de skal angi med terninger hva 6-tallet står for, finner de fram 6 terninger. Men skal de angi hva 1-tallet står for, finner de som oftest fram kun en terning.

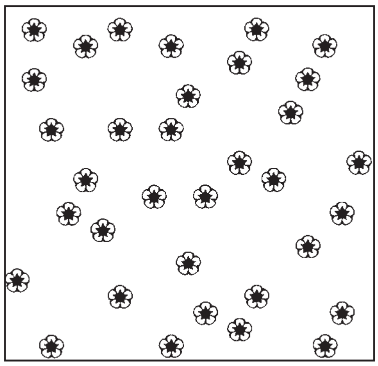
En svensk studie viste at 25 % av 6-åringene i Sverige minst kan telle opp til 100 (Ahlberg & Hamberger, 1995). Disse barna vil også kjenne andre sider av tallbegrepet. For eksempel kan de angi hvilket tall som kommer umiddelbart *før* og *etter* et tall på tallinja. Når de kommer over hundre, får de aller fleste barn i den alderen problemer. Dette kan skje selv om de har forstått systemet med oppbygning i tiere og hundrere. De kan få problemer både fordi de har liten erfaring med å behandle så store tall, og fordi de kan ha problemer med å huske hvilket tall de nettopp uttalte. Det blir det samme som hvis voksne skal telle fra 43.381.750. Hvis du prøver det, merker du at du etter en stund virkelig må anstrenge hjernen for å hanskes med alle sifrene. Selv om barna har forstått at «to hundre» kommer etter «hundre», «trehundre» etter «to hundre» osv, vil de kunne ha problemer med å gjennomføre den faktiske tellingen. Disse barna vil gjerne ha en presis oppfatning av at telling brukes til å angi et presist antall selv om antallet blir stort. Selv om de aldri vil telle opp mengder med flere hundre klinkekuler, så har de forstått at de prinsipielt kan gjøre det.

Som en oppsummering kan vi si at små barn teller etter følgende prinsipper, og i 5-7-årsalderen, vil de beherske disse prinsippene i varierende grad:

- Når man teller store tall, skal de grupperes i «setninger» på 10. Unntaket er de 20 første tallene, de utgjør en slik «setning» alene.
- Det første tallet i en «setning» er på form x-ti når tallet er større enn tjue.
- Det første tallet i hver setning gjentas ved hvert tall i denne setningen.
- Hver setning følger mønsteret x-ti-1, x-ti-2 opp til x-ti-9.
- Det siste tallet i en setning, x-ti-9, må følges av en annen tier-setning.
- Det finnes et spesielt sett med tiernavn, som må brukes i en bestemt rekkefølge.

6.3 Gruppering

Hvor mange blomster er det i denne firkanten?



Når man skal telle større mengder, kan det være problematisk bare å telle en og en. Et problem er at det er vanskelig å holde styr på hvilke blomster som er telt, slik at alle blir telt, og at ingen blir telt flere ganger. Et annet problem er at det kan bli vanskelig å holde styr på selve tellingen. Hvis man blir distrahert, er det dumt å måtte starte helt på nytt igjen. For å unngå disse problemene kan man bruke flere strategier:

- Trekk en strek fra blomst til blomst.
- Sett et tall ved hver blomst etter hvert som de blir telt.
- Del kvadratet inn i mindre deler, tell antallet i hver del og legg sammen.
- Grupper blomstene i to-og-to, tre-og-tre eller fem-og-fem.

Alle disse strategiene vil barn på småskoletrinnet kunne bruke. Den mest kraftfulle, spesielt når antallet blir svært stort, er den siste. Et problem med den første er at det kan være uoversiktlig å se om streken går innom alle blomstene, og et problem med den andre er både at det tar tid å skrive alle tallene, og at det kan bli lite plass til skrivingen. Den tredje strategien er nokså lik den siste, men hvis man allikevel skal gruppere blomstene, er det bedre å gjøre det med likt antall i hver gruppe. Da går det atskillig raskere å gjennomføre den endelige tellingen. En annen fordel med gruppering er at det kan gjøres også ved telling av virkelige objekter, ikke bare ved telling av figurer på et papir.

For å lette tellingen av større mengder er det svært gunstig å gruppere. En mye brukt måte er å gruppere i femmere ved å sette fire streker og den femte på tvers. Når man så skal telle opp, kan man telle femmerne to-og-to slik at det blir grupper med 10 i hver. Det er også vanlig å telle i toere. Hvis man skal telle antall epler på et fat, kan man telle to-og-to: to, fire, seks, åtte, ti, tolv osv.

Denne *grupperingstanken* er et av de mest sentrale aspektene ved et tallsystem. Så å si alle tallsystemer som har vokst fram i ulike kulturer rundt omkring i verden, hviler på denne ideen. I vårt tallsystem grupperer vi i tiere. Derfor kalles dette tallsystemet et *titallssystem*. Det har 10 som *base* eller grunntall. I tillegg er det et *posisjonssystem*. Det betyr at den posisjonen symbolene har er avgjørende for hvilken betydning de har. For eksempel i tallet 34 har tretallet og firetallet forskjellig betydning. Tretallet står for antall tiere, 3 tiere tilsvarer 30 enere, mens firetallet står for antall enere.

En annen måte å skrive tall på er ved et *addisjonssystem*. Den gamle egyptiske sivilisasjonen brukte et slikt system. De hadde, som oss, ti som base, de grupperte altså i tiere. I addisjonssystemer har ikke posisjonen til tallsymbolene noen betydning. I stedet brukes forskjellige tallsystemer for de ulike verdiene. I det egyptiske systemet bruktes tegnet | for en, ∩ for ti og 𓍢 for hundre. Tallet 253 kunne dermed skrives på flere måter, f. eks.:

𓍢 𓍢 ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | | | eller | | | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ 𓍢 𓍢

Rekkefølgen på symbolene har altså ingen betydning som i vårt posisjonssystem. Også det romerske tallsystemet er et additivt system, men med et unntak: Når et mindre tall står foran et større, skal det trekkes fra. Her står I for en, V for 5, X for ti, L for femti og C for hundre. Skrevet med romertall blir 253 lik CCLIII, mens 64 blir LXIV.

Slike additive systemer kan for oss kanskje virke noe underlige og tungvinte, men i Norge bruker vi faktisk et slikt system selv når vi uttaler tallene. I for eksempel 44 uttaler vi de to firetallene forskjellig: Det første uttales «førti», det andre «fire». Hadde vi hatt et reint posisjonssystem, ville vi sagt «fire-fire». Siden vi her uttaler tallene som i et addisjonssystem, kan vi uttale de to symbolene i hvilken rekkefølge som helst. For tallet 27 kan vi like gjerne si «sju-og-tjue» som «tjue-sju». I et posisjonssystem vil naturligvis «to-sju» være noe annet enn «sju-to».

Det finnes andre kulturer som har brukt andre tall enn ti som base. For eksempel grupperte mayaindianerne i tjue. Når de skrev 13 (deres symboler var annerledes), mente de ikke en tier-gruppe pluss tre til. De mente en tjuegruppe og tre til. Det vil vi skrive som 23, altså som to tier-grupper og tre til. Danskene teller ennå omtrent på den måten: «fir-og-tress» betyr tre tjue-grupper og fire til, altså 64.

Dette viser at det ikke er noe som er «naturgitt» ved vårt tallsystem. Det hele bygger på ideer og konvensjoner som menneskene er blitt enige om i løpet av en svært lang utviklingsperiode. Det kan derfor ikke forventes at det er lett for elevene å få tak på alle disse ideene på kort tid. For å illustrere noen av problemene som elever kan møte, gis her noen oppgaver knyttet til regning i et annet tallsystem: 6-tall-systemet. Det er et posisjonssystem med 6 som base. Da kan man kun bruke følgende symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Disse grupperes slik at 10_6 betyr en seksergruppe og ingen enere. 24_6 betyr to seksergrupper og fire enere, altså $2 \cdot 6 + 4 = 16$. Se nå om du kan løse følgende oppgaver:

Skriv i titallsystemet:

$35_6 =$ _______

$52_6 =$ _______

Regn først ut i 6-tall-systemet og skriv så i tiltallsystemet:

$23_6 + 24_6 =$ _______ = _______

$51_6 - 15_6 =$ _______ = _______

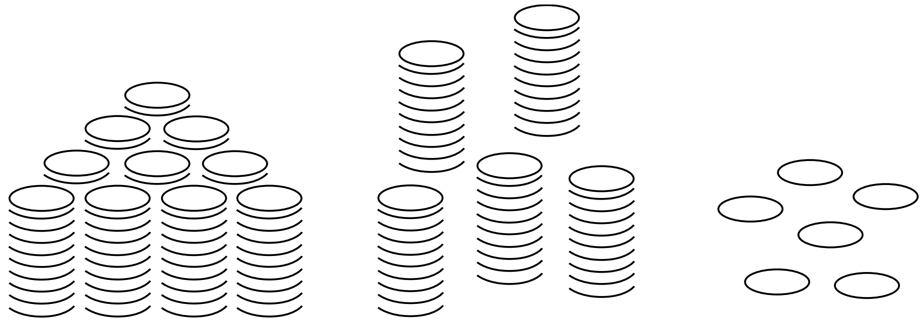
Det er kanskje ikke så lett! Ikke så rart at små barn har problemer når de får oppgaver med slike symboler. For å lette regningen kan man se for seg at det er egg man regner på. En seksergruppe skulle da være en eggkartong med 6 egg. 35_6 blir 3 kartonger og 5 i tillegg, altså $3 \cdot 6 + 5 = 23$.

Hvis du løser $23_6 + 24_6$ på den måten, vil du kanskje se for deg fire kartonger pluss sju løse egg. Disse sju samler du i en kartong til slik at du får fem kartonger og et løst egg, altså 51_6. Fem kartonger er tretti egg, så skrevet på «vanlig» måte er svaret 31. Legg merke til at vi her ikke fulgte den vanlige addisjonsalgoritmen. Da skal man først legge sammen enerne, føre over eventuelle tiere og deretter legge sammen antall tiere. Her la vi først sammen antall kartonger, «tierne», så enerne. Da viste det seg at vi hadde nok løse egg til å fylle en ny kartong, en ny «tier». Denne la vi så til de øvrige kartongene. Denne måten å addere på er vanlig blant unger. Når man skal legge sammen på papiret, er nok den vanlige metoden best, men når det gjelder hoderegning, er det vanskelig å si at den ene metoden er bedre enn den andre. Tenkearbeidet blir omtrent like stort. Som nevnt i første del, bør elevene få bruke den metoden som faller dem mest naturlig.

I det ovennevnte eksemplet ble løsningen av addisjons- og subtraksjonsoppgavene enklere når vi lagde en *visuell representasjon* av problemet ved hjelp av eggkartonger. For elever kan den formen for representasjon være svært forløsende for deres matematiske tenkning. De drar stor nytte både av å arbeide med konkrete hjelpemidler og av tegninger og diagrammer.

Elevaktivitet

En sultan hadde mange gullmynter. Hver morgen likte han å telle hvor mange mynter han hadde. For å lette tellingen samlet han myntene i stabler med ti mynter i hver stabel. Stablene satte han sammen i grupper med ti stabler i hver gruppe. Kan du se hvor mange mynter han hadde denne morgenen?



Uten gruppering er det et svært møysommelig arbeid å telle slike mengder. Denne fortellingen kan man lett spinne videre på. Hver dag får sultanen noen flere gullmynter. Før han teller dem, grupperer han dem i tiere. Hensikten med denne grupperingen kommer tydelig fram. Uten gruppering er det et svært møysommelig arbeid å holde styr på en slik formue. I tillegg til at selve tellingen tar lang tid, må man starte på ny frisk hver morgen. Ved et gruppert materiale er mye av arbeidet allerede gjort når man skal gjennomføre den endelige tellingen.

Denne oppgaven kan varieres ved at elevene skal holde oversikt over andre store antall. Et eksempel kan være å vite hvor mange godterier en kiosk har på lageret sitt. Godteriene er pakket i ruller, 10 stk. i hver rull. Rullene er igjen pakket i bokser med 10 ruller i hver boks. Hvis man vil bruke enda større tall, kan man la boksene være pakket i esker eller stabler med 10 bokser i hver eske/stabel.

Disse aktivitetene vil starte med en «spille»-fase hvor elevene lever seg inn i situasjonen og løser praktiske oppgaver forbundet med opptelling. Det er viktig at denne fasen etterfølges av en fase hvor elevene får anledning til å reflektere over hensikten med det å gruppere. Undersøkelser viser at få elever bruker gruppering intuitivt ved opptelling av store mengder. De vil heller bruke andre strategier. I en refleksjonsfase bør elevene fortelle hverandre om sine forskjellige framgangsmåter og diskutere fordeler og ulemper med disse. Læreren bør vurdere om det er nødvendig å introdusere gruppering som en nyttig måte å telle på hvis elevene ikke begynner å bruke dette på eget initiativ.

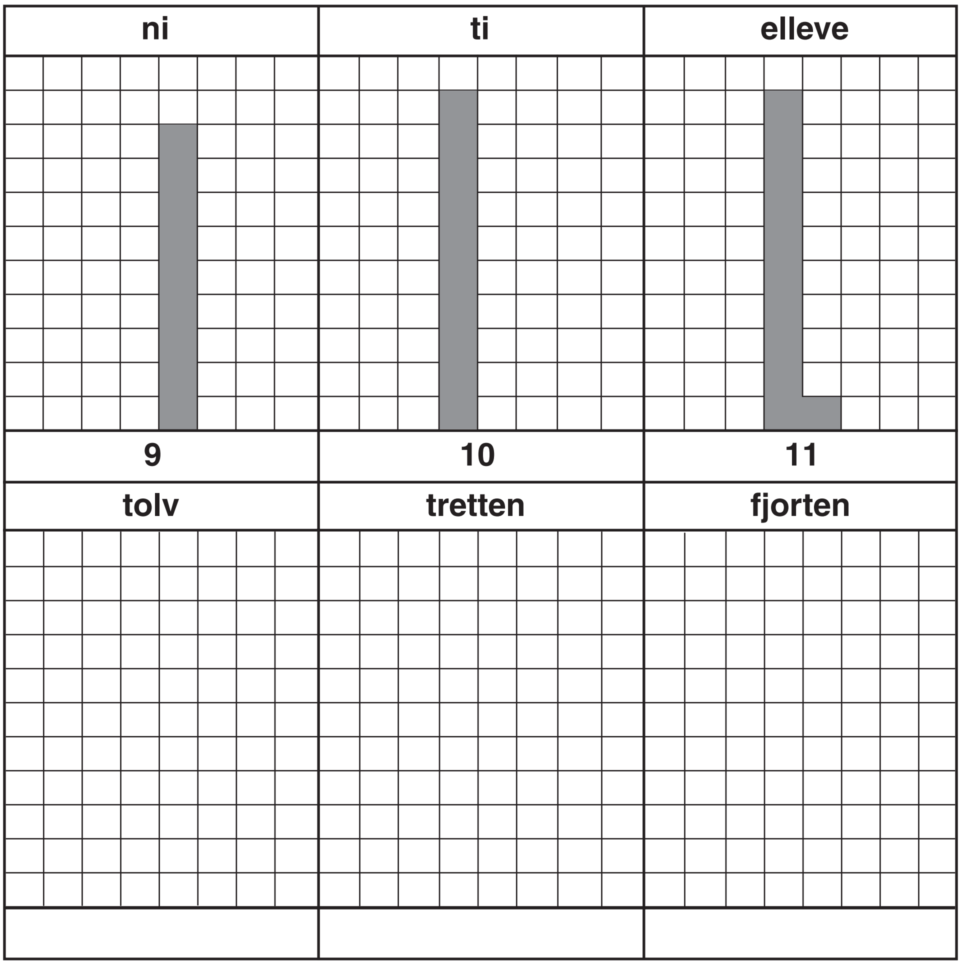
6.4 Elevers forståelse av titallsystemet

Det å gruppere i tiere er ikke mer naturlig enn det er å gruppere i et annet antall. Dette kommer til uttrykk for eksempel ved at andre kulturer har brukt andre tall som base. Det kommer også til uttrykk ved at barn ikke intuitivt grupperer i tiere. Som tidligere nevnt teller barn alle tallene opp til 20 i en «setning». Grunnen til det er at vi i vårt språk ikke synliggjør tierstrukturen når tallene er så små.

Hvordan oppfatter elever på småskoletrinnet tierstrukturen i vårt tallsystem? I en studie av Thomas, Mulligan & Goldin (1994) ble elever i grunnskolealder bedt om å lukke øynene og se for seg tallene fra en til hundre. Deretter fikk de åpne øynene, og de ble bedt om å beskrive det de så. Til slutt skulle de lage en tegning av det de hadde sett for seg. Disse tegningene viste at elevene hadde svært varierende oppfatninger av tallene. Noen så for seg ett stort tall, som oftest 100. Det kunne blinke, og det kunne ha en bestemt farge. Andre så tallene hulter til bulter, enten statisk eller i bevegelse. Atter andre så tallene i rekkefølge, noen langs ei tallinje. Endelig var det noen få som inkluderte en tierstruktur i sine tegninger/forklaringer. De kunne tegne tallene i ei lang rekke, med de hele tierne markert spesielt, mens andre tegnet tallene i et rutesystem med 10 tall på hver linje. Ved utprøving av denne oppgaven med ei gruppe på 50 lærere, viste det seg at de ga det samme mangfoldet i sine svar.

Det dette illustrerer, er at menneskers talloppfatninger er svært varierte, og at dette gjelder både barn og voksne. Når det gjelder oppfatning av tierstrukturen i tallsystemet, er det viktig å ikke trekke resultatene fra denne undersøkelsen for langt. Det kan godt hende at en elev/lærer med god oppfatning av denne strukturen allikevel ser tallene for seg i ei lang rekke uten tierstruktur. Det man kan konkludere med, er at tierstrukturen ikke synes spesielt framtredende i disse elevenes talloppfatning. Dette underbygges ved en 8-åring sitt arbeid med følgende oppgave:

Gjør ferdig:



Denne oppgaven er kopiert fra ei lærebok for andre klasse. Eleven ble ansett av læreren å være en svært dyktig førsteklassing. Jeg spurte ham hva man skulle gjøre her, og han svarte at man skulle lage søyler i de tre nederste rutene og skrive hvor mange som var fargelagt. Da jeg ba ham om å gjøre det, lagde han ei søyle helt til topps (11 terninger), og så farget han én terning ved siden av. Så telte han antall terninger for sikkerhets skyld før han skrev 12 i den nederste ruta. Han grupperte altså ikke i en tier og enerne ved siden. Han lagde ei rekke på 11 helt til topps og plasserte resten ved siden av. Han gjorde tilsvarende for 13 og 14.

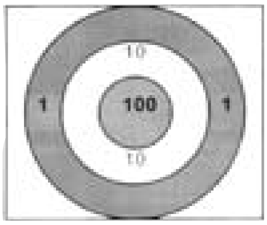
I de fleste lærebøker finnes en rekke oppgaver av denne typen, oppgaver som fokuserer på tierstruktur. Et problem med slike oppgaver er at de ikke problematiserer selve *grupperingen* og det at nettopp 10 er valgt som base for grupperingen. Selve grupperingen tas for gitt, og elevene lærer kun å bruke tiergruppering, ikke *hvorfor* det å gruppere er lurt og *hvorfor* akkurat 10 er valgt som base. I del 1 i dette heftet ble det foreslått at den matematiske kompetansen kan deles i to, i en fakta- og ferdighetskomponent og i en problemløsningskomponent. I denne sammenhengen kan det igjen hevdes at lærebøkene fokuserer i overveiende grad på fakta/ferdighetskompetansen (gjør sånn-og-sånn), og mindre på den problemløsende kompetansen (hvorfor gjøre sånn-og-sånn). Slike opplegg kan oppveies ved at elevene i tillegg til slike oppgaver arbeider med problemer som «Tell stjerner» og «Sultanens penger» i forrige kapittel, hvor fokus settes på det å gruppere, mindre på hvordan grupperingen gjøres.

Elevaktivitet

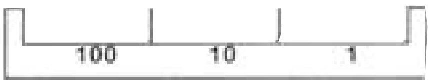
Denne aktiviteten er utviklet spesielt med tanke på å bidra til en grunnleggende forståelse av gruppering og plassverdi. Den gir også erfaringer med tall over hundre. De eksemplene som presenteres, er fra en klasse hvor elevene er omtrent 7,5 år, og de hadde gått litt over et halvt år på skolen. I matematikkundervisningen hadde de på forhånd hatt om tall opp til 20.

Å kaste blink

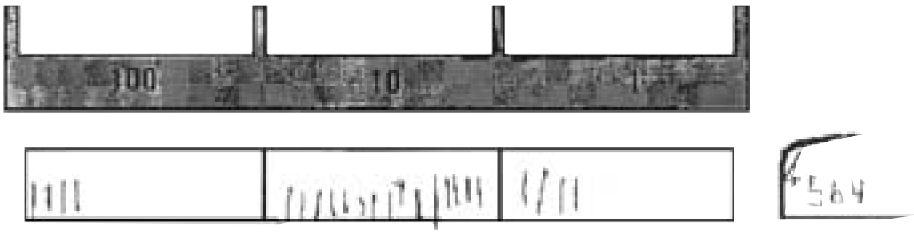
I denne aktiviteten skal dere, hver deres tur, kaste 5 ringer mot denne blinken



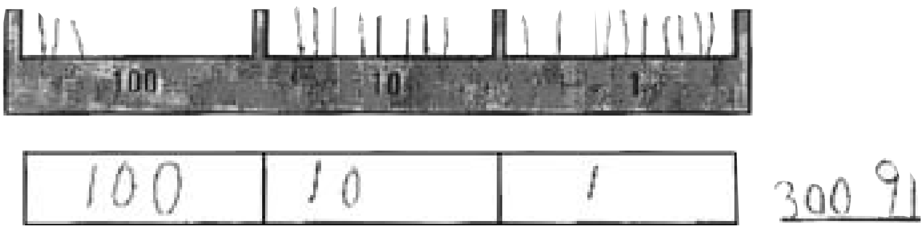
Treff noterer dere ved å krysse av i dette skjemaet



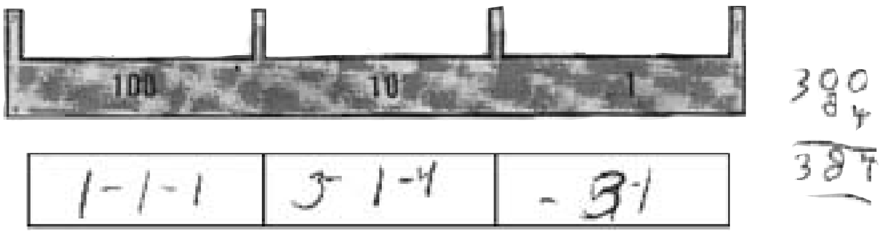
Elevene deles inn i grupper på 3-5 elever. Hver gruppe får 5 ringer og en blink som angitt over (blinken er omtrent 1m i diameter). I tillegg får hver elev et skjema for å notere hvor mange treff han har i hvert felt på blinken. De kaster etter tur, 5 ringer, og noterer antall treff i skjemaet (se eksempler nedenfor). Etter hvert som elevene kaster, blir det flere og flere kryss i skjemaet. Det er plass under avkrysningsfeltet til å telle opp hvor mange poeng man har. Her er noen eksempler på hvordan elevene gjorde det:



Denne eleven har ikke krysset av i det feltet som vi hadde satt av til kryss. I stedet setter han streker i rutene under. Eleven tolker skjemaet annerledes enn det vi tenkte, men han er likevel i stand til å finne riktig poengsum.

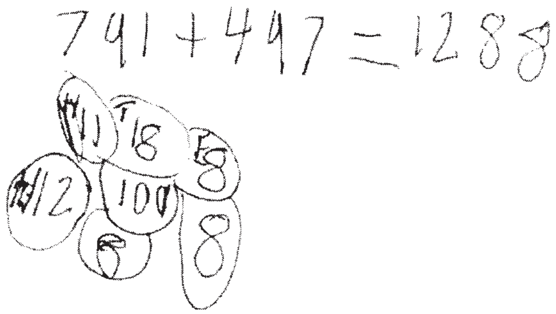


Denne eleven bruker heller ikke skjemaet slik vi hadde tenkt. Han krysser av antall treff, men han noterer ikke ned antall enere, tiere og hundrere i rutene nedenfor. Når han teller opp, finner han at han har truffet 11 enere[1] og 8 tiere. Det skriver han som 91 poeng. Han har i tillegg 3 hundrere. Det viste seg at flere elever hadde problemer med å legge hundrerne sammen med enerne og tierne.



Her er en tredje variant når det gjelder bruk av skjemaet. Denne eleven har kastet 3 ganger og notert antall treff med tallsymboler i rutene. Regnestykket til høyre gir total poengsum. Han har altså 300 poeng, samt 8 tiere og 4 enere. Det å skrive regnestykket på denne måten, kan tyde på at han har lært av eldre søsken.

Disse 3 eksemplene viser at elevene tolker avkrysningsskjemaet på forskjellige måter, men skjemaet fungerer allikevel etter hensikten. Ved å bruke skjemaet får elevene hjelp til å holde rede på poengsummer underveis. Mens de kaster, behøver de kun å merke av det siste kastet, det vil si de siste 5 ringene. Skjemaet er også til hjelp når de, etter å ha kastet noen ganger, skal finne totalsum. Da kan man telle kryssene, noe som er enklere enn regning med tallsymboler. En vanlig måte er å telle opp antall enere og tiere og så slå dem sammen og eventuelt skrive ned svaret. Deretter telles hundrerne opp, og dette legges til den første summen. I utprøvingen var de aller fleste elevene i stand til å bruke skjemaet for å holde oversikt over antall treff. Mange elever var også i stand til å finne en totalsum for flere kast. Dette gjorde de på mange forskjellige måter. Her ser du hvordan ei jente la sammen to poengsummer, 791 og 497:



Tallene ble lest av læreren: «**sju** hundre og nittien og **fire** hundre og nittisju». Da skrev jenta 11 hundrere som ^{H}11. Deretter la hun sammen 9 og 9 tiere av seg selv og skrev ^{T}18 og tilsvarende for enerne, som hun skrev som ^{E}8. Hun stusset litt over de 18 tierne, så hun fikk litt hjelp av læreren: «Hvis du har 18 tiere i lomma og vil veksle med mor, hva ville du veksle i?» Jenta svarte: «I en hundrelapp, men da blir det 12 hundrelapper!» Så skrev hun ^{H}12. Deretter skrev hun 8 på «tierplass» og 8 på «enerplass». Til slutt spurte hun om hun kunne skrive det som «tolv-åtte-åtte».

[1] Han har merket av 10 enere. Det kan hende at han i virkeligheten har truffet 11 og merket av en for lite. Det kan også hende at han har truffet 8 tiere og 10 enere, og at han skriver dette som 91 fordi det å bruke null som plassholder, som i 90, oppfattes som utilfredsstillende.

Tilsvarende kan mange andre spill og leker brukes til å arbeide med opptelling av store mengder. I forskjellige rollespill kan også slike situasjoner oppstå, for eksempel i forbindelse med kjøp og salg. Disse aktivitetene kan, som «blink-kastingen», være bygget opp omkring gruppering i tiere og hundrere. Det grunnleggende arbeidet i denne aktiviteten er kastingen og nedtegn-elsen av hvert enkelt kast. Hovedutfordringen for elevene kommer når de skal arbeide videre med resultatene, når de skal legge sammen og finne totalsum, når de skal sammenligne en gruppe med en annen, o.l. Det er i denne etterfølgende fasen at elevene får mulighet til gjøre erfaringer med prinsippene som ligger bak vårt posisjonssystem.

Det sentrale da er at elevene arbeider med størrelser og symboler som ikke er «tomme», men som har utspring i en praktisk situasjon. Elevene bør oppfordres til å uttrykke seg og regne med egne symboler og de bør kommunisere med andre om arbeidet sitt. For å lette både kommunikasjonen og utregningene bør læreren gradvis introdusere den formelle matematikken og idéene bak både beregninger og notasjon.

6.5 Brøk og desimaltall

I foregående kapittel ble enheter slått sammen til nye enheter; ti enere danner en tier, ti tiere danner en hundrer og så videre. Dette fordi vårt tallsystem er bygd opp omkring grupperinger av ti. Tierstrukturen kommer ikke kun til syne ved at en enhet grupperes i ti og så danner en ny enhet. Strukturen kommer også til syne ved den motsatte operasjonen, ved at en gruppe/enhet deles opp i ti mindre enheter. Dette er et like sentralt punkt som det bør arbeides med parallelt med gruppering. Ved for eksempel «Sultanens penger» bør man både gruppere enere for å danne tiere, men også arbeide med å dele opp tiere i enere.

Ved oppdeling kommer et spesielt aspekt inn når man skal dele opp den minste enheten. Det gjøres ved å innføre mindre enheter som er *deler* av den opprinnelige enheten. Det er dette som kalles *brøk*. For eksempel fører arbeid med måling til at man ofte kommer borti situasjoner hvor det ikke lar seg gjøre å måle ved hjelp av hele tall. Da må man ta mindre måleenheter til hjelp, noe som gjøres på fortrinnsvis to måter:

- ved å innføre en ny, mindre måleenhet
- ved hjelp av brøker og desimaltall

Et eksempel er hvis du skal måle hvor langt en elev hopper i lengde. Da vil man neppe være fornøyd med å oppgi svaret i hele meter. Et lengdesprang kan måles mer nøyaktig ved at man innfører en ny, mindre måleenhet, centimeter: Vi kan si at lengden var 2 meter og 30 centimeter. Et annet eksempel er hvis en skiløper går Birkebeinerrennet. Da vil det neppe være tilfredsstillende å få tiden oppgitt kun i hele timer. Igjen innføres en ny enhet: minutter. Da kan tiden oppgis til for eksempel 4 timer og 25 minutter.

Den andre muligheten er å oppgi svaret som en brøk: «to og en halv meter» eller «to og trekvart meter» eller desimaltall: «to komma fem meter» eller «to komma trettifem meter». I dagliglivet er det vanlig å bruke brøker for mer omtrentlige målinger: «omtrent to-og-en-halv meter» og «jeg kommer kvart-over-åtte.» I «en halv meter» blir den opprinnelige enheten, 1 meter, delt i to, mens den i «trekvart meter» blir delt i fire. Ved å dele den opprinnelige enheten i ti, får man tideler, det som kalles desimaltall: «to komma fem» er en annen måte å uttrykke «to og fem tideler». Når man angir lengde ved desimaltall, for eksempel 2,3 meter, har man delt opp enheten 1 m i 10 like store deler. Desimaltegnet, «kommaet», forteller at tallet til høyre angir antall tideler. Her er det altså noen som har hoppet 2 m pluss 3 av disse tidelene. Ville vi ha målt mer nøyaktig, kunne man også delt tidelene i ti mindre like store deler og fått hundredeler. Det antall hundredeler som ble målt, ville blitt skrevet til høyre for tidelene. Ved å fortsette å oppgi flere desimaler, flere tall bak desimaltegnet, kan vi angi en tallstørrelse så nøyaktig vi vil. Legg merke til at det her er snakk om «desi-». Det betyr «tidel». Når vi oppgir klokkeslett, er det ikke snakk om tideler (fordi det er 60 minutter i en time). Derfor bruker vi ikke «komma», men «punktum» som skilletegn: Hvis en skiløper går Birkebeinerrennet på 4.25, er det ikke snakk om tideler og hundredeler, men deler av en time: 0.25 betyr 25 sekstideler av en time, altså 25 minutter. 0.25 er derfor *ikke* et desimaltall. I KIM-testen om tall og tallregning svarte 60 % av 7. klassingene at et slikt klokkeslett er et desimaltall, mens bare 29 % svarte riktig, nemlig at et klokkeslett ikke er et desimaltall.

Brøk er et mangesidig begrep. Det kan ses på som:

- del av en enhet, en liten fløteboks inneholder $\frac{1}{3}$ av en liter
- en størrelse eller et tall på tallinja, 1,5 km er det samme som 1 og $\frac{1}{2}$ eller $\frac{3}{2}$ km
- et forhold, en tegning av en fugl viser størrelsen i forholdet $\frac{1}{5}$ til virkeligheten
- et regnestykke, 3 delt på 5 kan skrives som $\frac{3}{5}$, et regnestykke med 0,6 som svar
- resultatet av en divisjon, svaret på regnestykket «3 delt på 5» kan skrives som $\frac{3}{5}$, noe som altså er det samme som 0,6

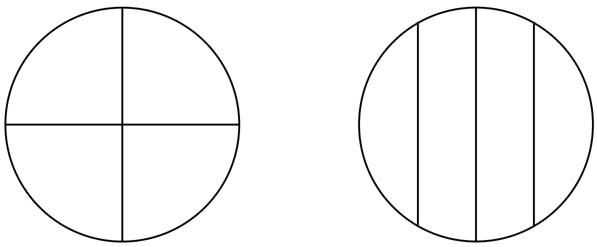
Det er de to første av disse aspektene som er mest framtredende på småskoletrinnet og de blir presentert nærmere nedenfor.

Brøk som del av enhet

Brøk brukes ofte for å angi en del av en enhet. Det er imidlertid ikke alle enheter som kan deles. Dette er tilfellet for de fleste *diskontinuerlige* størrelser. For eksempel snakkes det sjelden om «en tredels elev» eller «en halv ballong». Noen diskontinuerlige størrelser kan deles, det gjelder pizzaer, tau og lignende. Når det gjelder *kontinuerlige* størrelser derimot, som tid, lengde, vekt, så kan de alltid deles. Det er viktig at elevene møter brøkbegrepet i mange forskjellige varianter, og at de gjør erfaringer med hvilke enheter som kan deles, og hvilke som ikke kan.

Etter en tid vil elevene se at når en brøk uttales, for eksempel som «tre femdeler», angir det siste tallet, fem-tallet, hvor mange deler enheten totalt er delt opp i, mens det første tallet, tre-tallet, angir hvor mange av disse delene det er snakk om. Dette blir ofte skrevet som $\frac{3}{5}$. Streken kalles da brøkstrek, tallet over brøkstreken kalles teller, og tallet under kalles nevner.

Et meget sentralt punkt når det gjelder brøk, er at delene som enheten deles opp i, er like store. I dette eksemplet er den venstre figuren delt i firedeler, det er ikke tilfellet i den høyre figuren.



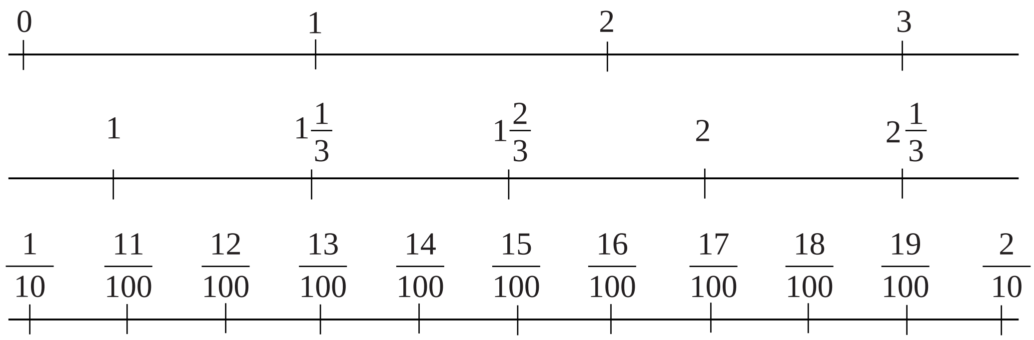
Brøker refererer *alltid* til en helhet. En firedel av en kake angir størrelsen på kakestykket *i forhold til* den opprinnelige kaken. En tredels meter referer til en hel meter. Det er ikke alltid at denne referansen er like tydelig i den måten brøk blir brukt i dagliglivet. For eksempel vil elevene kunne gjøre erfaringer med kvartlitre med melk som selvstendige enheter uten at det refereres til den hele literen: at en boks er en firedel av en hel liter.

Noen ganger brukes brøk også som deler av flere enheter. Man kan snakke om halvparten av 3 pizzaer, eller om to tredeler av skoleveien når denne er fire kilometer lang.

Brøk som tallstørrelse

Brøk er en måte å utvide tallinja på. Hvis vi lager ei tallinje bare med de hele tallene, vil disse ligge spredt utover med store «hull» mellom. Dette er utilstrekkelig i mange sammenhenger, for eksempel når vi skal bruke tallinja til å angi måling av kontinuerlige størrelser som temperatur eller lengde. Derfor har man utvidet tallinja ved å dele opp intervallene mellom hvert helt tall. På tallinja kan man alltid dele opp intervallet mellom to tall i mindre intervaller. Derfor vil brøkene kunne ligge så tett inntil hverandre som man bare vil, og det vil alltid være uendelig mange brøker mellom to vilkårlige tall på tallinja.

Selv om vi kan finne brøker som ligger så nær hverandre som vi bare vil, finnes det tall på tallinja som ikke kan skrives på brøkform. Disse tallene kalles irrasjonale, mens de som kan skrives som brøk, kalles rasjonale.



Det kan være vanskelig å skille de forskjellige aspektene ved brøk fra hverandre. Hvis du spør en elev om: *Hva er $\frac{1}{3}$ av 2 meter?* vil han kunne svare «en tredels meter». Det at man blander sammen brøk som tall og brøk som del av enhet, kan føre til slike feil.

I dag er desimaltall den mest vanlige måten å angi brøk på. Dette skyldes antakeligvis at de mest vanlige måleenhetene våre er bygd opp omkring inndeling i tideler. Dette gjelder lengde, vekt, pengeenheter, temperatur osv. I tillegg bruker tekniske hjelpemidler som lommeregner og regneark fortrinnsvis desimaltall. Dette har ført til at desimaltall er sentralt i læreplanen i matematikk. Tradisjonell undervisning i desimaltall har i stor grad fokusert på bruk av penger: kroner og øre. Dette er imidlertid eksempler hvor man deler opp den opprinnelige måleenheten i en ny, mindre måleenhet, og så setter man de to måleenhetene sammen til et desimaltall: 5,75 oppfattes ikke som fem-komma-syttifem-kroner, men som fem-kroner-og-syttifem-øre. Hvis elevene kun får erfaringer med denne formen for desimaltall, vil de kunne danne den misoppfatningen at desimaltall er par av to hele tall atskilt med komma. Dette er en av de mest vanlige misoppfatningene elever i norsk skole sitter igjen med etter småskoletrinnet. I KIM-testen om tall og tallregning ble elever bedt om å sette ring rundt det minste tallet av:

0,625 0,25 0,3753 0,125 0,5

Den prosentvise fordelingen blant elever i 5., 7. og 9. klasse var:

Hvilket tall er minst?	5. klasse	7. klasse	9. klasse
0,125 (Rett svar)	16	55	79
0,5	64	26	7
0,3753	8	13	10
0,25	8	4	3
0,625	1	1	1

Det viser seg altså at omtrent 2/3 av alle norske elever tror at 0,5 er det minste tallet i denne rekka når de går i 5. klasse. Grunnen til denne misoppfatningen er antakeligvis at de ser på desimaltallene som bestående av to forskjellige tall. Hvis man gjør tallene om til kroner og øre, kan man si at «null kroner og fem øre» er mindre enn «null kroner og tjuefem øre». Et tilsvarende svarmønster framkommer når elevene blir bedt om å si hva som er størst av 0,649 og 0,87 og 0,7. Da svarer 66 % av 5. klassingene 0,649. De tror altså at *det lengste desimaltallet er størst*. En slik oppfatning er i samsvar med at man ser på desimaltall som to tall atskilt med komma.

Dette viser at lærere på småskoletrinnet må være på vakt overfor denne misoppfatningen. De må passe på å gi elevene allsidige erfaringer også når det gjelder desimaltall, erfaringer som er knyttet til både det første og det andre aspektet nevnt ovenfor. I tillegg kan læreren skape diskusjoner om slike fenomener ved å la elevene først bestemme hvilket tall de mener er størst eller minst, og deretter be noen elever merke av hvor desimaltallene befinner seg på ei stor talllinje. Da vil det være sprik mellom det elevene har foreslått og hvor de plasseres på tallinja. En slik uoverensstemmelse egner seg godt til diskusjon, og gjennom denne typen diskusjoner kan det ryddes opp i slike misoppfatninger.

6.2.1 Elevaktiviteter

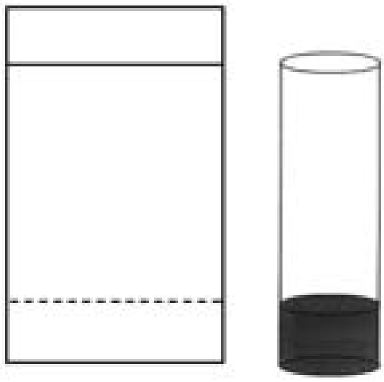
Aktivitet 1

La elevene arbeide i små grupper. Hver gruppe trenger et skråplan, en bil (eller noe annet som kan rulle ned skråplanet) og noe å måle med. Så kan elevene trille bilene sine ned skråplanet og se hvem som kommer lengst. Hvis de kun konkurrerer mot hverandre, er det ikke nødvendig å måle lengden, da holder det å sammenligne bilenes sluttposisjon med hverandre. Derfor bør elevene oppfordres til å se hvor langt de er i stand til å trille bilene sine på en slik måte at de må måle lengden og ta vare på resultatet. Dette kan gjøres enten ved at elever fra forskjellige baner konkurrerer med hverandre, eller ved at elevene skal ta vare på resultatet til seinere. Denne aktiviteten kan brukes fra første klasse. For de minste ungene kan man lage ei «gate» av store ruter med hele tall, 1 nærmest skråplanet og deretter tallene fortløpende videre utover. Da vil elevene kunne se at en bil som triller til 5-ruta, kom lenger enn en som trillet til 4-ruta. De vil dermed øve opp det ordinale aspektet ved tallene. For eldre elever kan man i stedet for denne gata la elevene måle avstanden med målebånd/linjal eller ved at de lager seg egne måleenheter.

Aktivitet 2

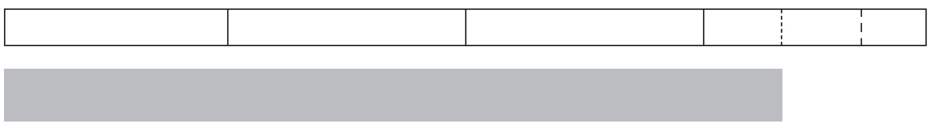
I undervisningen er det viktig at læreren tar utgangspunkt i brøker som er kjente for elevene. Dette er framhevet i L97 hvor det legges opp til at elevene i 3. og 4. klasse skal arbeide med enkle brøker i praktiske sammenhenger. En mulig innfallsvinkel er å sammenligne inneholdet i kartonger med skolemelk ($\frac{1}{3}l$) med hele literskartonger. Her fokuseres det på brøk «som del av enhet». Det at det går tre slike kartonger på en liter, kan danne utgangspunkt for å se på forholdet mellom del og helhet. Ved å bruke stambrøker (brøker hvor telleren er én) vil elevene få se at enhver helhet kan deles opp i så mange deler man vil. Det sentrale aspektet her er at ved slik bruk av brøker ser man på forholdet mellom del og helhet. Det går 3 tredeler på en hel uansett hva denne helheten er. Hvis utgangspunktet eller helheten varieres, vil delene også variere selv om den brøken man er på jakt etter, er den samme. For eksempel vil en firedel av 2 m være en del som er en halv meter lang, mens en firedel av 20 m er 5 m. Ved varierte situasjoner og oppgaver kan man fokusere nettopp på dette at delene må ses i forhold til helheten.

Elevene bør også arbeide med forskjellige oppdelinger av samme utgangspunkt. Det kan gjøres på mange måter. En illustrativ måte er å brette papir i deler slik at hver del utgjør en brøkdel av papirlengden. En slik aktivitet kan ha følgende situasjon som utgangspunkt: Fyll litt farget væske, for eksempel appelsinjuice, opp i en glass-sylinder. Gi elevene i oppgave å finne ut hvor stor del av sylinderen som er fylt. Dette kan gjøres ved hjelp av et papir ved at elevene legger papiret langs sylinderen og merker av hvor høy den er og hvor høyt væska går.



Ved å brette kan elevene telle opp hvor mange deler som må til for å komme opp til den øverste streken, den som angir høyden på sylinderen. Tilsvarende kan papir brukes til å måle brøkdeler i andre situasjoner. Oppgaven kan snus på hodet ved at elevene blir bedt om å fylle sylinderen kvart full med vann. Ved å brette papiret to ganger kan man finne hvor høyt opp en firedel når.

Aktivitet 3
Den forrige aktiviteten fokuserte på brøk «som del av enhet». I tradisjonell matematikkundervisning gjør elevene mange erfaringer med brøk av denne typen. For eksempel finnes det i de fleste læreverk mange oppgaver hvor elevene skal fargelegge en firedel av en figur o.l. Men det er i tillegg viktig at elevene arbeider med brøk som en størrelse. Papirbretting kan brukes også i en slik sammenheng. Hvis man for eksempel skal måle lengden på pulten ved hjelp av en blyant, kan man finne at lengden er litt over 8 blyantlengder. Ved hjelp av ei papirstrimle kan man måle mer nøyaktig:



Her er lengden på pulten lik tre og en tredels papirlengde. Den siste tredelen kan man finne ved å brette papiret tre ganger. Nå vil det ikke alltid passe så bra som på tegningen. Hva hvis resten er litt over en halv blyantlengde? Ved slike tilfeller kan elevene selv diskutere seg fram til passende løsninger. En mulighet ligger i å runde av til en brøk de kjenner godt, til en halv eller til to tredeler eller tre firedeler. En annen mulighet er å utfordre dem til å se om de klarer å finne en måte å brette arket på slik at en brett kommer så å si akkurat der hvor reststreken er tegnet inn. Ved å dele arket inn i fem deler vil man kanskje se at reststreken går omtrent ved tre femdeler.

Ved å måle forskjellige lengder og oppgi svaret som så-og-så mange hele pluss en brøkdel, vil elevene få innblikk i brøkbegrepet som en tallstørrelse. Det utgjør altså en annen del av brøkbegrepet enn den første fokuseringen på brøk som del av en enhet. Det er viktig at elevene får oppgaver hvor de blir nødt til å reflektere over forskjeller og likheter mellom disse to aspektene. Ved at elevene diskuterer spørsmål som «Det halve av sju meter er tre og en halv meter. Hvorfor heter det *halv* i begge tilfellene? Er det noe som er likt og er det noe som er forskjellig mellom disse to *halve*?» vil de kunne få et bedre og et mer bevisst forhold til brøkbegrepet og dets forskjellige sider.

De aktivitetene som er knyttet til papirbretting, ser på brøker i forbindelse med noe som har en lengdeutstrekning. Det er viktig at elevenes erfaringer med brøker ikke begrenses til denne typen. Brøker brukes både som «del av enhet» og som en tallstørrelse også i andre situasjoner. Det mest vanlige er kanskje å se på brøkdeler av sirkler. Her fins mange mulige konkretiseringer: pizzaer, kaker, lykkehjul, kakediagram og analoge klokker. De grunnleggende prinsippene vil være de samme. Også her vil det være viktig at elevene observerer og får reflektere over de forskjellige måtene brøker framstår: både som tallstørrelser: 1 og $\frac{1}{2}$ pizza og som del av noe: halvparten av 3 pizzaer.

Når brøkundervisningen gis et praktisk utgangspunkt, vil elevene kunne oppdage mange sammenhenger knyttet til brøkregning på egen hånd. Hvis noen elever undersøker forholdet mellom blyanter som er en todel og en firedel av en ny blyant, vil de for eksempel kunne oppdage at to firedels blyanter er like lange som en todels blyant. Flere tilsvarende erfaringer, at to kvarte pizza er det samme som en halv pizza, at to kvarter er det samme som en halvtime osv, vil danne et godt grunnlag for elevenes videre begrepsdanning innen brøk.

Tradisjonelt har brøkregning vært et område hvor matematikkundervisningen har vært svært regelorientert. Det viktige har vært å lære elevene regler for brøkregning med de fire regneartene. Hvis disse reglene læres som helt løsrevne og meningsløse algoritmer, kan vi få elever som regner som en engelsk 15-åring, kalt «Benny» (se Erlwangers studie referert i Bell et al, 1983). Benny ble bedt om å legge sammen $\frac{1}{2}+\frac{2}{1}$. Det gjorde han først på denne måten: $\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{3}{3}=1.$ Den regelen han brukte var antakeligvis noe sånt som «ved addisjon av brøker setter vi på felles brøkstrek og legger sammen tellerne for seg og nevnerne for seg». Benny kunne i tillegg en regel til, om å «snu den bakerste brøken». Da fikk han: $\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$ Han visste at to halve ble én, og dermed hadde han til og med verifisert det første svaret han regnet ut. Ved å gi elevene et godt fundament med erfaringer med brøker fra mange forskjellige situasjoner, vil de kunne utvikle egne algoritmer for brøkregning. Disse algoritmene vil ha et helt annet fornuftsgrunnlag enn de reglene Benny demonstrerte, og det er grunn til å tro at elevene derfor vil kunne bruke dem med større nennsomhet enn hva Benny gjorde.

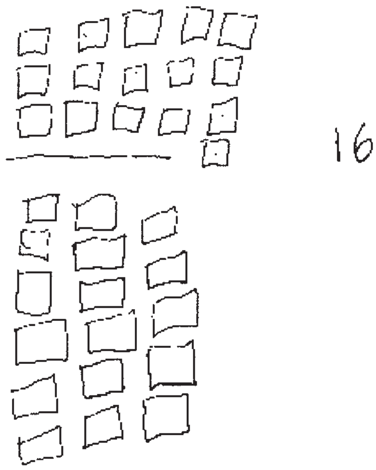
7 Tallregning

I dette kapitlet skal vi se på tallregning. Stoffet er organisert rundt to overskrifter: additive og multiplikative strukturer. Dette kan kanskje synes noe underlig; hvorfor får ikke hver regneart sin egen del? Grunnen til det er at addisjon og subtraksjon er regneoperasjoner som springer ut av samme oppgavestruktur. Det kan illustreres med følgende to oppgaver:

(1) *Lise har 17 kongler i en boks. En dag finner hun 16 til. Hvor mange kongler har hun nå?*

(2) *Lise har 17 frimerker. En dag får hun noen av faren sin. Nå har hun 33 frimerker. Hvor mange frimerker fikk hun av faren sin?*

Disse oppgavene har samme struktur: Lise slår sammen to mengder, de konglene og frimerkene hun hadde med dem hun fant eller fikk. Den ukjente er imidlertid forskjellig og det fører til at man kan kalle den første en addisjonsoppgave, mens den andre kan kalles en subtraksjonsoppgave. Elever på småskoletrinnet vil imidlertid ofte behandle to slike oppgaver likt. Her ser du hvordan ei jente på 7 år løste den siste oppgaven:



Hun tegnet først de 17 frimerkene Lise hadde. Deretter tegnet hun et rimelig antall frimerker til. Disse frimerkene er atskilt fra de første med en strek. Så telte hun alle frimerkene. Da kom hun til 30, altså måtte hun tegne 3 til over streken. Til slutt telte hun de som var over streken, og det ga henne et riktig svar. Sett fra denne elevens synsvinkel er det her ingen grunn til å skille mellom addisjons- og subtraksjonsoppgaver. Man kan derfor si at disse to oppgavene har *samme struktur*, det som her er kalt en additiv struktur.

Tilsvarende kan multiplikasjons- og divisjonsoppgaver ha samme struktur, kalt multiplikative strukturer. Legg merke til at det her blir brukt flertallsform både når det gjelder additive og multiplikative strukturer. Grunnen til det er, som det vil framgå nedenfor, at det er mange forskjellige strukturer som gir opphav til henholdsvis addisjon/subtraksjon og multiplikasjon/divisjon.

7.1 Begynnende begrepsdanning i regning

Flere undersøkelser har vist at barn i førskolealder kan utføre mange regneoperasjoner. De kan løse oppgaver i alle fire regnearter: addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. En forutsetning for at barna skal kunne løse matematikkoppgaver, er at de ser hensikten med oppgavene, at de har en genuin interesse av å finne et svar. I tillegg er det nødvendig at de får uttrykke seg med det Høines (1987) kaller språk av første orden. For små barn vil det være konkrete objekter, klosser eller lignende og etter hvert tegninger og diagrammer. Når barna begynner på skolen, vil de møte de formelle matematiske symbolene. Ved å bruke disse symbolene vil elevene gjøre erfaringer slik at symbolene får et meningsinnhold, og at de kan brukes i forskjellige sammenhenger. Det må imidlertid bemerkes at dette er en tidkrevende prosess, og at mange elever på småskoletrinnet har behov for å bruke tegninger eller konkrete objekter i arbeidet med å løse matematiske problemer.

I en undersøkelse av Carpenter & al (1993) fikk 70 femåringer undervisning i matematikk noen timer i uken i et år. Undervisningen bestod i at barna lærte å bruke små terninger til å representere de størrelsene som inngikk i forskjellige matematiske tekstoppgaver. Etter dette året ble elevene intervjuet en og en. Under intervjuet ble de bedt om å løse tekstoppgaver som ble lest opp for dem. Alle oppgavene kunne løses ved hjelp av de fire regneartene. Hvis en elev ikke forstod oppgaven, ble hele eller deler av teksten lest om igjen til han skjønte hva oppgaven gikk ut på. En oppgave lød: *Paco hadde 13 kaker. Han spiste 6 av dem. Hvor mange kaker hadde Paco tilbake?* Hele 73 % kom fram til riktig svar, og hele 89 % brukte en strategi som ville ha gitt riktig svar hvis den var blitt korrekt utført. De fleste av disse laget en direkte modell ved å legge fram 13 terninger for så å ta bort 6 og telle hvor mange som er igjen. Noen få, 7 %, telte 6 nedover fra 13.

En annen oppgave lød: *Tad hadde 15 guppier. Han puttet 3 guppier i hvert glass. Hvor mange glass puttet Tad guppier oppi?* Her var det 71 % som løste oppgaven riktig. Alle bortsett fra én løste den ved å lage en konkret modell ved hjelp av terninger. De fleste telte først opp 15 terninger, som de fordelte i 3 hauger. De fant så svaret ved å telle hvor mange det var i hver haug. Andre fordelte terningene i hauger på tre. Antall hauger ble da det antallet man var på jakt etter. Noen få la terningene opp i hauger med 3 merker i hver haug uten først å ha telt opp 15 merker. Disse holdt rede på hvor mange terninger de hadde brukt etter hvert som de gjorde haugene ferdig. Når de kom til 15, var de ferdige, og de fant svaret ved å telle antall hauger.

Ved å bruke terninger på forskjellige måter løste omtrent 70 % av barna tekstoppgaver med addisjon og multiplikasjon. Disse barna var altså i 5-års alderen.

Når små barn løser slike oppgaver, vil de som regel lage en konkret modell av problemstillingen. Subtraksjonsoppgaver løses ved at de teller opp antall merker man har i utgangspunktet og fjerner det antallet som er oppgitt. Til slutt teller de opp det antallet som er igjen. De vil løse så å si alle oppgaver ved hjelp av telling. Dette poengterer *sammenhengen* i matematiske begreper. Ved å lage en direkte modell og telle kan disse ungene bruke tilsvarende strategi for å løse oppgaver i alle fire regnearter. Uansett oppgavetype bruker barna en mer eller mindre avansert form for telling for å finne et svar.

Det denne undersøkelsen viser, er at små elever *kan* arbeide med oppgaver av denne typen og av denne «vanskegraden». De kan kjenne igjen *problemstrukturen*, og de har algoritmer som gir dem en løsning. Det samme viste elevene i første klasse som løste ekornoppgaven som nevnt i del 1 i heftet. Ifølge L97 skal undervisningen bygge på elevenes forutsetninger. På grunnlag av slike eksempler kan man hevde at elevene kan atskillig mer enn det som tradisjonell undervisning har forutsatt. Dette er i så fall noe som i større grad bør utnyttes i undervisningen.

Det må imidlertid påpekes at en forutsetning for at elever skal forstå meningen bak oppgaver som de Carpenter et al (1993) arbeidet med, er at oppgavene har et praktisk utgangspunkt som elevene kan sette seg inn i. Derfor kan de løse oppgaver som: *Jeg har seks epler og får to til, hvor mange har jeg nå?* Men det er noe helt annet enn å kunne løse regnestykker som 6 + 2 =. For å løse slike oppgaver må elevene i tillegg vite hva de forskjellige sybolene står for, og de må ha en abstrakt forståelse av tallene og av addisjon. Det betyr at mens den første oppgaven kunne løses ved å tegne epler og telle dem, må man, for å løse den andre oppgaven, vite at 6 + 2 betyr «seks av hva som helst» pluss «to til av det samme». Det er en omstendelig prosess å danne slike abstrakte begreper, og det er grunnen til at vi tidligere (kap. 4) har framhevet viktigheten av at undervisningen starter med en konkret situasjon.

Små barn kan bruke matematikk på en abstrakt måte. Med det menes «abstrakt» i betydningen «nye el. andre konkrete situasjoner». De kan sjelden bruke matematikk i en *dekontekstualisert* situasjon. I en studie (Hughes, 1986) ble en gutt på 4 år spurt om hvor mange klosser han ville få hvis han hadde så-og-så mange og deretter fikk noen til. Først gjorde de dette med noen klosser på bordet, deretter som en tenkt situasjon:

L:	Hvis jeg har 5 klosser og jeg får 2 til, hvor mange har jeg da?
E:	7
L:	Hva er ti og en til?
E:	11
L (seinere):	Hva er to og en til?
E:	eh … 15

Først viser eleven at han kan legge sammen 5 og 2 klosser ved hjelp av hoderegning. Når han så umiddelbart etter blir spurt om hva 10 og 1 til er, finner han svaret antakeligvis fordi han knytter tallene til klosser. Det siste spørsmålet ble framsatt med samme ordbruk, men uten tilknytning til en reell situasjon. Da svarte gutten feil, og grunnen til det kan være at problemstillingen ikke ga noen mening. Det blir som å spørre en unge om «hva er gult og blått?» Et underlig spørsmål, men hvis du spør «hva får du hvis du blander gul maling med blå maling?», vil hun kunne forstå spørsmålet og ha en sjanse til å svare.

Konklusjonen er at små barn, helt nede i 4-5-årsalderen, kan regne, og de kan utvikle sine evner til å regne. En forutsetning for at de skal lykkes, er, og dette gjelder tilsvarende for voksne, at oppgavene er meningsfulle. Barna må forstå hva hensikten med regningen er. Dette vil i de aller fleste tilfellene bety at regningen må springe ut av en praktisk situasjon.

7.2 Additive strukturer

Som de fleste andre matematiske begreper er addisjon og subtraksjon svært komplekse. De består både en fakta/ferdighetsside og en problemløsningsside. For å ha god *begrepsforståelse* må eleven ha faktakunnskaper om og ferdigheter i det å behandle de størrelsene som inngår og eleven må kunne bruke begrepet i problemløsning. Med faktakunnskap menes her for eksempel det å vite at når man adderer to tall, spiller ikke rekkefølgen på de to tallene noen rolle. Det gjør det derimot når man subtraherer. Med ferdigheter menes for eksempel det å kunne utføre addisjonsalgoritmen for desimaltall. Det å kunne bruke addisjon- og subtraksjonsbegrepet til problemløsning betyr at man er i stand til å bruke faktaene og ferdighetene til å løse mer eller mindre praktiske problemer. Da er det avgjørende å kunne kjenne igjen den additive strukturen i det aktuelle problemet. Slike forskjellige strukturer er tema for denne delen av heftet.

7.2.1 Problemstrukturer

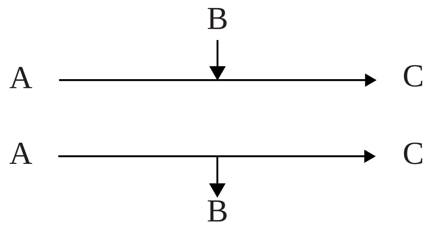
Denne delen omhandler *additive strukturer*. Grunnen til at addisjon og subtraksjon er samlet under en felles overskrift, er som nevnt at de oppgavene hvor det blir aktuelt å enten addere eller subtrahere er strukturelt helt like. Problemstillinger som inkluderer addisjon eller subtraksjon kan imidlertid ha svært varierende strukturer. Oppgavens struktur spiller en stor rolle for hvor vanskelig en addisjons- eller subtraksjonsoppgave vil være for elevene. Derfor er det viktig at lærere vet hvilke forskjellige additive strukturer som finnes, og at de kan vurdere hvilke som er vanskelige og hvilke som er lette for elevene. I tillegg er det nødvendig at elevene får gjort erfaringer med alle disse aspektene ved addisjon og subtraksjon slik at de kan utvikle rike addisjons- og subtraksjonsbegreper. Det vil si at de både vet når det er passende å bruke de forskjellige regneoperasjonene, og at de har gode faktakunnskaper og ferdigheter som kan tas i bruk i selve regnearbeidet.

Oppgaver som inkluderer addisjon/subtraksjon kan settes opp i fire kategorier:

Endring
Her har man et antall av et eller annet. Så får man noen til, eller noen forsvinner, slik at man får et nytt antall til slutt. Skjematisk kan dette stilles opp på disse to måtene:

Sammenslåing:

Separering:



Dette er oppgaver som:

(1) Anne har 8 klinkekuler. En dag vinner hun 5 til. Hvor mange klinkekuler har hun da?

(2) Anne har 8 klinkekuler. En dag vinner hun noen til, slik at hun til sammen har 13 klinkekuler. Hvor mange vant hun den dagen?

(3) Anne har noen klinkekuler med seg på skolen. En dag vinner hun 5 til i friminuttene. Da har hun 13 kuler. Hvor mange hadde hun med seg da hun kom på skolen?

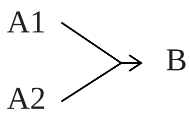
Alle disse tre oppgavene er av den første typen. Her er det snakk om *sammenslåing*: Anne har noen klinkekuler, og hun vinner noen til. Av denne strukturen kan man få tre forskjellige regnestykker avhengig av hva som er ukjent. I oppgave (1) er C ukjent, i oppgave (2) er B ukjent, mens A er ukjent i oppgave (3).

For oppgaver hvor strukturen er sammenslåing, finnes det dermed tre forskjellige typer alt etter om A, B eller C er ukjent. Tilsvarende vil vi få tre forskjellige typer av oppgaver om separering. Et eksempel på separering, B ukjent er:

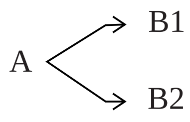
Anne har 13 klinkekuler i en boks. En dag gir hun bort noen til broren sin slik at hun har 8 kuler igjen. Hvor mange klinkekuler fikk broren?

Kombinere
Her kombineres to mengder av et eller annet, eller en mengde separeres i to. Skjematisk kan strukturen illustreres slik:

Kombinering:



Separering:



Hver av disse to strukturene kan gi opphav til oppgaver av to forskjellige typer, avhengig av hva som er ukjent. For kombinering kan *en av mengdene* være ukjent, A1 eller A2, eller så kan *resultatet* av kombineringen være ukjent, B. Et eksempel hvor en av mengdene er ukjent:

(1) Anne har 13 klinkekuler. 5 er røde og resten blå. Hvor mange blå klinkekuler har hun?

Hvis resultatet er ukjent, kan oppgaven være:

(2) Anne har 5 røde og 8 blå klinkekuler. Hvor mange kuler har hun til sammen?

Sammenligne
I oppgaver i denne kategorien handler det om å sammenligne antallet i to mengder. Denne strukturen kan illustreres slik:

D

A1 ———————— A2

A1 og A2 er de to mengdene, mens D er differansen mellom dem. Her er eksempler på oppgaver med en slik struktur:

(1) Anne har 13 klinkekuler, mens Berit har 5. Hvor mange flere har Anne enn Berit?

(2) Berit har 5 klinkekuler, mens Anne har 8 flere. Hvor mange kuler har Anne?

(3) Anne har 13 klinkekuler. Hun har 5 flere enn Berit. Hvor mange kuler har Berit?

Når du sammenligner antallet i to mengder, kan den ukjente være forskjellen mellom dem (1), den største mengden (2) eller den minste mengden (3). I disse eksemplene handler det i alle tilfellene om *flere*. Man kan også bytte om slik at det dreier seg om *færre*. Den første oppgaven vil da kunne bli: *Anne har 13 klinkekuler, mens Berit har 5. Hvor mange færre har Berit enn Anne?* På den måten får vi tre oppgavetyper til i denne kategorien.

Å gjøre likt
Oppgaver i denne kategorien er omtrent som i sammeligne-kategorien. Forskjellen er at her nøyer man seg ikke med å fastslå forskjellen, men man vil utligne den. De tre oppgavene over vil her se ut slik:

(1) Anne har 13 klinkekuler, mens Berit har 5. Hvor mange flere må Berit få for at hun skal ha like mange som Anne?

(2) Berit har 5 klinkekuler. Hvis hun får 8 til, vil hun ha like mange som Anne. Hvor mange kuler har Anne?

(3) Anne har 13 klinkekuler. Hvis Berit får 8 til, vil hun ha like mange som Anne. Hvor mange kuler har Berit?

I disse oppgavene har det kun vært snakk om å få flere kuler, men, som ved sammenligning, kan det her også dreie seg om å miste kuler. Dermed blir det også her tre oppgavetyper til.

For å oppsummere: Her er det foreslått fire forskjellige strukturer når det gjelder addisjon/subtraksjon. Det er dette som kalles *additive strukturer*. For at en elev skal utvikle gode begreper, er det nødvendig både med regneferdigheter og med kunnskap om når faktaene og ferdighetene bør brukes. For å få til det må elevene gjøre erfaringer med alle de forskjellige strukturene hvor begrepet kan bringes på bane. Dette gjøres gjennom en bevisst variasjon i strukturen i oppgavene elevene arbeider med, og i hvilken av størrelsene som er den ukjente.

Alle de fire kategoriene vil gi opphav til flere oppgavetyper alt etter hva som er kjent og hva som er ukjent i problemstillingen. For eksempel når det gjelder endring, får vi 3 forskjellige oppgavetyper for sammenslåing om startantallet, endringen eller sluttantallet er ukjent. I tillegg får vi 3 oppgavetyper for separering. Denne oppgaven ble gitt til en gutt på 6,5 år:

> *Her kommer en buss kjørende <konkretisert med en liten eske>. Nå kommer den til en holdeplass, og her er det to personer som går av bussen. Så kjører bussen videre, og nå er det fem personer i bussen. Hvor mange var det på bussen før holdeplassen?*

Dette er en oppgave av *separeringstypen* med utgangsantallet (A) som ukjent. Gutten tenkte seg litt om før han svarte «tre». Denne gutten hadde god tallforståelse; han kunne for eksempel legge sammen oppstilte tall så lenge summen ikke overgikk hundre, selv med tierovergang. Det manglet altså ikke på hans regneferdigheter, men det å løse praktiske oppgaver er ikke kun avhengig av slike evner. Det er også nødvendig å kunne kjenne igjen strukturen i problemet slik at man kan velge riktig operasjon. Når det gjelder oppgaver som inkluderer en endring, er de oppgavene hvor utgangspunktet er ukjent som regel vanskeligst, mens oppgaver hvor det som kommer til/faller fra er ukjent, er noe enklere. Enklest er oppgaver hvor sluttantallet er ukjent. Hvis gutten i stedet hadde fått dette problemet:

> *En buss med fem personer kommer kjørende. Nå kommer den til en holdeplass, og her står det på to personer. Så kjører bussen videre. Hvor mange personer er det på bussen nå?*

ville han nok klart å finne et svar. Denne oppgaven er lettere fordi man kan se for seg de personene som kommer kjørende, de som står på og så legge sammen. I oppgaver hvor startantallet er ukjent, går det ikke an å starte på den måten. Gutten brukte derfor en annen strategi: Han visste at det var noen som gikk av bussen. Det henger som regel sammen med subtraksjon, derfor trakk han det største tallet fra det minste.

Både oppgavens struktur og hva som er kjent/ukjent, er dermed avgjørende for hvordan elever vil gå løs på slike oppgaver.

7.2.2 Løsningsstrategier

I forrige del ble det hevdet at oppgavestruktur er viktig for hvordan elever arbeider med forskjellige addisjons- og subtraksjonsoppgaver. I tillegg er størrelsen på tallene som inngår av betydning for valg av framgangsmåte. Forskjellige tallstørrelser vil gi opphav til forskjellige løsningsstrategier. Prøv deg på disse oppgavene, og legg merke til hvordan du tenker, hvilke framgangsmåter du bruker for å finne svarene:

76 - 10 = _______ 23 + 24 = _______ 1 + 3575 = _______

Den første vil mange løse ved å bruke posisjonssystemets tieroppbygging. Man kan legge til og trekke fra ti uten å bry seg om enerne. Den andre kan løses ved å doble 23 og så legge til en til. Den siste kan løses ved at man bytter om rekkefølgene på de to tallene. Da kan man finne svaret ved å telle én videre fra 3575, altså beholde de tre første sifrene og øke det siste med 1. Poenget er at man bruker mange forskjellige løsningsmetoder for å løse regneoppgaver. Forskjellige metoder blir valgt til forskjellige problemstrukturer til forskjellige tallstørrelser.

Barn i 5-6-årsalder vil som regel addere og subtrahere ved hjelp av telling. Slike tellebaserte løsningsmetoder er nødvendige i en begynnende begrepsdannelse, men elevene på småskoletrinnet bør hele tiden oppmuntres til å lete etter og utforske andre metoder. Det er i hovedsak tre grunner til dette. For det første er tellebaserte løsningsmetoder lite effektive, de krever mye tenkning, slik at det kan være vanskelig å konsentrere seg om andre aspekter ved problemløsningen. 23 + 24 er et svært slitsomt regnestykke hvis det skal løses ved telling. Hvis elevene derimot har kommet fram til andre og mer effektive metoder, som dobling ved addisjon av like tall, vil oppgaven være mye enklere. Det er også lettere å unngå feil.

En annen grunn til å la elevene utforske andre løsningsmetoder på egen hånd, er at de samtidig vil lære andre aspekter ved tallene og telling. Ved å løse den andre oppgaven over (23+24) via dobling, får man gjort erfaringer som styrker multiplikasjonsbegrepet. Den foreslåtte metoden for å løse den siste oppgaven: bytt om rekkefølgen på tallene og legg til en, styrker oppfatningen av tallsystemet. I tillegg lærer man at ved addisjon har ikke rekkefølgen på tallene betydning for resultatet. Hvis man innser at den første oppgaven kan løses ved å trekke fra en tier, lærer man samtidig noe om posisjonssystemet. Man får bedre forståelse for oppbyggingen av tallene i enere og tiere. Det bør poengteres at dette i så fall er noe annet enn det å bruke subtraksjonsalgoritmen uten forståelse av hvorfor svaret blir riktig. Noen elever kan løse oppgaven ved å stille den opp på «riktig» måte: $\begin{array}{r} 76 \\ -\ 10 \\ \hline = \end{array}$ og deretter trekke fra i kolonne for kolonne: «sju minus en er seks, seks minus null er seks, svaret er sekstiseks». I noen tilfeller kan dette skje uten at elevene er klar over at de i det ene tilfellet har operert på tiere og i det andre på enere. I så fall vil en slik oppgave ikke styrke deres forståelse av posisjonssystemet.

Det siste aspektet er at elevene ved å utvikle egne løsningsmetoder og diskutere metoder som de andre elevene utvikler, får tillit til egne evner i matematikk. Det at en elev tar kontrollen selv, at han løser oppgavene på en måte som han har kommet fram til selv, fører til at han tilskriver en eventuell suksess til egne evner. Dette vil igjen kunne føre til at han går løs på neste oppgave med krum hals. Hvis han er vant til at han klarer å finne på egne løsningsmetoder som gir ham svar på matematikkoppgavene, vil han ikke være redd for å prøve ut forskjellige egenproduserte metoder ved nye oppgaver. Denne holdningen er svært gunstig med tanke på å kunne finne svar på nye oppgaver. På denne måten skapes en god sirkel, som Imsen (1991) kaller mestringsmotivasjon.

Her er en oversikt over forskjellige addisjons- og subtraksjonsstrategier som er knyttet til forskjellige tallstørrelser. Dette er løsningsmetoder som læreren kan fokusere på i undervisningen ved å gi oppgaver hvor elevene får mulighet til å utforske disse sammenhengene.

Nullkombinasjoner:	N+0, 0+N, N-0, N-N
En-kombinasjon:	N+1, 1+N, N-1
To-kombinasjon:	N+2, 2+N, N-2
Dobbeladdisjon:	N+N, det å vite at 12+12 = 24
Dobbeladdisjon pluss en:	N+(N+1), at 12+13 kan skrives som 12+12+1 = 24+1
Tiervenn:	N+(10-N), det å vite at 1+9, 2+8, 7+3, 6+4 alle er 10
Nieraddisjon:	N+9, 9+N, legger til ti og tekker fra en: 16+9 = 16+10-1
Distribusjon om ti:	Legger sammen/trekker fra slik at du oppnår en hel tier, så legges til/trekkes fra resten, 16+9 = 16+4+5 = 20+5
Ener-differanse:	Det å vite at 5-4, 27-26 o.l. er lik en.
Legg-til-ti (eller hundre):	N+10, 10+N, N-10

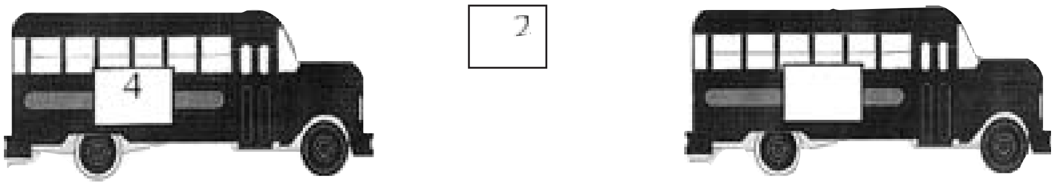
Elevaktivitet
Denne aktiviteten, som passer for 6-åringer, har et praktisk utgangspunkt: En buss kommer kjørende. Noen mennesker går av eller på bussen. Dette er dermed en additiv struktur hvor vi

har én mengde, og en annen kommer til eller går fra. Dette kan som nevnt gi opphav til mange forskjellige oppgavetyper alt etter hva som er ukjent. Ved å variere situasjonen, slik at man får inn større tall og/eller andre regneoperasjoner, kan denne aktiviteten brukes for alle elever på småskoletrinnet.

For at elevene skal sette seg godt inn i situasjonen, foreslås det at de først får anledning til å spille selve situasjonen først. Etter en stund kan deres oppmerksomhet ledes mot antall passasjerer. Deretter innføres en slags billedlig notasjon som gradvis blir mer og mer formell. Hensikten med en slik utvikling er at de formelle symbolene får en konkret forankring, de blir ikke «tomme» symboler.

1. Leik i klasserommet: Lag en buss ved hjelp av stoler etter hverandre. Tell opp hvor mange det er på bussen, hvor mange det er som venter på holdeplassen og som skal på bussen. Se deretter på hvor mange det nå er på bussen. Tilsvarende når noen går av.

   Skriv opp enkelte episoder på tavla på denne måten:

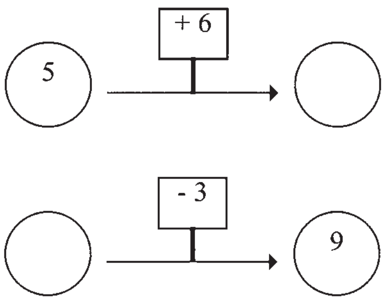
   

2. Lag noen oppgaver som denne: «Det var 5 mennesker på en buss. Så kom det på 2 til. Hvor mange var det nå på bussen?» Disse løses ved å «spille dem». Oppgavene må inneholde både addisjon og subtraksjon. I tillegg bør det varieres hvilken størrelse som er ukjent: Noen ganger «hvor mange var det på bussen etter holdeplassen?», noen ganger «hvor mange var det på holdeplassen?», og noen ganger «hvor mange var det på bussen *før* holdeplassen?»

   Skriv episodene og svarene opp på tavla som under punkt 1.

3. Kopier opp noen ark med oppstillinger som vist over. La elevene finne på egne episoder og be dem illustrere disse på arkene sine. I tillegg kan de etter tur vise oppgavene sine for de andre, for eksempel på tavla.

4. La elevene løse regneoppgaver på ark hvor bussen er byttet ut med sirkler:

5. Til slutt kan de lage egne oppgaver på ark hvor de bruker sirkler og piler som de selv vil. Også nå bør elevene få anledning til å diskutere forskjellige framgangsmåter med hverandre. Dette kan gjøres i grupper eller ved at de kommer opp på tavla og viser hvilke oppgaver de har arbeidet med, og hvordan de har løst dem.

Det er to poeng som bør nevnes i denne sammenhengen. Det ene er at den formelle notasjonen introduseres i forbindelse med addisjon og subtraksjon ved å bygge på elevenes oppfatninger av en situasjon. Alle symbolene referer til størrelser fra den opplevde situasjonen, de er ikke «tomme» symboler. Det skapes dermed en nær forbindelse mellom symbolene og det de representerer.

Det andre poenget gjelder både det å variere mellom forskjellige additive strukturer og å variere hvilke størrelser som er ukjente. Når læreren skal lage andre undervisningsopplegg, må hun gjøre begge disse variasjonene. På den måten vil elevene kunne møte addisjon og subtraksjon i ulike sammenhenger og derigjennom kunne gjenkjenne den additive strukturen i disse.

7.3 Multiplikative strukturer

På samme måte som additive strukturer både kan danne oppgaver som kan løses ved at to tall trekkes fra hverandre og oppgaver hvor to tall legges sammen, kan *multiplikative strukturer* både danne oppgaver som løses med multiplikasjon, og oppgaver som kan løses med divisjon. Slike oppgaver kan også løses på andre måter, som addisjon, subtraksjon, telling eller kombinasjoner av flere måter. *Den underliggende strukturen* kan altså være den samme selv om oppgaven blir løst på forskjellige måter. Som ved additive strukturer vil forskjeller i hva som er kjent og ukjent gjøre at én oppgave gjerne blir kalt multiplikasjonsoppgave mens en annen kalles divisjonsoppgave. Det er tilfellet for disse to oppgavene:

(1) I et rom står det 6 bord. Ved hvert bord er det plassert 4 stoler. Hvor mange stoler er det i rommet?

(2) 24 stoler er fordelt likt rundt 6 bord. Hvor mange stoler finnes ved hvert bord?

Strukturen er den samme: Et likt antall stoler er plassert rundt et visst antall bord. Hvis man sier at alle stolene rundt et bord danner ei gruppe, vil situasjonen kunne karakteriseres med at vi har *6 like grupper*. Slike like grupper danner en multiplikativ struktur. I det første tilfellet er det totale antallet ukjent, i det andre er antallet i hver gruppe ukjent. Den første oppgaven kalles gjerne en multiplikasjonsoppgave, den andre en divisjonsoppgave. Divisjonsoppgaver deles gjerne i to kategorier. I den ene vet man hvor mange man skal dele på, men ikke hvor mye hver enkelt får som i oppgave 2. I oppgave 3 nedenfor vet man hvor stor del hver enkelt skal ha (4 stoler), men ikke hvor mange som da kan få (hvor mange bord?). Oppgave 2 kalles *delingsdivisjon*, mens oppgave 3 kalles *målingsdivisjon*. Dette tas grundigere seinere.

(3) 24 stoler skal fordeles rundt noen bord slik at det blir 4 stoler rundt hvert bord. Hvor mange bord trengs?

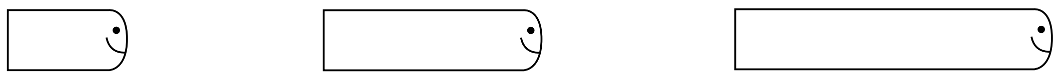
I neste avsnitt skal vi se på forskjellige kategorier av multiplikative strukturer.

Se på denne oppgaven:

30 egg skal legges i kartonger med 6 egg i hver kartong. Hvor mange kartonger trengs da?

Er dette en multiplikasjons- eller en divisjonsoppgave? Det er en oppgave hvor et bestemt antall skal fordeles i grupper og man vet hvor stor hver gruppe skal være. Slike oppgaver kalles ofte *målingsdivisjon*. Elever på småskoletrinnet vil imidlertid løse denne oppgaven ved hjelp av tellebaserte løsningsmetoder, og det er ikke viktig for dem om det enten er multiplikasjon eller divisjon. Utgangspunktet for deres løsningsmetoder vil være telling. Seinere vil de utvikle mer effektive metoder som gjentatt addisjon (6+6=12, 12+6=18, 18+6=24, 24+6=30) eller gjentatt subtraksjon (30-6=24, 24-6=18 osv.), og de vil utvikle faktakunnskaper som hjelper dem i arbeidet med slike oppgaver. Selv om de i begynnelsen bruker forholdsvis arbeidskrevende framgangsmåter, bør elevene helt fra 1. klasse møte oppgaver som har multiplikative strukturer.

Når multiplikasjon introduseres i grunnskolen, skjer det som regel som en raskere metode for å løse oppgaver med gjentatt addisjon: *Petter kjøper 2 pærer som koster 3 kr hver. Hva må han betale?* $2 \cdot 3 = 6$. Multiplikasjon er imidlertid et begrep som inngår i mange forskjellige strukturer. Noen av disse strukturene kan være til dels ganske annerledes enn gjentatt addisjon. Clark & Kamii (1996) har undersøkt hvordan elever i 1. til 5. klasse reagerer på en multiplikasjonsoppgave som ikke involverer gjentatt addisjon. Til oppgaven brukte de tre «fisker». De så omtrent slik ut, og var henholdsvis 5, 10 og 15 cm lange:



fisk A fisk B fisk C

Elevene fikk vite at den midterste fisken, fisk B, spiste 2 ganger så mye som den minste fisken, fisk A, og at den største, fisk C, spiste 3 ganger så mye som den minste. Dette fordi fisk B er 2 ganger så stor som fisk A, mens fisk C er 3 ganger så stor. Som oppgave fikk elevene vite at den minste fisken spiste 1 matbit hver dag, hvor mange spiste de to andre? Deretter fikk de tilsvarende oppgaver hvor antall matbiter en av fiskene spiste hver dag ble oppgitt, og elevene skulle regne ut hvor mange biter de to andre fiskene spiste. Elevene hadde omtrent 100 slike «matbiter» tilgjengelig. Oppgavene var:

1. fisk B spiser 4 biter
2. fisk C spiser 9 biter
3. fisk A spiser 4 biter
4. fisk A spiser 7 biter

Elevene ble intervjuet, og besvarelsene fordelte seg i to kategorier: de som svarte med addisjon og de som brukte multiplikasjon. Addisjonsbesvarelsene fordelte seg også i to kategorier. Dette gir:

Nivå 1: Additiv tenkning ved å legge til +1 eller +2
Eleven relaterer fiskene til hverandre, men gir konsekvent fisk B en matbit mer enn fisk A, og fisk C får en bit mer enn fisk B. Hvis fisk B skal ha 4 biter, får A 3 og C 5 biter. Disse elevene har innsett, kanskje utfra størrelsen på fiskene, at de skal ha forskjellige mengder mat, og de vet hvem som skal ha mest og minst. De bryr seg imidlertid ikke om det multiplikative aspektet og heller ikke om tallene som inngår (at fisk B skal ha 2 ganger så mye som fisk A).

Nivå 2: Additiv tenkning ved å legge til +2 for fisk B og +3 for fisk C
Det som bestemmer om en elev er på dette nivået, er om han bruker multiplikasjonsfaktorene, det at fisk B skal ha 2 ganger mer og fisk C skal ha 3 ganger mer. De bruker dermed riktige tall, men som for elever på nivå 1, brukes tallene til addisjon. Hvis fisk A skal ha 4 biter, skal B ha to til, altså 6 mens C skal ha enda tre til, altså 9.

Nivå 3: Multiplikativ tenkning
Her løses oppgavene korrekt med multiplikasjon. Løsningsmetodene kan variere, fra telling til bruk av faktakunnskaper.

Denne tabellen viser hvor mange prosent av elevene som befinner seg på de forskjellige trinnene etter hvilken klasse de går i (totalt 327 elever):

Nivå	1. klasse	2. klasse	3. klasse	4. klasse	5. klasse
1	62	44	14	15	7
2	16	11	22	3	3
3	22	45	64	82	91

Dette må sies å være en enkel multiplikasjonsoppgave. Det er en situasjon som det er greit for elevene å sette seg inn i, og tallene er ikke særlig store. Allikevel er det først i 4. og 5. klasse at en stor majoritet bruker multiplikasjon. I 3. klasse bruker over en tredel additiv tenkning, og selv i 4. klasse bruker 15 % additiv tenkning på laveste nivå.

I KIM-undersøkelsen om *Tall og tallregning* ble 7. og 9. klassinger bedt om å skrive en fortelling som passet til regnestykket 7,5 · 2,7. Det viste seg at det kun var 12 % av 7. klassingene og 28 % av 9. klassingene som svarte tilfredsstillende. Også her bruker elevene ofte additiv tenkning: *Mari er på butikken og kjøper to varer. Den ene koster 7,5 kr og den andre 2,7 kr. I kassa må hun da betale 20,25 kr.* Det var 18 % av 7. klassingene og 11 % av 9. klassingene som svarte på denne måten. En slik oppfatning er svært utbredt i lavere klassetrinn. I en tilsvarende amerikansk undersøkelse svarte omkring 40 % av 4. klassinger med addisjonsfortelling når de skulle skrive en tekst som passet til 6 · 3 = 18; fortellinger som: *Det er 6 ender i en dam. En stund etter kommer det 3 ender til. Hvor mange er det der nå?* (O´Brien & Casey, 1983). Det synes som om den sterke vektleggingen av gjentatt addisjon i innføringen av multiplikasjon skaper oppfatninger om at multiplikasjon er omtrent det samme som addisjon. Denne oppfatningen sitter igjen hos mange elever gjennom hele grunnskolen, og den virker negativt inn spesielt når elevene blir stilt overfor oppgaver som har en annen *multiplikativ struktur* enn gjentatt addisjon. Nedenfor presenteres forskjellige multiplikative strukturer, det vil si kategorier av forskjellige typer multiplikative oppgaver. Hvis elevene skal utvikle gode multiplikasjonsbegreper, er det nødvendig at de alt på småskoletrinnet gjør erfaringer med forskjellige strukturer som kan knyttes til multiplikasjon.

For divisjon er situasjonen den samme. Som nevnt skal vi i neste kapittel se nærmere på forskjellige multiplikative strukturer. Disse strukturene vil gi opphav til multiplikasjons- eller divisjonsoppgaver alt etter hva som er ukjent. Det gjelder disse to oppgavene om areal:

(1) Arvid skal male en vegg. Den er 4 m bred og 3 m høy. Hvor stort areal skal Arvid male?

(2) Mona får vite at den veggen hun skal male, er 12 kvadratmeter. Hun skritter opp og finner at veggen er omtrent 4 m bred. Hvor høy er veggen?

På den måten vil alle strukturene gi både multiplikasjons- og divisjonsoppgaver. Når det gjelder divisjon, er det nyttig å innføre en annen oppdeling. Det er i følgende to kategorier:

1. Delingsdivisjon, hvor det er et eller annet som skal fordeles på et bestemt antall. Et godt kjent eksempel er ekornoppgaven hvor 14 nøtter skulle deles på 3 ekornunger. Det ukjente er hvor mye hver enkelt skal ha.
2. Målingsdivisjon. Her har man også et eller annet som skal fordeles, men nå vet man hvor mye eller hvor stor del hver enkelt skal ha, og det ukjente er da hvor mange som kan få eller hvor mange deler helheten er delt opp i. Denne strukturen fås hvis man har 14 nøtter som skal fordeles slik at hver unge får 4 nøtter hver. Hvor mange unger vil da få nøtter?

I KIM-undersøkelsen om *Tall og tallregning* ble elevene bedt om å lage en fortelling som passet til regnestykket 18 : 4,5 = 4. Den er omtrent umulig å løse med delingsdivisjon, mens målingsdivisjon passer greit; for eksempel at 18 m gardinstoff skal deles opp i gardiner som er 4,5 m lange, hvor mange gardiner kan lages? Kun 12 % av elevene i 7. klasse og 26 % i 9. lagde en tilfredsstillende fortelling. Det var flere, 21 % i 7. og 17 % i 9. klasse, som skrev fortellinger med delingsdivisjon. Det kan være vanskelig å få til. En elev svarte:

> *Når de var 4 voksne og en treåring (regnes som $^1/_2$) og hadde 18 epler. Hvor mange epler fikk hver person da?*

I andre tilfeller er det 4 personer og et dyr som skal dele noe. Dette er en oppgave hvor få elever svarer riktig. Grunnen til det er antakeligvis ikke fordi målingsdivisjon er vanskeligere enn delingsdivisjon. Det er større grunn til å tro at dette er et resultat som avspeiler den undervisningen som elevene har hatt. Slik divisjon presenteres i lærebøkene, vil så å si all erfaring elevene gjør med divisjon på skolen dreie seg om delingsdivisjon. Når de møter en divisjonsoppgave som den over, forsøker de å dra nytte av tidligere erfaringer. Det å prøve med delingsdivisjon her gir feil svar, og dette er nok et eksempel som viser hvor viktig det er at elevene gjør erfaringer med varierte problemstrukturer, også i forhold til divisjon.

7.3.1 Problemstrukturer

Som nevnt ovenfor, kan multiplikative strukturer både lede til oppgaver som kan løses med multiplikasjon og divisjon. Det er ikke strukturen som avgjør hvorvidt det er enklest med den ene eller den andre regnearten, men hva som er ukjent. I denne delen vil alle eksemplene være det vi kaller «multiplikasjonsstykker», men ved å forandre hva som er kjent og ukjent, kan alle oppgavene gjøres om til divisjonsoppgaver. Her skal vi se nærmere på hvilke oppgavetyper som er av en slik struktur.

Like grupper
Her dreier det seg om grupper med likt antall. Eksemplet ovenfor er av denne typen: *I et rom er det 6 bord med 4 stoler rundt hvert bord. Hvor mange stoler er det i rommet?* Dette er en forholdsvis enkel struktur, og som tidligere nevnt, introduseres multiplikasjon gjerne med oppgaver med en slik underliggende struktur. Disse oppgavene kan løses ved gjentatt addisjon: 4 (stoler) + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24. Hvis oppgaven hadde dreiet seg om målingsdivisjon, for eksempel *24 stoler og 4 stoler rundt hvert bord, hvor mange bord trengs?* kunne man finne et svar ved gjentatt subtraksjon: 24 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4.

Rekker
Her er det også snakk om like grupper, men de er ordnet slik at de danner et mønster, for eksempel ved at gruppene er ordnet i rekker: *På en parkeringsplass er bilene ordnet i 12 rekker. Det er 4 biler i hver rekke. Hvor mange biler er det på parkeringsplassen?* Disse oppgavene kan også løses ved gjentatt addisjon, og brukes ofte i innføringen av multiplikasjon.

Forstørring
Når vi forstørrer eller forminsker, bruker vi multiplikasjon: *Et bilde er 6 cm langt og 4 cm høyt. Det blir forstørret slik at det blir 15 cm langt. Hvor høyt er det nå?* Et annet eksempel er oppgaver hvor noe blir «så-og-så mange ganger» forstørret: *Mons sin skolevei er 2 km lang. Kari sin er 3 ganger så lang. Hvor lang er Kari sin skolevei?*

I norsk dagligtale omtaler vi oftest en multiplikativ økning ved å vise til den *nye totalen*. Hvis ei jente ser 5 krabber fra brygga en dag, kan hun neste dag si: *«I dag er det 3 ganger så mange!»* Da refererer hun antakeligvis til den nye totalen, at hun har sett 15 krabber. Man kan også vise til multiplikativ økning ved å referere til *økningen*: *«Nå tjener jeg en halv gang mer enn i fjor»*. Dette er mer vanlig enn: *«Nå tjener jeg en og en halv gang det jeg tjente i fjor»*. Det er ikke alltid like enkelt å skille disse to momentene fra hverandre. Jeg ga følgende oppgave til noen 8-åringer: *«En kveld så jeg ut av vinduet mitt. Da kunne jeg se 7 stjerner. Kan dere lage en tegning av det?»* Så tegnet barna 7 stjerner før jeg fortalte videre: *«Seinere på kvelden så jeg ut av vinduet igjen, og nå var det 3 ganger så mange stjerner der. Kan dere tegne det på samme ark?»* Nå tegnet de fleste barna 21 stjerner i tillegg til dem som allerede var der fra før. Det er derfor viktig at læreren holder fram og tydeliggjør denne forskjellen.

Forhold mellom tall
Dette er oppgaver hvor to størrelser står i et multiplikativt forhold til hverandre. Forhold dukker opp i mange forskjellige sammenhenger, og det er viktig for forståelsen av forhold at elevene gjør erfaringer med regning i alle disse sammenhengene. Den grunnleggende matematiske strukturen vil være lik, selv om situasjonene er forskjellige. Her kommer noen eksempler:

Omregning. *Kari betaler 55 kroner for 5 pund. Hvor mye må Åge betale for 8 pund?* Her regnes det om fra en valuta til en annen. Tilsvarende situasjon får man hvis man skal regne om fra meter til tommer eller fra km/t til knop eller m/s.

Likt forhold, samme enhet. *3 liter blå maling blandes med 5 liter rød for å få ønsket farge. Hvor mange liter blå maling må blandes med 15 liter rød maling for å få den samme fargen?* Her er det også to størrelser som står i forhold til hverandre: Blå og rød maling skal blandes i forholdet 3 til 5. Disse to størrelsene har samme enhet siden det i begge tilfellene er snakk om maling. Et annet eksempel: på et halsbånd er det tre røde perler for hver blå. Når det er 5 blå perler på halsbåndet, hvor mange røde består det av? Forholdet mellom røde og blå perler er 3 til 1. Den multiplikative strukturen kommer tydelig fram ved en tegning:

Svaret er altså $5 \cdot 3 = 15$.

Likt forhold, forskjellig enhet. *Til trolldeig brukes 50 g mel til 1 dl vann. Hvor mye mel trengs til 2,5 dl vann?* Denne oppgaven er nokså lik den over, men enhetene det regnes med er forskjellige: Her står mel og vann i forholdet 50 g til 1 dl. Siden enhetene er forskjellige, må dette oppgis sammen med forholdstallene, det holder ikke å si «Bland mel og vann i forhold 50 til 1».

Hvis den siste oppgaven hadde vært: *Til trolldeig brukes 50 g mel til 1 dl vann. Hvor mye mel trengs til 3 dl vann?* kunne elevene løst den ved gjentatt addisjon. Grunnen til det er at forholdet er et-eller-annet til én. Ved forhold hvor det ikke er tilfellet, som med malingen hvor forholdet var 3 til 5, er det ikke mulig å bruke gjentatt addisjon direkte. Av den grunn vil elever på småskoletrinnet i mindre grad kunne bruke intuitive metoder på slike oppgaver. Det er derfor nødvendig at det arbeides lenge og grundig med slike oppgaver i situasjoner som elevene kjenner godt til og hvor tallene som inngår er forholdsvis små.

Multiple proporsjoner
Dette er en kategori som er annerledes enn de andre. Dette er ikke en egen struktur, men er tatt med for å vise at de multiplikative strukturene kan være sammensatt av mer enn to tall. I forbindelse med like grupper kan en slik oppgave være: *I en restaurant er det 3 rom. I hvert rom er det 6 bord med 4 stoler rundt hvert bord. Hvor mange stoler er det i restauranten?* Tilknyttet

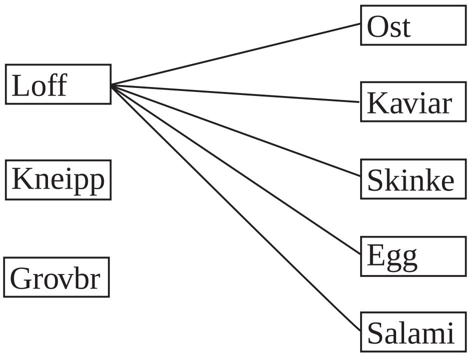
forhold kan en slik oppgave lyde: *6 g kaffe per person hver dag. Hvor mye kaffe trengs til 15 personer i 7 dager?* Her står kaffe og person i forhold 6 til 1.

Kartesisk produkt

Et eksempel på oppgave som involverer kartesisk produkt, er:

> *Du har 3 sorter brød og 5 sorter pålegg.*
> *Hvor mange ulike typer smørbrød kan du lage?*

Slike oppgaver kan løses ved å lage en slik oversikt:

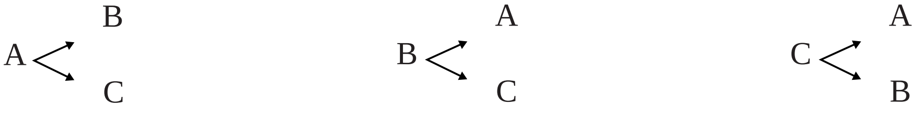


Den multiplikative strukturen kommer tydelig til syne ved å illustrere situasjonen på denne eller tilsvarende måter.

Med loff kan man lage 5 smørbrød, og tilsvarende for kneipp og grovbrød. Til sammen $5 \cdot 3 = 15$ forskjellige smørbrød. Dette er en struktur som det arbeides lite med i norsk skole, noe som har ført til at mange barn selv på ungdomstrinnet løser slike oppgaver ved å legge sammen de to størrelsene: $5+3 = 8$. Imidlertid er denne strukturen lett å visualisere, både med konkret materiale (Finn fram en bunke med røde, grønne og blå kort. Disse kortene representerer brødtypene. Bruk terninger med 5 forskjellige farger som pålegg. Da vil en terning oppå et kort være et smørbrød.) og visuelt, enten ved tegninger av smørbrød eller ved diagrammer, som det som er presentert her. Et annet eksempel: *Malin har 3 skjorter og 2 skjørt. Hvor mange forskjellige drakter kan hun lage?* Denne oppgaven kan konkretiseres ved hjelp av papirdukker eller med terninger av forskjellig form og farge. Ved å lage slike konkrete representasjoner kan barn helt nede i 7-8-årsalderen arbeide med slike multiplikasjonsoppgaver. Etter en tids arbeid med fysiske objekter bør elevene stimuleres til å lage diagrammer eller andre former for tegnede framstillinger. Når man har lært å bruke diagrammer som verktøy for å representere strukturen, kan oppgaven løses gjennom systematisk telling. Slike oppgaver vil da ikke være vanskeligere for barna enn *like grupper*.

Permutasjoner

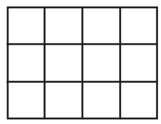
Denne strukturen ligner litt på den over, men her vil de tingene som inngår hentes fra én mengde. Et eksempel herfra er: *3 personer deltar i en bowlingturnering. Hvor mange resultatlister er mulig?* Vi kaller disse personene A, B og C. Her har vi tre muligheter på førsteplass: A, B eller C. Når det gjelder andre plass, så har vi, når én er «brukt opp» til førsteplassen, to muligheter. Hvis A har vunnet, så kan enten B eller C bli nummer to. Hvis B vinner, blir enten A eller C nummer to, og hvis C vinner, blir enten A eller B nummer to. Skjematisk vil dette se slik ut:



Når det gjelder 3. plassen, så er den alt bestemt i og med at det kun er en person igjen: Hvis A vinner og B blir nummer to, så er det kun C igjen til 3. plassen. Vi har altså 3 mulige vinnere, hver med to muligheter til 2. plass. Dette gir $3 \cdot 2 = 6$ mulige kombinasjoner. Det å forandre innbyrdes i en gruppe kalles å *permutere*. De forskjellige rekkefølgene som framkommer når vi forandrer den innbyrdes rekkefølgen, kalles permutasjoner. Her har vi altså 6 permutasjoner: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Hvis vi hadde hatt fire deltakere, så ville antall mulige permutasjoner vært: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Dette fordi hver av de 4 deltakerne kan bli vinneren og de resterende 3 deltakerne kan, som vi har sett, ordnes på 6 måter. Se om du klarer å lage en oversikt over alle de 24 mulighetene. Dette er en forholdsvis vanskelig struktur. Hvis man vil bruke den på småskoletrinnet, bør det gjøres med sterk tilknytning til en konkret situasjon, som ved resultatliste som over, eller ved kø-dannelse (4 personer, A, B, C og D, står i kø. På hvor mange forskjellige måter kan køen ordnes?).

Areal/volum
Både når man beregner areal og volum, dannes en multiplikativ struktur. Når man skal gjøre en måling, trengs en standardenhet (se kap. 8 om målinger). For måling av areal kan vi bruke en *kvadratmeter* som standardenhet. En kvadratmeter er arealet av et kvadrat hvor begge sidene er 1 m. Med en slik måleenhet kan man for eksempel finne arealet av et rektangel som er 3 m bredt og 4 m langt:

Standardenhet: □ = 1m^2 Rektangel:



Dette rektanglet består av $4 \cdot 3 = 12$ standardenheter, altså 12 m^2. Beregning av areal og volum er utdypet videre i kapitlet om geometri, kap. 9.

Denne presentasjonen har vist de viktigste multiplikative strukturene og hvordan de dukker opp i forskjellige praktiske sammenhenger. Som nevnt i kap. 3, består matematisk ferdighet *både* i det å kunne utføre enkelte ferdigheter, vite enkelte fakta, *og* det å vite når det er passende å bruke de forskjellige fakta/ferdighetene. For å styrke den problemløsende siden av de matematiske begrepene, er det nødvendig at elevene alt fra de begynner på skolen, får anledning til å gjøre erfaringer med hvordan begrepene dukker opp i forskjellige sammenhenger. Dette vil både øke den problemløsende evnen til elevene, og det vil synliggjøre de matematiske begrepene. Ved å arbeide med multiplikative strukturer i forskjellige situasjoner, vil elevene etter hvert kunne se utover den praktiske situasjonen og avdekke det som er felles for alle situasjonene. Det matematiske begrepet vil stå klarere fram og elevene vil lettere kunne gjenkjenne den underliggende strukturen og ta i bruk de matematiske verktøyene de trenger for å kunne løse et bestemt problem.

7.3.2 Løsningsstrategier

Elever bruker mange forskjellige løsningsstrategier også når de skal løse oppgaver med multiplikativ struktur. Når det gjelder deling, kan vi skille mellom deling av *diskrete* mengder, mengder hvor det er et bestemt antall objekter som skal fordeles, og *kontinuerlige* objekter (for eksempel det å dele et tau i tre like deler). De mest vanlige måtene barn deler kontinuerlige objekter på, er følgende:

- Kutte objektet opp i mange små biter, for så å fordele bitene likt. Denne metoden ligner det man gjør når man kutter opp mat, for eksempel en gulrot, i biter.

- Foreta en romslig oppdeling i biter, hvor bitene er av varierende størrelse og hvor antallet ikke nødvendigvis stemmer. For eksempel hvis et tau skal kuttes opp til hoppetau til tre dukker, kan elever kutte det i to nokså ulike biter. Ulikheten løses ved at tauene går på omgang. Dette er en form for fordeling som elevene er vant til fra sin hverdag.

- Dele i like deler, men uten å bruke opp hele materialet. For å dele et tau i to, kan elever kutte av en bit, legge den langs resten av tauet slik at de får kuttet av en bit til som er like lang. Dermed får de to like lange taubiter, og noe av det opprinnelige tauet kan bli igjen til overs. Dette er også en form for fordeling som elevene er vant til fra sin hverdag. For eksempel deles mat ofte på denne måten, slik at noe blir lagt til side til seinere.

- Strategier for å dele i to (så å si) like deler. Et tau kan for eksempel deles i to ved å legge det dobbelt, det kan deles i tre ved å legge det tre-dobbelt gjennom en tilpassing av lengdene.

Deling av diskrete mengder gjøres oftest med strategier fra disse kategoriene:

- En helt tilfeldig fordeling. Ideen om at fordelingen skal være lik, er ikke til stede. Hvis læreren spør om delingen er lik eller rettferdig, kan eleven svare «ja» eller foreta en tilfeldig refordeling.

- Tilfeldig deling med et likhetspotensial. Med dette menes at selve delingen er tilfeldig, men at det er muligheter for å gjøre delingen lik, for eksempel ved at læreren ber eleven om å sammenligne de fordelte mengdene. En slik sammenligning kan gjøres ved å sammenligne visuelt. Hvis det er terninger som er fordelt, kan mengder sammenlignes ved å bygge tårn av dem og se om tårnene blir like høye. Objektene kan også legges på rekker slik at de kan sammenlignes ved å se på lengden av rekkene.

- Fordele ut fra en visuell oppfatning av mengdene, en «omtrentlig» fordeling. Som tidligere nevnt kan mennesker oppfatte antall av små mengder uten å telle. Denne evnen kalles *subitising*, og kan brukes til å dele diskrete mengder. Delingen kan etterpå sjekkes for eksempel ved telling. Denne typen strategi kalles ofte «gjett-og-sjekk».

- Lik fordeling med en deleprosedyre. Det vanligste her er å fordele objektene en-og-en, eller å fordele et større antall til hver. Det er også vanlig å kombinere disse to metodene. Hvis man skal fordele 15 klosser til 3 personer, kan man først gi 3 til hver for deretter å dele ut en-og-en.

- Lik fordeling ved hjelp av faktakunnskap. Hvis man vet at $12 : 4 = 3$, behøver man ikke å bruke konkreter til å finne svar. Man kan også bruke deleprosedyrer som baserer seg på tallene, ikke på konkretene som inngår i oppgaven. Se på denne oppgaven: «81 voksne skal sitte med 6 ved hvert bord, hvor mange bord?» Den kan løses ved gjentatt addisjon: ved å legge sammen 6+6+6+6+… til man passerer 81. Den kan løses ved gjentatt subtraksjon, ved å trekke fra 6-ere fra 81 til man passerer 0. Endelig kan den løses ved multiplikasjon , gjerne i kombinasjon med gjentatt addisjon/subtraksjon. For eksempel kan man trekke fra 10 bord = 60 voksne. Da har man igjen 21 voksne som får plass rundt 6+6+6+3 = 4 bord.

Elevaktivitet

Bondegård

En bondegård er et scenario som innbyr til mange forskjellige aktiviteter som fokuserer på deling både av diskrete og kontinuerlige størrelser. Det er som regel mest hensiktsmessig å starte med diskrete mengder for de minste barna. Dette har flere fordeler framfor deling av kontinuerlige størrelser. For det første er barna vant til denne typen deling. For det andre kan delingene gjøres mer presise, noe som er nødvendig for å utvikle kunnskap om likhet. Når man for eksempel deler et tau i tre deler, er det svært vanskelig å gjøre dette helt eksakt. Denne eksaktheten gjør det også lettere for læreren å følge med i utviklingen av et divisjonsbegrep hos den enkelte eleven. For det tredje gir diskrete mengder mulighet til å fokusere på ekvivalensen mellom forskjellige brøker/fordelinger, det at en tredel, to seksdeler og fire tolvdeler av 12 sauer er alle 4 sauer.

På en bondegård vil det være mange forskjellige mengder som kan telles opp: antall sauer, kyr, høner osv. Her gis mange muligheter for oppdelinger, i jorder, hus, veier og elver. Dette er en situasjon som både kan modelleres ved konkreter (sandkasse, lekedyr, esker som forestiller låve o.l.) eller ved tegninger/filttavler.

Her er det mange muligheter for fordelinger:

> *Bonden har nettopp kjøpt seg en bondegård, men han har ingen dyr. Derfor drar han til byen og kjøper noen griser. Putt noen griser på lastebilen. Når han kommer hjem, skal han la grisene være i to innhegninger, like mange i hver. Kan du plassere grisene?*
>
> *Er det nå like mange griser i hver innhegning? Hvorfor/hvorfor ikke?*

I startfasen er det viktig å arbeide med selve fordelingen, det å dele mengder opp i likt antall. Siden mange elever har den oppfatningen at det ikke er nødvendig å fordele hele mengden, er det viktig å fokusere på eventuell rest. Når får vi rest, hva skal vi gjøre med den?

Seinere må læreren introdusere et språk for delingen:

> *Nå har bonden kjøpt 18 høner. Halvparten av dem skal i denne hønsegården, den andre halvparten skal i den andre. Kan du fordele hønene? Fint, nå er 18 høner delt på 2 hønsegårder slik at det er 9 høner i hver.*
>
> *Den første dagen la hønene hvert sitt egg. Kan du fordele eggene i disse 3 eskene slik at en tredel av eggene blir lagt i hver eske?*

Det vil ofte være naturlig å knytte delingen til stambrøker (en halv, en tredel...) slik det er gjort i det ovennevnte eksemplet. Dette legger et godt grunnlag for brøkregning.

I det videre arbeidet i denne situasjonen må elevene få oppgaver hvor problemstrukturen er variert, hvor tallstørrelsene varierer, og hvor mer formell notasjon innføres:

> *Bonden kjøper 15 kyr. Han har plass til 4 kyr i lastebilen sin. Hvor mange ganger må han kjøre fram og tilbake til byen? (målingsdivisjon)*
>
> *Hvis de 18 hønene legger ett egg hver dag i ei uke, hvor mange egg har de lagt da? (større tall, multiplikasjon, gruppering)*
>
> *Bonden har mistet noen sauer fordi gjerdet gikk i stykker. Nå har han bare en firedel av sauene igjen. Hvor mange sauer er borte? (brøkregning)*

Hvis noen av oppgavene faller vanskelig, kan situasjonene spilles/konkretiseres/visualiseres. Det kan gjøres ved at elevene spiller forskjellige dyr, ved å bruke lekedyr, eller ved å lage tegninger/diagrammer av den aktuelle situasjonen.

Det er viktig at elevene arbeider lenge med hver oppgave. I stedet for å gå videre til en ny oppgave, bør elevene oppfordres til å

- diskutere sin løsningsmetode med andre elever
- se om de kan finne andre måter å løse oppgaven på
- skrive ned løsningen sin
- finne på egne tilsvarende oppgaver med andre tall
- svare på «hva hvis...» oppgaver (hva hvis bonden kjøpte 16 kyr, hva hvis han hadde plass til 5 kyr i lastebilen ...)

7.3.3 Misoppfatninger

Hvis elever får begrensede erfaringer med forskjellige matematiske strukturer, vil de lett få svært mangelfulle og til dels feilaktige oppfatninger om hva multiplikasjon og divisjon er. Den mest utbredte misoppfatningen er at «multiplikasjon gjør større». At mange norske elever har en slik oppfatning, ses tydelig gjennom denne oppgaven fra KIM-undersøkelsen om *Tall og tallregning*. Oppgaven går ut på at elevene skal velge passende regneuttrykk til følgende tekst (de skal altså ikke regne ut svaret, men sette ring rundt det uttrykket de tror passer):

Kaker skal fylles i bokser med 0,75 kg i hver. Hvor mange bokser kan fylles med 6 kg kaker?

Oppgaven ble gitt til 9. klasse og prosentandelen som svarte riktig (6:0,75) var 41. Det var over 40 % som svarte med multiplikasjon, enten 6·0,75 eller 0,75·6 eller begge deler. Dette er en misoppfatning. Det vil si at det er et mønster som går igjen i flere oppgaver, det er ikke kun en tilfeldig feil. Når et svar skal bli større, velger disse elevene multiplikasjon. Grunnen til denne misoppfatningen ligger antakeligvis i matematikkundervisningens sterke vektlegging av regning med hele tall og ved overveiende bruk av strukturen som her er kalt «like grupper». Hvis en elev kun har gjort erfaring med multiplikasjon og divisjon gjennom slike oppgaver, er denne oppfatningen en naturlig generalisering.

Den omvendte misoppfatningen, at «divisjon gir mindre» er også meget utbredt. Følgende oppgave er også hentet fra KIM-undersøkelsen, og også her skal elevene skrive et passende regneuttrykk, ikke regne ut svaret:

1 kg svinekoteletter koster 69,50 kr. Hvor mye koster 0,76 kg?

Denne oppgaven ble gitt til 7. og 9. klasse, og andelen som svarte riktig (69,50·0,76) var henholdsvis 27 og 47 %. Det mest utbredte feilsvaret var 69,50 : 0,76. Noen svarte 0,76 : 69,50 og noen svarte begge de to delingsuttrykkene. Tilsammen svarte nesten halvparten av elevene i 7. klasse og en tredel av elevene i 9. klasse med divisjon. En tilsvarende oppgave lød:

1 kg pølser kostar 49,50. Per kjøper 1,7 kg. Kor mykje kostar det?

Andelen elever som svarte riktig her var henholdsvis 44 og 61 % i 7. og 9. klasse. Her var det 26 % av 7. klassingene og 15 % av 9. klassingene som valgte divisjon. Siden disse to oppgavene er svært like, er det god grunn til å hevde at mange elever lar seg påvirke av misoppfatningen om at divisjon gjør svaret mindre.

En annen utbredt misoppfatning tilknyttet divisjon er at ved deling skal man alltid ta det største tallet og dele på det minste. Flere oppgaver fra KIM-undersøkelsen viser dette. Her er nok en oppgave hvor elevene skal velge den regneoperasjonen de tror passer til teksten:

25 halsbånd blir pakket i ei eske. Om 25 halsbånd veier 3 kg, hvor mye veier da 1 halsbånd?

Blant 5. klassingene var det kun 10 % som svarte riktig (3 : 25). Over dobbelt så mange (22 %) svarte motsatt, at riktig regneuttrykk er 25 : 3. Denne oppfatningen blir forsterket seinere, noe denne tabellen viser:

	5. klasse	7. klasse	9. klasse
3 : 25 (rett svar)	10	13	28
25 : 3 (reverserer)	22	46	53
Både 25 : 3 og 3 : 25	23	23	11
Multiplikasjon	10	8	6

Mange elever snur altså om rekkefølgen på tallene i regnestykket. At dette er en gjennomgående misoppfatning, vises ved en annen oppgave hvor elevene blir bedt om å finne svaret på noen regneoppgaver. Hvis de ikke tror det finnes noe svar, skal de skrive NEI. Når de kommer til regnestykket 0,4 : 5, er det 43 % av 7. klassingene som svarer NEI og 25 % av 9. klassingene (denne oppgaven ble ikke gitt til 5. klasse). Disse elevene gir altså uttrykk for at den underliggende strukturen i problemet betyr lite. Størrelsene på tallene betyr mer, og man kan bytte om rekkefølgen på tallene hvis det passer bedre med selve utregningen. At 23 % av elevene i både 5. og 7. klasse svarer at man kan både bruke 25 : 3 og 3 : 25, viser også at mange oppfatter rekkefølgen på tallene i dette regneuttrykket som vilkårlig.

Alle disse misoppfatningene stammer antakeligvis fra begrensede erfaringer med oppgaver fra forskjellige multiplikative strukturer. I tillegg er erfaringene begrenset til regning med hele tall og til divisjonsstykker «som går opp», altså divisjonsstykker hvor man tar et stort tall og deler på et mindre uten at det blir noe til rest. De oppgavene fra KIM-undersøkelsen som er nevnt her, viser at den undervisningen som er gitt, har ført til at elevene har gjort generaliseringer fra ensidige erfaringer. De misoppfatningene som dette har ført til, er dypt forankret i den enkelte eleven. Det viser undersøkelsen ved at samme elev gjør feil av samme type på flere oppgaver. Andre undervisningseksperimenter har vist at slike misoppfatninger som elever selv har kommet fram til, er det vanskelig å bli kvitt. Det spørsmålet som lærere på småskoletrinnet derfor må stille seg er: Hvordan kan jeg legge opp min undervisning slik at omfanget av slike misoppfatninger blir mindre?

Svaret på dette ligger i det å gi elevene erfaringer med varierte situasjoner, med oppgaver fra forskjellige underliggende strukturer og innen forskjellige tallområder. Det er uheldig å «skjerme» elevene fra det som tidligere er antatt å være vanskelige emner. Eksemplet fra del 1, hvor 8-åringer løste en oppgave hvor 14 nøtter skulle deles på 3 unger, viser at selv små elever kan arbeide med oppgaver som inkluderer divisjon med rest. Tilsvarende kan elever på småskoletrinnet arbeide med alle de forskjellige multiplikative strukturene. Det gjelder bare å finne en utgangssituasjon som elevene kjenner seg igjen i, og gi dem oppgaver innen denne situasjonen som de finner meningsfulle.

Når læreren skal lage andre undervisningsopplegg, gjelder det som for additive strukturer både å variere mellom forskjellige multiplikative strukturer og å variere hvilke størrelser som er ukjente. Igjen vil elevene da kunne møte multiplikasjon og divisjon i ulike sammenhenger. Dette er enda viktigere for multiplikative enn additive strukturer fordi situasjonene ofte vil være adskillig mer komplekse. Det er også en større variasjon av multiplikative strukturer. Det å kunne kjenne igjen disse strukturene vil derfor kreve en betydelig erfaring som må nås gjennom arbeid med disse strukturene i matematikkopplæringen på alle trinn i skolen.

8 Måling

Den matematiske kompetansen i forhold til målinger kan, som andre matematiske begreper, også deles i to: en del som angår fakta og ferdigheter og en del som angår ideen eller begrepet måling og det å kunne bruke målinger i problemløsning. Fakta og ferdigheter vil i denne sammenhengen dreie seg om kunnskaper om måleenheter, ferdigheter i hvordan en måling bør gjennomføres og lignende. Den andre delen dreier seg om *hvorfor* man måler, om hva hensikten med målingen er, om selve ideen om sammenligning og enheter og om det å kunne bruke målinger i forskjellige praktiske sammenhenger. Tradisjonelt har undervisning om målinger vektlagt fakta og ferdigheter. Det kan være hvordan man leser av en temperaturskala i læreboka, hvordan man kan legge linjalen langs pulten for å finne hvor bred den er, hvordan man kan bruke formler for å beregne arealet av forskjellige geometriske figurer og lignende. Slike kunnskaper er både nyttige og nødvendige. Problemet ved at undervisningen ensidig fokuserer på dette aspektet, er at selve hensikten med målingene kan forsvinne i bakgrunnen.

Og hva er hensikten med en måling? Hovedideen som ligger bak så å si alle målinger, er en kommunikasjon av en eller annen størrelse. Hvis du skal sy gardiner, må lengden på dem stå i et rimelig forhold til vinduene. Dette kan du få til ved å holde stoffet opp langs vinduet og tilpasse lengden ved en direkte sammenligning. Denne framgangsmåten fungerer ikke hvis de som syr gardinene ikke kan komme hjem til deg. Da må du foreta en måling av høyden på vinduene, en måling som du kan ta med deg og formidle til den som skal sy. Dette kan gjøres ved hjelp av ei snor: Hold denne opp langs vinduet og merk av på snora hvor lange du vil at gardinene skal være. Det kan også gjøres ved å bruke opptelling av standard måleenheter som meter og centimeter. Når du baker, må du måle mye. Kanskje følger du en oppskrift fra ei kokebok. Da er det forfatteren av denne boka som vil formidle en rekke størrelser til deg. Han har laget ei kake som han likte, og for at du skal kunne lage den (omtrent) samme kaka, må han fortelle deg hvor mye han brukte av de forskjellige ingrediensene. Han sier du må veie opp så mye mel, fylle i så mye væske, ha oppi så mange egg og la kaka steke så lenge. Et siste eksempel: Mange barn måler høyden sin hvert år og gjør det ved å sette et merke i dørkarmen. Grunnen til at man setter dette merket, er at målingen skal tas vare på og formidles til barna ved de kommende års målinger. Seinere synes vi det er upraktisk å måtte vise til et merke i dørkarmen de gangene vi skal oppgi vår egen høyde. Derfor måler vi oss i forhold til et felles lengdemål, vi bruker standardenheter som meter og centimeter.

Felles for disse eksemplene er at hensikten med målingen er en *sammenligning av størrelser*. Det er viktig for forståelsen av målinger at elevene får arbeide med målinger hvor denne hensikten kommer tydelig til syne. Når man måler lengdehopp, er det fordi man vil sammenligne flere hopp med hverandre. Fakta og ferdigheter tilknyttet målingene er kun tjenlige midler for å kunne gjennomføre disse sammenligningene.

Måling er en aktivitet som er knyttet til svært mange matematiske begreper. Når elever foretar målinger, vil de derfor både utvide sine kunnskaper i forhold til måling, og de vil utvide sin forståelse av andre matematiske begreper. Når man måler temperatur, lærer man samtidig noe om tall-linja og kanskje om positive/negative tall. Når man måler hvor lang ei bok er ved å telle et antall centimeter på en linjal, vil man samtidig utvide sitt tallbegrep. I og med at målinger gjøres på virkelige objekter, er dette aktiviteter som kan gi gode konkretiseringer av matematiske begreper. Tidligere har vi sett at mange 6-7-åringer er usikre på tallrekka når tallene blir større enn 29. Gjennom målinger, for eksempel ved å telle opp antall «gullmynter i ei skattkiste», kan de gjøre erfaringer med tallstørrelser større enn 29. Gjennom slike konkretiseringer blir ikke tallene tomme symboler som ikke refererer til noen virkelige størrelser. Tallene peker på en eller annen mengde som elevene har sett og telt opp på egen hånd. Vi kan bruke målinger til å konkretisere de begrepene som vi vil elevene skal arbeide med.

En begynnende forståelse av forskjellige størrelser dannes som regel i forhold til *kontrastpar* og ikke til verdier langs en skala. Når det gjelder vekt, oppfattes først forholdet mellom tunge eller lette objekter, temperatur deles inn i varmt eller kaldt, avstand oppfattes som fjernt eller nært, høyde som stor eller liten, antall som mange/få eller flere/færre, alder som gammel/ung. Slike begreper er naturligvis knyttet til den situasjonen de blir brukt i. En lang fiskestang er kortere enn en kort skolevei.

Når man løfter opp en sekk, kan man si «den var tung», men hvis man bare har ett uttrykk for vekt, sier ikke dette utsagnet noe videre om sekkens tyngde. Med kontrastpar har vi to uttrykk for tyngde: tung eller lett. Hvis man kjenner på to sekker, kan man si om den ene at den er lett, om den andre at den er tung. På den måten har man sagt noe om sekkenes innbyrdes tyngde. Dermed er dette *relative* begrep, de forholder seg til hverandre. Man kan være *lettere enn* en eller annen uten selv å være spesielt lett. Seinere kan man innføre en mellomting: Den var sånn passe tung. Dermed har man tre uttrykk: kontrastparet og en mellomstilling. Dette gir en overgang til vektmåling hvor målingene gir tall på tall-linja. Da har man uendelig mange verdier til rådighet, og dermed er det mulig å komme med svært presise utsagn til andre om hvor tung sekken er. Dessuten er ikke målingene lenger relative. De angis i stedet i forhold til en skala uavhengig av det som måles.

Kontrastpar kan på denne måten fungere som en overgang til det å måle ved å telle opp standardenheter. Forståelsen av slike kontrastpar er på denne måten en forutsetning for at elevene seinere skal danne gode begreper i forhold til størrelser. Derfor bør begynnerundervisningen i matematikk fokusere på slike kontrastpar. En annen grunn til at undervisningen bør inkludere kontrastpar, er at vi i dagligtalen ikke bruker hvert ledd i parene like mye. Det gjelder for eksempel tung og lett. Små barn hører «tung» bli brukt mye oftere enn «lett». Motsatsen som blir brukt sammen med «tung», er «ikke så tung». Tilsvarende gjelder for «bred», hvor motsatsen er «ikke så bred» i stedet for «smal». «Gammel» dukker også mye oftere opp enn «ung». Slike skjevheter kan læreren motarbeide ved å bevisst holde de to uttrykkene som utgjør et kontrastpar, opp mot hverandre.

Videre kan denne opptellingen gjøres ved å bruke ei tall-linje, ved å bruke en linjal til å måle lengde, graderstokk til temperatur og ei vekt til masse. Det er viktig å framheve at slike målinger aldri vil være *eksakte* målinger. Det skyldes egenskaper ved det som måles, at man f. eks. ikke kan måle lengden på et bord eksakt fordi lengden vil variere, om enn veldig lite, alt etter hvor på bordflata man måler. Videre vil det alltid være usikkerhet knyttet til gjennomføringen av målingen. Hvis man måler en persons høyde flere ganger til nærmeste millimeter, vil man kunne få forskjellige resultater hver gang. Det er viktig å få elevene til å fokusere på dette aspektet, for eksempel ved at flere grupper måler samme objekt så nøyaktig at de vil få varierende resultat.

8.1 Forskjellige typer målinger

Uansett hva som skal måles, trengs en *enhet* man kan måle ut fra. Hvis man vil måle lengden på en vei, kan man gå hele veien og telle antall skritt. Da vil et skritt være den enheten som lengden måles i. En annen måte er å trille et sykkelhjul og telle hvor mange omdreininger hjulet gjør på hele veien. Da er en hjulomdreining den enheten veilengden måles i. Hva man enn måtte ønske å måle, må man ha en enhet man kan måle i forhold til. En slik enhet kalles *måleenhet.* Når man har funnet en måleenhet, kan selve målingen settes i gang.

En spesiell måleenhet fås ved å bruke hele objektet som skal måles som enhet. Det gjøres ganske ofte ved lengdemåling. Et eksempel er hvis man vil måle lengden på et eller annet og klipper til ei snor som er akkurat like lang. Hensikten er naturligvis at ei snor vil kunne være lettere å ta med seg enn det objektet som ble målt. Når man hopper på ski, kan man sammenligne hoppene ved å markere lengde på hvert hopp med en liten pinne. Fordelen med det er at målingen går raskt, og det er enkelt både å måle og å sammenligne hoppene. Ved denne formen for måling er det imidlertid umulig å sammenligne hoppene i en bakke med hopp i en annen bakke. Målingene er bundet til det stedet hvor de ble foretatt. I det følgende vil hovedvekten av presentasjonen være knyttet til målinger hvor man ikke bruker hele objektet som enhet.

Det vil være forskjellige didaktiske momenter knyttet til de forskjellige tingene vi kan måle. Denne delen blir brukt til slike forskjellige momenter. Måling av areal og volum er utelatt her, det blir i stedet kommentert i geometrikapitlet.

8.1.1 Lengde og vekt

Alle disse målene har det til felles at de er laget av og for mennesker. Til å begynne med brukte man enkle og praktiske måleenheter og måleredskaper. Etter hvert som handel og samkvem ble mer vanlig over større avstander, vokste det fram et behov for å bli enige om mer faste måleenheter. Presentasjonen her skjer i tilknytning til et undervisningsopplegg knyttet til lengdemåling.

Utgangspunktet for aktiviteten er at man ønsker å måle lengde på ei stang eller noe lignende. For å motivere elevene bør målingen tjene en eller annen hensikt, gjerne ved at målingen knyttes til en eller annen historie hvor lengden av ei stang er sentralt. Det kan for eksempel være en historie som:

> *Det store skogtrollet ønsker seg en ny kløpinne. Nå har Trolleline og Trolleper funnet en kvist som de lurer på om skogtrollet er fornøyd med. Men av hensyn til skogen vil de ikke hugge ned kvisten med mindre den kan brukes. Da sier skogtrollet:* Dere må måle lengden av kvisten så skal jeg si om den er passe*, og småtrollene løper av sted for å måle.*

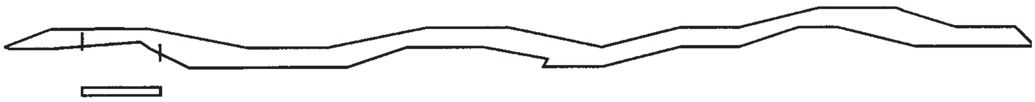
Dette er en oppgave elevene kan løse i grupper, enten ved at de skal måle allerede innsamlede kvister, eller ved at de selv skal finne passende kvister og så måle lengden på dem.

Det er flere problemer elevene må løse i denne aktiviteten. Det mest sentrale er å finne en passende måleenhet. Deretter må de gjennomføre selve målingen. Hvis elevene bruker en forholdsvis liten måleenhet, kan det være vanskelig å gjøre denne målingen. Til slutt må målingen rapporteres til stortrollet (læreren).

I etterkant kan elevene sammenligne de forskjellige målingene de har gjort. Kan de finne ut hvem som målte den lengste/korteste kvisten? Var noen kvister like lange, og i så fall, hva ble de målt til? Hensikten med denne diskusjonen er at elevene skal se nytten av å ha en felles måleenhet. Hvis noen elever har målt en kvist til å være 27 fingerlengder, må de selv være til stede for at noen skal kunne gjenskape den lengden. Hvis skogtrollet skal måle opp 27 fingerlengder, så kommer han svært langt. Hvis man måler med en liten kvist, må man ta med seg den kvisten hvis man skal vise andre hvor langt man har målt. Det slipper man hvis man måler etter en *standard* måleenhet. En meterstav er en slik *standardenhet*. Hvis kvisten måles med en meterstav, behøver man ikke ta med seg den meterstaven. Meterstaver er så utbredt at de fleste har en liggende hjemme.

Om man vil, kan historien om trollene fortsette:

> *Skogtrollet ga småtrollene en liten trepinne som de kunne bruke til å måle lengden på kvisten. Den lille pinnen pleide skogtrollet å bruke som tannpirker, og den passet akkurat i Trollepers ryggsekk. Da de kom fram til kvisten, ble de to småtrollene enige om at Trolleper skulle legge tannpirkeren langs kvisten, mens Trolleline holdt styr på tellinga. Trolleper la tannpirkeren ved begynnelsen av kvisten og satte et lite merke så langt tannpirkeren nådde inn på kvisten. Trolleline løftet opp en av fingrene sine. Trolleper flyttet tannpirkeren etter merket, og satte et nytt merke der hvor den endte. Trolleline løftet en finger til. Tanken var at de skulle løpe hjem, Trolleper med tannpirkeren og Trolleline med så mange fingrer i været som hun måtte bruke for å måle kvisten.*



> *Slik fortsatte de en liten stund, helt til Trolleline ropte: «Stopp, nå har jeg ikke flere fingrer igjen!»*

Kan elevene hjelpe Trolleline og Trolleper, de er tydeligvis ikke så flink til å telle?

> *Småtrollene tenkte seg lenge om mens de klødde seg i det ene øret med stortåa si, for det er det småtroll gjør når de tenker veldig hardt. Plutselig kom begge to på at de kunne samle gresstrå, ett strå for hver gang Trolleper målte med tannpirkeren og satte et merke i kvisten. Da de var ferdige, sprang de hjem til skogtrollet og viste hvor mange gresstrå de måtte bruke. Kan du telle hvor mange strå de brukte?*

Hvis antall strå er forholdsvis mange, kan denne målingen knyttes til det å gruppere. En bunt med strå bør da inneholde en fast mengde strå, slik at den utgjør en ny enhet, fortrinnsvis 5 eller 10.

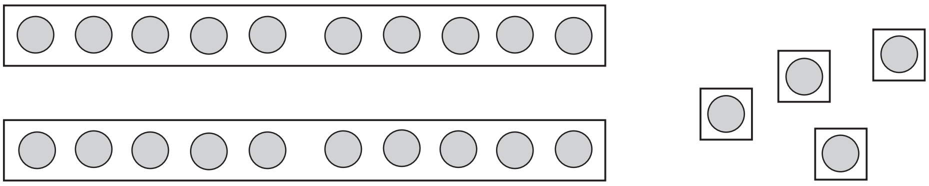
8.1.2 Penger*

Myntenheter er mål som ikke er faste på samme måte som målene for lengde og vekt. Et lands myntenhet er en relativ størrelse. Det betyr at verdien til mynten endres over tid. Veksling av penger i forskjellige lands valuta kan bidra til å synliggjøre denne relativiteten. Igjen er det viktig at hvis elevene skal arbeide med veksling av penger, må de få anledning til å utvikle egne algoritmer for hvordan vekslingen skal foregå. Dette bør framsettes som et problem (hvor mye koster en leike til £4 i norske kroner?) hvor elevene selv skal prøve å arbeide seg fram til en framgangsmåte og et svar. Dette gjøres i hovedsak på to måter: enten ved at man regner ut hva én enhet av den fremmede valutaen koster (1 am. dollar tilsvarer 7 kroner), eller ved at man bruker bestemte knagger (6 tyske mark tilsvarer 25 kroner). Begge disse måtene blir brukt av både barn og voksne ved reiser i utlandet. To lands valuta står i et multiplikativt *forhold* til hverandre. Dette kan brukes som utgangspunkt for aktiviteter som fokuserer på denne multiplikative strukturen.

Arbeid med penger er vanlig for å øve opp elevenes forståelse av titall-systemet. Dette er gunstig fordi elevene allerede har god kjennskap til pengers verdi, og fordi pengene alt er gruppert

* Det kan hevdes at penger *telles*, ikke måles. Parallellene til målinger er imidlertid mange, og det er grunnen til at dette emnet er plassert her.

i femmere, tiere og hundrere. Det å gruppere i femmere er som tidligere nevnt, nyttig i mange sammenhenger. Det kan imidlertid ta litt tid før elevene ser at 10 kronestykker er det samme som en tier, at 5 tiere er det samme som en femtilapp, osv. Grunnen til det er at det ikke er noe ved myntene/sedlene bortsett fra det påtrykte tallet, som tilsier at det er en slik sammenheng. Ved å lage eget konkretiseringsmateriell av papirkopier av kronestykker, kan man motvirke dette:



Her er 10 kronestykker kopiert over på et ark med en kopieringsmaskin. Deretter er arket klippet opp slik at ei papirstripe blir lik 10 kroner. De små firkantene viser 1 krone. Dette materialet viser tydelig at en tier består av ti kronestykker. Videre kan man legge sammen ti tiere til en bunt, en hundrer eller en hundrebunt. Slike papirremser har fordeler framfor «vanlige» sedler også når det gjelder addisjon og subtraksjon med tierovergang. Ved addisjon, for eksempel av 26+19, vil man ha 3 tierremser og 15 løse kronestykker. Disse løse kronene kan legges etter hverandre til de utgjør nok ei remse. Dermed vil man ha 4 tiere og 5 enere, altså 45 kroner. På denne måten simulerer man addisjonsalgoritmen ved hjelp av konkretiseringsmaterialet. Man kan naturligvis gjøre tilsvarende med «vanlige» sedler, men da er det ikke like åpenbart at ti kronestykker er det samme som en tier. Med det ovennevnte materialet blir denne sammenhengen visuelt framstilt. Tilsvarende kan dette materialet brukes i subtraksjon, for eksempel ved 36-19. Når man skal trekke fra de 9 enerne, kan dette gjøres på to måter. En måte er å først ta bort de 6 løse enerne og deretter 3 til fra en av de 3 tierne. Da har du 2 tiere og 7 enere tilbake, før du fjerner den ene tieren. Den andre måten er å ta alle 9 fra en av de 3 tierne. Da står du igjen med 2 hele og 1+6 enere før du trekker fra den siste tieren. Begge disse måtene ligger svært nær opp til subtraksjonsalgoritmen. Det er ikke nødvendig for læreren å diktere/formidle hvilken metode som er best, eller hvordan materialet skal brukes. Det beste er å la elevene finne sine egne metoder, og så etter arbeidet be dem fortelle om sine framgangsmåter. Poenget er at dette materialet synliggjør tallenes oppbygning i tier-grupper. Det stimulerer derved til framgangsmåter som ligger nær opp til de «vanlige» og svært effektive algoritmene for addisjon og subtraksjon.

Som tidligere nevnt er det et problem knyttet til det at penger blir utstrakt brukt i innføringen av desimaltall. Når vi skal måle størrelser som ikke er et heltallig antall måleenheter, kan vi gjøre det enten ved desimaltall eller ved å innføre en ny, mindre måleenhet. Ved måling av pengebeløp gjøres dette ved å innføre en ny måleenhet (pengeenhet) som er en hundredel av den opprinnelige: 100 øre tilsvarer ei krone. I og med at ørene er hundredeler av kroner, kan beløp med kroner og øre skrives som desimaltall: 7 kr og 25 øre kan skrives som 7,25. Ved å gå den andre veien kan vi se på desimaltallet som bestående av to hele tall: antall kroner før kommaet og antall øre etter kommaet. Det følger mange problemer med dette å blande sammen desimaltall og tall sammensatt av to måleenheter. En konsekvens framkommer når elever legger sammen beløp som dette: 3,75 + 2, 75 = 3 kroner og 75 øre pluss 2 kroner og 75 øre. Det gir 5 kroner og 150 øre, noe som mange elever skriver som 5,150. De har utviklet misoppfatningen at et desimaltall består av to atskilte tall. Det er viktig at lærere på småskoletrinnet er klar over denne misoppfatningen. Den kan motarbeides ved at elevene gjør allsidige erfaringer med desimaltall, ikke kun tilknyttet tall sammensatt av to måleenheter, og ved at elevene blir utfordret hvis de skulle gi uttrykk for denne misoppfatningen i forbindelse med oppgaveløsning i klasserommet.

8.1.3 Tid

Tidsenheter justeres i henhold til naturlige fenomener, fenomener som ikke er menneskeskapte. Med «år», «måned» og «dag» refereres til bestemte sykluser i naturen. Her er måleenheten «en dag» den minst problematiske. Det er den tida det tar fra sola har en bestemt posisjon på himmelen, til den har den samme posisjonen igjen, en dag seinere. Her måles samme posisjon i forhold til himmelretningene, og man ser bort fra at sola står lavere på himmelen dagen etter hvis det går mot vinter og høyere på himmelen hvis det går mot sommer. En slik måling kan gjøres svært eksakt ved å se på skyggen til en stav som er plantet i bakken. I tillegg er dette et fenomen som gjentar seg svært ofte, så alle mennesker og alle kulturer har en god oppfatning om hva måleenheten «en dag» er.

Det å måle en måned er mer problematisk. Det kan gjøres ved at man måler den tida det tar fra månen har et bestemt utseende (for eksempel at det er fullmåne) til den har det samme utseendet igjen. Det er noe problematisk å gjøre en slik måling, for det er ikke så lett å si eksakt når en måne er full, man kan lett bomme med ganske mange timer. Men dette fenomenet, at månen blir full, dukker opp såpass ofte at man kan måle flere perioder og så dele. Da blir feilen atskillig mindre. Hvis man teller dager, vil man se at tidsrommet mellom 10 fullmåner er omtrent 295 dager, mens 100 fullmåner tar omtrent 2953 dager. På bakgrunn av slike observasjoner kan man si at en måned etter denne definisjonen er ca. 29 $^1/_2$ dag. Et slikt anslag ligger til grunn for den islamske kalenderen. Ifølge den består et år av 12 måneder på alternativt 29 og 30 dager, til sammen 354 dager i året. Et slikt år er ikke i samsvar med naturens år. For eksempel vil midtsommer inntreffe på forskjellige datoer hvert år. I vår egen kalender er lengden på månedene justert til 28-31 dager slik at vårt kalenderår er i samsvar med jordas gang rundt sola. Dermed inntreffer dager som er bestemt av sola, som midtsommer og vår- og høstjevndøgn, på samme dato hvert eneste år.

Måleenheten «ei uke», altså sju dager, er en enhet som ikke har røtter i et naturlig fenomen. Babylonerne brukte denne oppdelingen, og grunnen til det er antakelig at for dem var tallet 7 av magisk betydning. De hadde nemlig observert 7 såkalte vandrestjerner: Sola, Månen, Merkur, Venus, Mars, Jupiter og Saturn.

I vår kalender bestemmes lengden av et år altså etter sola og ikke etter månen. Det var lenge vanskelig å finne ut nøyaktig hvor mange dager et år består av. Grunnen til det er at om det er vanskelig å si når månen er i en bestemt fase, for eksempel fullmåne, så er det enda verre å si når sola har nådd en bestemt posisjon på himmelen, som for eksempel midtsommer. I tillegg opptrer dette fenomenet sjeldnere: Vi opplever over 12 fullmåner for hver solsyklus. I antikken trodde man at et år bestod av 365 $^1/_2$ dag. Platon derimot, mente at naturen måtte være mer matematisk innrettet. Derfor hevdet han at et år bestod av 364 $^1/_2$ dag. Det gir nemlig 364 $^1/_2 \cdot 2$ = 729 dager og netter, og tallet 729 er et nokså spesielt tall: Det er lik $3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3$.

Hvis en slik solsyklus hadde bestått av et helt antall dager, hadde det vært enklere å bestemme lengden på en slik syklus. Et stort problem når det gjelder fastsettelsen av måneder og år etter naturfenomener, er at disse fenomenene *ikke* følger enkle matematiske brøker. For eksempel er den nøyaktige tida det tar å gjennomføre en månefase lik 29 døgn, 12 timer, 44 minutter og 2,9 sekunder. I tillegg er det ikke slik at 12 måneder av denne lengden utgjør en hel omdreining rundt sola. Det trodde man inntil Julius Cæsar syntes at kalenderen og naturen var kommet såpass i ulage at han ba Sosigones, en av sine astronomer, å lage en kalender som passet bedre. Fram til da hadde kalenderen 12 måneder og 355 dager. Den nye kalenderen, den julianske, bestod av 365 dager og fremdeles 12 måneder. Dette stemmer heller ikke helt med en omdreining rundt sola, så det ble innført en skuddårsdag, en ekstra dag hvert 4. år. Man antok altså at et år varer i 365,25 dager. Dette har vist seg å passe svært godt til jordas omløp rundt sola. I middelalderen var imidlertid naturen og kalenderen igjen kommet i uttakt. Nå var det pave Gregor III som ba sine astronomer om å forandre kalenderen en gang til. Det førte til at de i oktober 1572 tok bort 10 dager! Denne gregorianske kalenderen, som vi fremdeles bruker, er lik den julianske bortsett fra at vi ikke skal ha skuddår på hele århundrer med mindre årstallet er delelig med 400. Vi har altså skuddår i år 2000, noe som er svært spesielt for århundreskifter. Denne kalenderen trenger ikke justering på 100.000 år!

En dag deles videre inn i timer, minutter og sekunder. Den inndelingen som brukes, at et døgn består av 24 timer, en time av 60 minutter og et minutt av 60 sekunder, kan kanskje synes noe underlig. Grunnen til denne inndelingen er at den kommer fra en tid hvor man i langt større grad brukte brøker, både for å oppgi tallstørrelser og for å regne. Da lønner det seg å ha nevnere som kan faktoriseres på mange måter, og da fins knapt bedre egnede tall enn disse. Se først på 24. Det kan deles i to, slik at vi får 12 timer dag og 12 timer natt. Tallet 12 kan igjen deles på 2, 3, 4 og 6, og det er ingen andre så lave tall som kan deles på fire forskjellige andre tall. Tallet 10 for eksempel kan bare deles på 2 og 5. 60 er helt uoverruffent blant tallene under hundre når det gjelder delelighet. 60 kan deles på 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 og 30.

Hvis man skulle ha delt inn døgnet på nytt igjen i dag, ville man antakeligvis, siden regning med desimaltall er vanligere, hatt 10 timer i døgnet, 100 minutter i en time og 100 sekunder i et minutt. Da ville døgnet blitt delt inn i litt flere sekunder, slik at de nye sekundene ville bli litt kortere enn de gamle. Fordelen med denne måten å angi tid på, ville være at vi kunne regne på tid på den vanlige måten: med tieroverganger. Det systemet vi bruker nå, er problematisk i så henseende. Mange barn synes det er vanskelig å regne med tider nettopp fordi det ikke er desimaltall, men baserer seg på en annen oppdeling. Se på følgende oppgave:

Petter skal løpe 2000 m. Han løper den første kilometeren på 3.45 min og den andre på 3.52 min. Hvor lang tid brukte han til sammen?

En ikke uvanlig løsning er følgende:

$$\begin{array}{r} 3.45 \\ +\ 3.52 \\ \hline =\ 6.97 \\ \hline\hline \end{array}$$

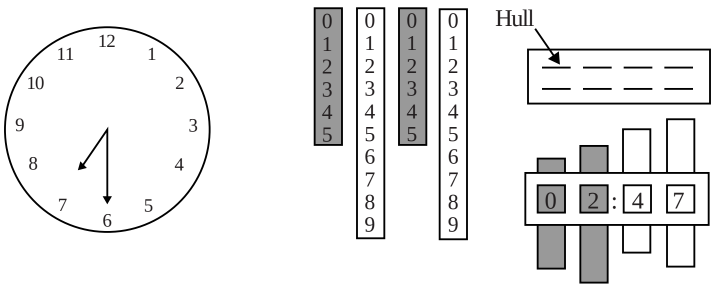
Men siden basen ikke er 10 (eller hundre), men 60, blir dette feil. Når det gjelder slike klokketider, brukes punktum som skilletegn. Det gjøres både ved klokkeslett (kl 19.30) og ved tider som i oppgaveteksten over. Komma som skilletegn brukes kun ved desimaltall. Legg merke til at tideler (i forbindelse med tidtaking) er desimaltall: Det går ti tideler på et sekund. Derfor skrives verdensrekorden på 200 m for menn - 19,32 - med komma som skilletegn.

For å unngå at elever bruker tierovergang ved regning med tid, er det viktig at de arbeider grundig med *hvorfor* tieroverganger opptrer som de gjør når man regner innen titallsystemet. Prinsippet med å gruppere eller å dele opp grupper er det samme, men i det ene tilfellet grupperer man i tiere, i det andre i 60. Det betyr at løsningsalgoritmene må modifiseres i forhold til algoritmer for regning i titallsystemet. En elev som har god forståelse for gruppering og betydningen av sifrenes posisjon, vil ha en mulighet til å tillempe sine «vanlige» løsningsalgoritmer slik at de kan brukes ved regning med timer og minutter.

Forskjellige aktiviteter som fokuserer på tid og måling av tid:

- fokus på dag/natt: be elevene foreslå og kategorisere aktiviteter som hører til dagen (gå på skole, sykle, spise, se TV) og som hører til natten (sove, godnatthistorier, spise kveldsmat)

- bruke tidsangivelser som «i går», «i dag» og «i morgen», som «neste uke» og «forrige uke» osv., også i forbindelse med andre skoleaktiviteter
- lag ei lang linje som representerer et døgn, del den inn i klokkeslett, be elevene plassere forskjellige aktiviteter der de hører hjemme i døgnet. Aktivitetene kan være skrevet eller tegnet på lapper som limes på linja, slik at «stå opp» kommer om morgenen, «barne-TV» kommer kl 18.00 osv.
- som ovenfor, men linja representerer «mitt liv», plasser ting som «fødsel», «får første tann», «lærer å gå» osv.
- lag værrapport for hver dag, gjerne med værsymboler
- bruk uvante hjelpemidler til å måle tid: pendel, timeglass, stearinlys, solur
- «10-sekunder», gjett hvor mange sit-ups, hopp, o.l. du klarer på 10 sekunder. Gjør tilsvarende for 30 sekunder og 1 minutt, vil skape forståelse for at 10 sekunder er kort tid og for forholdet mellom sekunder og minutt
- Lag digital og analog klokke, og se på forskjeller/likheter:



  Dette kan gjøres ved å be en elev lage et tidspunkt på ei av klokkene og en annen vise tilsvarende tid på den andre. Det kan også gjøres ved å finne skrevne tidspunkter i en tabell (TV-program, bussrute) og vise de samme tidene på klokkene.
- Bruke stoppeklokker, mekaniske/elektroniske, diskuter nøyaktighet i målinger

8.1.4 Forholdsstørrelser

Av og til måles størrelser relativt. Fart er et eksempel på en slik størrelse, tetthet en annen. Det er viktig å bemerke at fenomenene i seg selv ikke er relative, det er *målingene* av dem som blir gjort ved å se på to andre størrelser, strekning og tid eller masse og volum, i relasjon til hverandre. Både fart og tetthet kan altså oppleves «i seg selv»; vi kan fornemme at en fugl flyr raskt, og vi kjenner at en blyklump er tung. Når det gjelder måling av fart, gjøres det som regel ved at man ser på hvor langt et objekt beveger seg i løpet av et bestemt tidsintervall, ved at man ser på forholdet mellom to størrelser, lengde og tid (måles i meter/sekund eller km/time). Tilsvarende måles kilopris ved se på forholdet mellom pris og volum, mens tetthet måles ved å se på forholdet mellom masse og volum. Man kan også måle forholdsstørrelser uten å gå via to andre størrelser. De kan måles direkte ved sammenligning. På samme måte som man kan måle høyden til to personer ved å sammenligne dem mot hverandre («Per er høyere enn Ola»), kan fart måles ved at man feks ser på to biler som kjører ved siden av hverandre. Tilsvarende kan tetthet av væsker sammenlignes ved at man blander dem med hverandre. Ved å blande olje og vann vil man finne ut at olje har mindre tetthet ved at den legger seg oppå vannet. Dette skjer uavhengig av hvor stor masse og volum som brukes.

Det at slike størrelser er relative, har ført til at de har blitt betraktet som vanskelige. Derfor har de i liten utstrekning blitt gjort til gjenstand for undervisning på småskoletrinnet. Det at dette ikke er blitt undervist, har naturligvis ført til at elever gjerne synes regning med forholdsstørrelser er vanskeligere enn andre størrelser. Elever møter imidlertid ofte slike størrelser i sin hverdag, og så lenge undervisningen tar utgangspunkt i situasjoner som elevene kjenner seg igjen i, er det ingen grunn til å utelate problemer av denne typen i undervisningen.

Et mulig eksempel kan være å sammenligne priser på grønsaker. Ved først å etablere en situasjon som involverer kjøp/salg av grønsaker, kan læreren utfordre elevenes tenkning ved å stille spørsmål som: *Astrid og Andreas kjøper poteter i to forskjellige butikker. Astrid betaler 12 kr mens Andreas betaler 8 kr. Hvem gjorde det beste kjøpet?* Noen vil umiddelbart foreslå Andreas, siden han betalte minst, mens andre antakeligvis vil foreslå at man ikke kan se på prisen alene, man må også se på hvor mye poteter de kjøpte. Hvis ingen av elevene kommer med slike forslag, kan læreren «spille» denne scenen ved å la to elever komme fram til kateteret for å gjøre sine respektive kjøp. Læreren kan da for eksempel la Astrid få omtrent dobbelt så mye poteter som Andreas.

I målingen av slike størrelser er etableringen av måleenheter svært viktig. Hvordan kan man angi at Astrid gjorde et bedre kjøp enn Andreas? Den metoden elever oftest bruker, er å la den minste av størrelsene angi måleenheten. I eksemplet over kan det bety at hvis Andreas sine poteter akkurat fyller ei bøtte, så betalte han 8 kr per bøtte. Astrid fikk omtrent dobbelt så mye, altså to bøtter. Det er to måter å vise at hun betalte mindre: enten dele de 12 kronene hun betalte likt. Det gir 6 kr per bøtte. Den andre måten er å la henne betale like mye som Andreas for den første bøtta, 8 kr. Det betyr at hun bare betalte 4 kr for den andre, og hun gjorde dermed et bedre kjøp.

Det er viktig å påpeke at dette er en måte å unngå regning med forholdsstørrelser. Elevene vil ikke se på to relative størrelser, men i stedet regne med «åttekroners bøtter» som en ikke-relativ størrelse.

Når elever regner med fart, bruker de ofte nokså tilsvarende regning. De etablerer fart som en ikke-relativ størrelse ved for eksempel å se på «lengde-timer». Hvis en bil kjører i 50 km/t, tolkes dette ganske riktig som at den beveger seg 50 km i løpet av en time. Hvis de skal finne hvor langt bilen kjører i løpet av 3 timer, vil utregningen bli 50 + 50 + 50 = 150. Dette er noe annet enn å innse at forholdet mellom fart og tid er konstant, at det vil ta 3 timer fordi $\frac{50}{1} = \frac{150}{3}$.

Det at elevene tenker på denne måten, gjør det så å si umulig å løse oppgaver som ikke involverer slike «pene» tall som i de to eksemplene over. Hvis oppgaven i stedet lyder: «Hvor langt kjører bilen i løpet av 2,5 timer?» kan mange elever svare ved å regne ut en halv «lengde-time», altså regne 50+50+25=125. Men hvis bilen kjører i 2,7 timer eller i 2 timer og 37 minutter, blir oppgaven nærmest umulig å løse på denne måten. Elevene vil også få problemer med å beregne farten til en bil som for eksempel kjører 130 km på 2,5 timer.

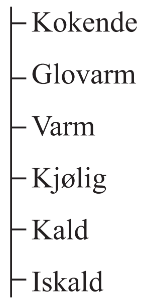
Konklusjonen av dette er at elever bør få anledning til å arbeide med situasjoner som involverer relative størrelser gjennom «pene» tall. Dette kan de gjøre alt fra 1. klasse. Etter en stund bør imidlertid disse forestillingene utfordres ved at de får oppgaver som ikke kan løses ved en omgjøring til ikke-relative størrelser. Oppgaver, som i eksemplet med bilen som kjører i 2,7 timer, hvor «bygge-opp»-strategien blir vanskelig å gjennomføre. Her bør man i stedet vurdere å se på begge de involverte størrelsene i forhold til hverandre. Dette er grundig beskrevet i KIM-heftet om *«Tall og tallregning»*.

8.1.5 Temperatur

Måling av temperatur er nyttig, både fordi elevene vil få kjennskap og forståelse for temperaturer, og fordi det kan gi en introduksjon til negative tall. Som tidligere nevnt vil små barn bruke et kontrastpar for å angi temperatur: Enten er det varmt eller så er det kaldt. Denne kontrasten kan utnyttes, for eksempel kan elevene engasjeres til å kategorisere forskjellige objekter etter om de er varme eller kalde. Elevene kan også bes om å dramatisere hvordan de oppfører seg en varm dag kontra en kald dag.

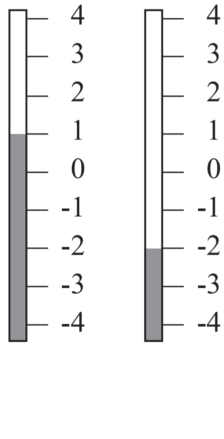
Det kan virke som om elevene i en viss utstrekning beholder denne todelingen når det gjelder måling av temperatur. Derfor er det viktig å begynne tidlig å fokusere på mellomliggende verdier. Når det gjelder utetemperatur, kan den rapporteres ved at elevene merker av for hver ukedag hvor mye klær de har på seg. Dette kan godt gjøres med symboler/tegninger for de minste barna.

Andre ting som kan måles, er forskjellige bøtter/skåler med vann. Ved å rangere skålene etter hvor varmt/kaldt vannet i dem er, får man fram at det er mange nyanser mellom de to ytterpunktene. Her er det heller ikke snakk om en teknisk måling med et måleinstrument, men en rangering basert på hvordan elevene *føler* temperaturen. Ut fra denne typen målinger kan elevene rangere skålene etter en skala som dette:



Seinere vil temperaturmålinger kunne skje ved hjelp av et termometer. Det kan både brukes til å måle utetemperatur og temperaturen til andre ting. Slike målinger kan rapporteres på forskjellige måter, alt fra grafiske framstillinger til tallkolonner. Som et mellomledd kan man bruke et termometer uten skala. Da kan elevene selv komponere skalaen. Den kan enten se ut som figuren over, eller den kan bestå av tallstørrelser. Gjennom en diskusjon av fordeler og ulemper med disse to måtene, kan det «vanlige» termometeret introduseres. Fordelen med tall er at da kan man regne på målingene, man kan angi hvor mye temperaturen stiger fra en dag til den neste, man kan finne gjennomsnittstemperaturen over et tidsrom, osv.

Siden utetemperaturen i Norge kryper under 0° om vinteren, kan måling av temperatur lett utvides til det å se på negative tall. Dette er ikke et sentralt tema for småskolematematikken, men det er ingen grunn til at elevene skal la være å utforske dette tallområdet for eksempel i forbindelse med måling av temperatur. Hensikten med slike aktiviteter vil ikke være å lære elevene en eller annen metode for å regne med negative tall, men at de skal gjøre noen innledende erfaringer med slike tall. Ved å merke av temperaturer på kopierte gradestokker, gis elevene en mulighet til selv å komme fram til metoder for for eksempel å beregne differansen mellom to temperaturer hvor den ene er positiv og den andre er negativ:



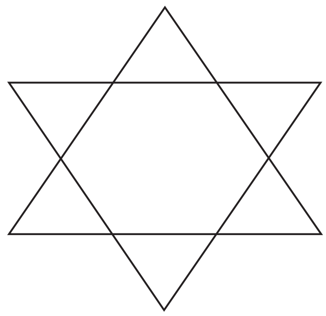
En måte å ta tak i dette på er som over, å be elevene beregne differanser mellom ulike temperaturer, både med positiv og negativ verdi. I tillegg kan problemstillingen forandres ved at andre verdier enn differansen settes som ukjent: *Det var +6° i går. Til i dag har temperaturen falt med 10°. Hva er temperaturen i dag?* I tillegg kan utgangstemperaturen være ukjent. Ved å arbeide med flere slike eksempler gis elevene en mulighet til å komme fram til effektive metoder for å gjøre slike beregninger, og de gis et godt grunnlag for videre arbeid med negative tall.

8.2 Hjelpemidler

I matematikk finnes det mange hjelpemidler som kan brukes for å støtte elevenes begrepslæring. I de fleste tilfellene er det i tillegg naturligvis nyttig å lære seg å bruke hjelpemidlene i seg selv. Nedenfor er det listet opp noen billige hjelpemidler som både kan brukes i målinger, og som også støtter læringen av annen matematisk kunnskap.

Hjelpemiddel	**Noen bruksområder**
Kartonger, bokser, skoesker, boller, mugger	Måle volum og overflate, finne geometriske former, lagre materiale
Steiner, terninger, skjell, knapper, korker, bønner, makaroni, kuler, fjær, trådsneller, skruer, nåler	Sortere, telle, balansere, veie, ordne, måle lengde, masse, areal eller volum
Stifter, binders, tape, lim, saks, post-it-lapper, farget papir, blyanter, indekskort	Organisere materiale, lage spill, modeller og oppgavekort
Sett med bokser i forskjellige størrelser - tannpastaesker, plastikkboller, målebeger	Ordne, finne lengde, areal og volum, oppdage forhold
Keramikkfliser, frimerker, kort	Lage mønstre, telle
Kort, dominobrikker, terninger, bingokort, snurrebass	Lage tall-leker, se på sannsynligheter
Dråpetellere, skjeer	Veie, måle
Bånd med forskjellig lengde, farge, bredde og stoff, trefigurer av dyr, knapper, skjell, løv	Sortere, leker, utvikle tallbegrep og vokabular
Aviser, ukeblad, kataloger, menyer, skilt	Utvikle og løse problemer fra dagliglivet
Speil (helst plastikk eller metall)	Oppdage symmetri og mønstre
Tannpirkere, piperensere, leire, strå, tråd	Lage lekefigurer
Forskjellige former, firkanter, sirkler, trekanter, gjerne med forskjellige farger.	Lage mønstre, grafer, måle lengde og areal
Byggeklosser	Lage tårn, utforske 3 dim. figurer

9 Geometri



Geometri handler om figurer og former, fortrinnsvis i to eller tre dimensjoner. Se på denne figuren:

Den kan gi mange assosiasjoner. Noen legger vekt på det religiøse aspektet, andre minnes jødeforfølgelsene under 2. verdenskrig, atter andre begynner å tenke på stjernehimmelen.

I geometrien er man ikke interessert i slike avledede, symbolske betraktninger. Innen geometri ser man på *egenskaper* ved de figurene og formene man studerer. Figuren over kan ses på som sammensatt av to trekanter hvor den ene er snudd på hodet. Det å «snu på hodet» er en geometrisk operasjon. Hver av trekantene består av tre like lange linjer. Det er såpass spesielt at slike trekanter har fått et eget navn: *likesidet trekant*. Hvis du skal male denne figuren, vil du trenge akkurat like mye maling til de 6 små trekantene til sammen som til 6-kanten i midten. Det å *beregne areal* er også en del av geometrien. Dette utgjør de tre kjerneområdene for geometri:

1. Det å beskrive bestemte figurer. For at en figur skal ha geometrisk interesse, så må den ha en eller annen regularitet (en firkant består av fire rette linjer, mens tegningen av en hest ikke har noen slike regulariteter).

2. Transformasjoner, det å utføre bestemte operasjoner på geometriske figurer (flytte, speile).

3. Gjøre beregninger av og sette størrelser på vinkler, lengder, areal o.l.

Disse tre emnene presenteres i det følgende.

9.1 Standardfigurer

Når barna begynner på skolen, har de erfaringer med mange geometriske figurer. Med geometrisk figur menes en figur som har en eller annen form for regularitet. Ei kule er en slik regulær form. Det betyr at det er svært enkelt å beskrive ei kule: Alle punktene på kuleskallet ligger akkurat like langt fra kulas midtpunkt. Skal du beskrive en ikke-regulær form, for eksempel et glass, får du større problemer. Det er nesten umulig å gi en presis beskrivelse av et glass, mens geometriske figurer har bestemte egenskaper som gjør slike beskrivelser mulig. Andre tredimensjonale figurer som barna kjenner, er terning, sylinder, kjegle og pyramide. De første objektene som barna kommer i kontakt med, rangler o.l., er ofte laget med det som kalles *regulære* former. Andre leiker som de møter seinere som også består av regulære former, er baller, biler med sylinderformede hjul, firkantede Duplo-brikker osv.

Barna lærer raskt å kjenne igjen slike figurer. Det er nødvendig for eksempel hvis man skal bygge et tårn av klosser. Barna erfarer at hvis en bit er formet som en kjegle, altså hvis den er spiss på toppen, får de vansker med å sette en annen bit oppå den. Tårn bygges enklest hvis begge endestykkene har en viss utstrekning og de blir liggende flatt, ikke på skrå.

Den spesielle geometriske formen til ei kule er nødvendig for at en ball skal oppføre seg på den måten som den gjør. Det at en ball som slippes rett ned, spretter omtrent rett opp igjen, skyldes dens form. Hvis man forsøker å sprette en myk terning, vil den sprette i alle mulige retninger alt etter hvordan den treffer bakken. Dette er også en erfaring som barna har med seg og som vil prege deres arbeid med geometri i grunnskolen. Barna lærer noe om kulas geometri når de triller en ball av gårde. Da vil den i en viss grad oppføre seg som en rullende sylinder. I begge tilfellene er det det at avstanden til et sentrum er lik hele veien rundt som gjør at begge formene egner seg godt til rulling. Men det er naturligvis også store forskjeller mellom måten en sylinder og ei kule triller. De fleste barn prøver også å dytte på andre former, for eksempel en terning, og de erfarer da at det ikke går så lett. Hvis friksjonen er liten, kan terningen flyttes ved at den glir på underlaget, men allikevel blir dette en annen bevegelse enn hvis man dytter på noe med kuleform eller på en bil som har runde, sylinderformede hjul.

Barna har også gjort erfaringer med todimensjonale former, som kvadrat, sirkel, ellipse, trekant og rektangel. Erfaringene stammer fra forskjellige aktiviteter som i liten utstrekning fokuserer på det å klassifisere disse objektene etter *navnene* de har. En todimensjonal figur, som en sirkel, har i streng matematisk betydning ikke en romlig utstrekning, den er det som kalles *ei flate*. Men man kan si at en sylinder har en sirkelformet grunnflate, og en terning har kvadratiske sideflater. De todimensjonale aspektene ved slike figurer kommer for eksempel godt til syne ved leiker hvor en kloss med sirkelformet, kvadratisk og trekantet grunnflate skal plasseres i riktig hull i ei plate. At barn har oppdaget slike former, kommer godt til syne i barnetegninger. Her går både sirkulære og tre- og firkantede former svært ofte igjen.

En annen interessant todimensjonal form er spiralen. Den dukker opp i mange sammenhenger, og barn i førskolealder kan få øye på denne spesielle formen hvis de møter den i forskjellige utgaver. Man kan for eksempel klippe ut en tegning av en katt uten hale. Halen kan man så lage ved å tegne en spiral på et ark og så klippe ut denne spiralen. Ved å feste spiralens midtpunkt på katta, får man en fin hale ved å løfte opp katta og la spiralen folde seg ut under den. En annen spiral kan man lage ved å tråkke en sti i snøen. Start med å gå i en stor sirkel, men like før du har gått en runde, så skrår du litt innover slik at du ender opp like innafor der stien begynte. Nå kan du fullføre spiralen ved at du hele tida tråkker like innafor der du har gått før. En slik spiralformet sti kan bli veldig lang selv om den plassen man laget den på ikke er særlig stor. Grunnen til det er at en slik sti utnytter den ledige plassen godt. Av den grunn er spiralformen også fin som utgangspunkt for et brettspill. På et ark er det ikke spesielt god plass, men hvis man lar den veien man skal gå være spiralformet, kan spillet allikevel bli langt.

Utover slike bestemte geometriske former har barna også kjennskap til mønstre fra mange forskjellige steder. Et mønster framkommer ved at man tar en tegning eller lignende og gjentar den noen ganger. Mønstre dukker opp i alle former og fasonger nær sagt overalt, og det er tema som tas opp grundig nedenfor.

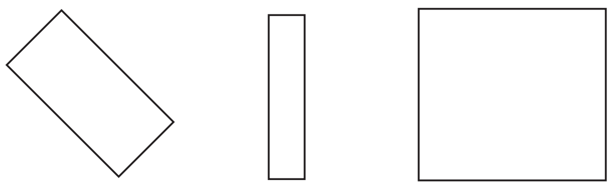
Geometriske figurer har en abstrakt grunnidé. Det er denne abstrakte ideen som gir de geometriske figurene alle deres egenskaper. For eksempel kan man beregne arealet av en firkant ved å multiplisere lengden av den ene siden med lengden av den andre. Dette er en veldig kraftfull og nyttig egenskap. Skal man finne arealet av andre flater som ikke har geometriske egenskaper (for eksempel arealet av et land slik det framkommer på et kart), så er det atskillig mer arbeidsomt, og man klarer aldri å finne en helt eksakt verdi. De geometriske figurene derimot, er utviklet nettopp med tanke på slike helt spesielle egenskaper. De forskjellige egenskapene har blant annet som konsekvens at de geometriske figurene kan brukes til mange forskjellige beregninger, og de kan brukes til å utlede mange matematiske sammenhenger. I antikken syntes filosofene at disse egenskapene var så bemerkelsesverdige at de tilla dem betydning langt utover de strengt matematiske. Platon hevdet for eksempel at en *likesidet* trekant (alle sidene er like lange) var elementet jord, altså den *virkelige* jorden, ideen om en jord i motsetning til den jorden vi bygger hus på. Tilsvarende var *virkelig* vann en *rettvinklet* trekant (en av vinklene er

90°), altså vannets ånd i motsetning til det vannet som vi drikker. En trekant hvor alle sidene har forskjellig lengde, så han på som luftens ånd, mens en *likebeint* trekant (to av sidene er like lange) er elementet ild. På den måten tok Platon målinger og praktisk bruk vekk fra geometrien og innførte i stedet mystikk og overtro.

Seinere brukte Keppler (1571-1630) romfigurer som pyramide og terning for å angi banene til planetene. Han mente at disse romfigurene hadde så kraftige matematiske egenskaper at en skapende gud måtte ha lagt dem til grunn når planetene og deres baner ble skapt. Til og med i dag er det noen kvasi-religiøse retninger som tillegger geometriske figurer spesielle mytiske trekk. I matematikken er vi ikke så opptatt av slike sider ved de geometriske begrepene, men de geometriske ideene er av stor viktighet av andre årsaker.

Det spesielle med de geometriske begrepene er at de har en svært tydelig visuell side i tillegg til den bakenforliggende ideen. Når vi snakker om en sirkel, er den matematiske ideen følgende: alle punktene i et plan som ligger like langt fra et bestemt punkt. Men det er nærmest umulig å arbeide med en sirkel uten at man samtidig også danner seg et visuelt bilde av sirkelen. Alle geometriske figurer har denne tosidigheten. På den ene siden har de en matematisk grunnidé som definerer selve figuren. På den andre siden har hver geometrisk figur flere visuelle uttrykk, måter å konkretisere den grunnideen figuren er basert på. Når det gjelder sirkel, kan vi se for oss sirkler av forskjellig størrelse. For andre geometriske figurer kan de visuelle uttrykkene være mer varierende. Et rektangel er en firkant hvor alle vinklene er rette, altså 90°. I et rektangel vil de motstående sidene være parallelle. Den mest vanlige måten å visualisere et rektangel på er følgende:

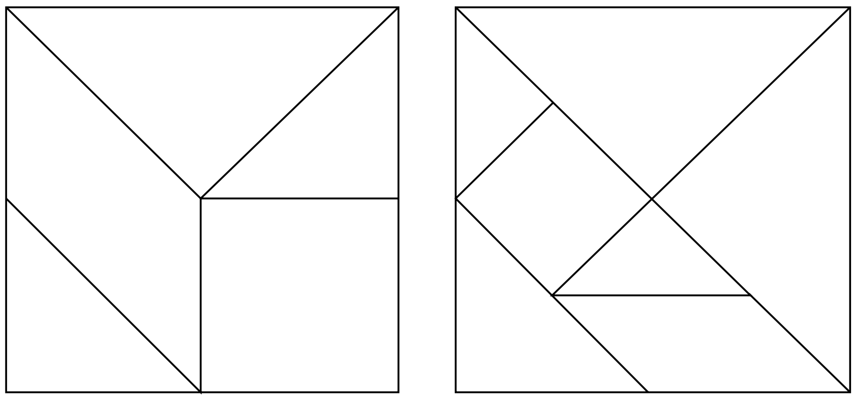
Her er grunnlinja lengst, omtrent dobbelt så lang som de andre linjene. I tillegg ligger grunnlinja horisontalt. Imidlertid kan rektangler også være som disse:



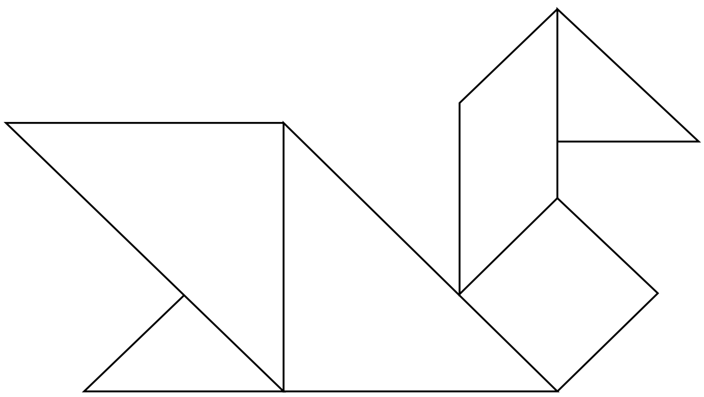
For at elevene skal danne gode geometriske begreper, er det viktig at de gjør erfaringer med så mange visualiseringer som mulig. Hvis undervisningen kun gir erfaringer med en type visualisering, vil elevene ofte danne seg det inntrykket at den geometriske figuren *er* det visuelle bildet. Det er ikke tilfellet. En geometrisk figur er en matematisk ide. Ved å variere med forskjellige visuelle bilder av samme geometriske figur vil elevene få anledning til å trekke ut hva som er likheter og hva som er forskjeller ved disse figurene. Siden figurene er basert på samme geometriske idé, vil variasjonen i framstillingsform kunne tydeliggjøre nettopp denne grunnideen.

En undervisningsaktivitet som passer på nær sagt alle trinn, er å be elever beskrive et eller annet objekt med fokus på objektenes geometriske egenskaper. Det kan gjøres ved å putte forskjellige objekter (en frisbee, en ball, en blyant, et skjell, en tallerken o.l.) opp i ei «mystisk kiste». Så kan en elev komme fram, stikke ei hånd nedi kista og kjenne på den tingen (eller en av tingene) som ligger der. Den skal han beskrive for resten av klassen uten å nevne hva det er. De andre elevene skal prøve å gjette hva han forsøker å beskrive. I del 1 i heftet er betydningen av en diskusjons- og refleksjonsfase grundig beskrevet. En slik fase bør etterfølge alle aktiviteter hvor elevene arbeider med matematiske begreper. Hensikten med fasen er å sette fokus på og tydeliggjøre de aktuelle aspektene ved de matematiske begrepene. I dette eksemplet kan det gjøres gjennom en etterfølgende samtale om de forskjellige figurene: Hold opp en tallerken og spør hvordan den kan beskrives. Kanskje en elev foreslår «at den er rund». I så fall kan man holde opp en ball: Men denne er også rund!

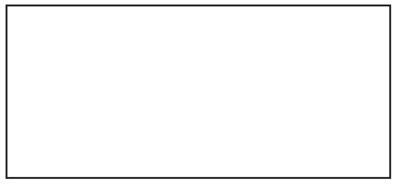
En annen aktivitet som fokuserer på todimensjonale former er å lage tangram-puslespill. De lages ved å klippe opp et kvadrat i 5 eller 7 biter på denne måten:



Ut fra disse bitene kan man be elevene lage figurer av dyr, mennesker, kjøretøy osv. De kan forsøke å lage andre geometriske figurer av noen av bitene. Elevene kan også forsøke å lage kopier av figurer som læreren har laget, for eksempel som denne svanen:



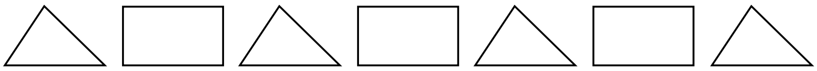
Når elevene har laget en figur, kan de forsøke å beskrive figuren for en annen elev uten at han for lov til å se selve figuren. Ut fra beskrivelsen skal han forsøke å sette sammen en tilsvarende figur. I en refleksjonsfase vil det være viktig å fokusere på at ikke alle firkanter er kvadrater! Det er en oppfatning mange elever har, blant annet fordi man ofte omtaler kvadrater som firkanter i dagliglivet. Firkanter finnes i mange fasonger. Noen har rette vinkler, andre ikke. Firkanter som har rette vinkler, kalles rektangler. Siden de har rette vinkler, vil rektanglene ha parvis like lange sider:



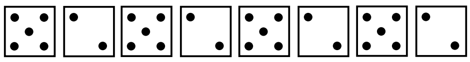
Hvis alle fire sidene i et rektangel er like lange, kalles figuren et kvadrat. Det betyr altså at et hvert kvadrat er også et rektangel, men det motsatte gjelder ikke. Mange tror at et rektangel er en firkant med to korte og to lange kanter, men det er ikke riktig.

9.2 Mønstre

Mønstre er et sentralt tema i geometrien. Som tidligere nevnt er geometri bygd opp omkring regulariteter, og i et mønster dannes en slik regularitet ved at en figur av et eller annen slag gjentas. Ved å arbeide med mønstre ledes oppmerksomheten nettopp mot det regulære, det som holder mønstret gående. Her er et mønster bestående av trekanter og rektangler:



Hvis læreren forsøker å fortsette dette mønstret med et parallellogram hvor vinklene ikke er rette, vil elevene protestere. Grunnen er naturligvis at den bryter mønstret, og hvorfor bryter den mønstret? Det er et godt utgangspunkt for en diskusjon med elevene om de grunnleggende egenskapene med rektangelet: parvis parallelle linjer og rette vinkler. Her er et mønster av terninger:



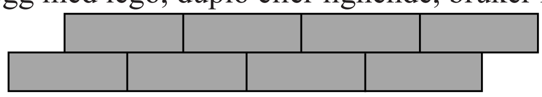
Igjen er det grunn til å tro at elevene vil protestere hvis neste terning blir noe annet enn en 5-er. Og igjen er det fordi mønsteret 5-2-5-2-5-2-5-2- får elevene til å fokusere på den aktuelle egenskapen som danner grunnlaget for selve mønstret.

På denne måten henger mønstre sammen med sentrale matematiske komponenter som det å ordne og å kategorisere. Det at noe ikke følger den oppsatte ordenen og havner i feil kategori, kommer veldig tydelig fram i et mønster. Mønstre kan dermed brukes både til å fokusere på spesielle egenskaper ved forskjellige figurer og til å framheve nytten av det å ordne/kategorisere.

I tillegg er det viktig å arbeide med mønstre ut fra et estetisk perspektiv. I kunst og håndverk arbeider man ofte med en eller annen form for gjentakelse, på et eller annet mønster. Det gjelder i arkitektur (ornamenter), utskjæringer i tre (på bygninger som kirker og på bruksgjenstander som sengegavler og kaketiner), det gjelder mønstre på papir (brevhoder, reklameplakater) og på klær (strikkede gensere). Mønstre i alle fasonger kan gjøres til gjenstand for utforsking.

Siden de minste elevene fortrinnsvis har gjort erfaringer med tredimensjonale figurer, kan det være en fordel å arbeide med slike også i forhold til mønstre. Det kan gjøres ved at læreren starter å legge ut et mønster av forskjellige objekter (et løv - en pinne - en stein) som elevene skal bygge videre på. Man kan også bruke elevene selv til «byggeklosser» for å danne et mønster, for eksempel ved at annenhver elev sitter på huk og strekker seg opp. Elevene kan også selv finne på slike mønstre, enten med forskjellige objekter eller ved å bruke seg selv.

Når man skal bygge en vegg med lego, duplo eller lignende, bruker man ofte et mønster:



Ved å dele en potet i to kan man skjære ut en form i hver halvdel. Disse formene kan dyppes i maling og brukes til å lage mønstre på papir. Slike og andre mønstre laget på papir eller filt, kan henges opp på en plakat i klasserommet.

Alle slike aktiviteter hvor mønster brukes, kan etterfølges av diskusjoner hvor det fokuseres på de sentrale aspektetene ved de figurene som brukes. Det kan være diskusjoner om begrepspar (høy-lav-høy-lav for dem som sitter på huk/står oppreist, kort-lang-kort-lang hvis man lager et mønster av pinner med varierende lengde osv.), om plassering (over-under-over-under som i lego-mønsteret over) og om forskjellige former (firkant-trekant-firkant-trekant som i eksemplet over).

9.3 Dimensjoner

I matematikken på småskoletrinnet vil vi befatte oss med 1, 2 eller 3 dimensjoner. Rent teoretisk kan man se for seg både dimensjoner større enn 3, og også dimensjoner som ikke er heltallige, men det skal vi ikke ta opp her. Med endimensjonal figur menes en figur som kun har utstrekning i én retning. Vi kan tenke oss en svært tynn strek tegnet på et papir. Denne streken er en endimensjonal figur. Et annet eksempel er tall-linja. Den har også utstrekning kun i én retning. Derfor vil alle målinger med ei tall-linje, som lengdemåling og måling med en gradestokk, være målinger av endimensjonale størrelser. Når man beveger seg på tall-linja, kan man grovt sett bevege seg langs én akse, enten framover eller bakover, til høyere eller lavere verdier. Siden omkretsen til en sirkel kan tegnes med en tynn blyant, er også den en endimensjonal størrelse. Dette gjelder altså selv om streken krummer. Hvis man setter en blyant et eller annet sted på denne omkretsen, kan man også her bevege seg to veier; Man kan følge omkretsen enten med eller mot klokka. En gradestokk viser temperatur langs en en-dimensjonal skala enten den er som en vertikal strek eller som en viser langs en sirkel.

Etter matematiske definisjoner er

- ei *linje* en kurve som er uendelig i begge retninger
- en *stråle* en kurve som har ett endepunkt og fortsetter uendelig langt i én retning
- et *linjestykke* en kurve som har to endepunkter

Når man omtaler linjer, stråler, og linjestykker mener man som regel *rette* linjer, stråler eller linjestykker, altså kurver som ikke krummer.

Det som kalles *flater*, er todimensjonale figurer. Flater kan males eller fylles med en pensel. Hvis man tegner en sirkel, vil det som er innenfor den tegnede linja, utgjøre en slik flate, og er altså en todimensjonal figur. Et kart er et annet eksempel på ei todimensjonal flate. Mens man langs en en-dimensjonal strek bare kan bevege seg langs én akse (enten framover eller bakover), kan man på ei flate bevege seg langs to akser. På et kart kan man for eksempel gå i retningen øst-vest eller i retningen nord-sør eller i en kombinasjon av disse. Ved å bevege seg mer eller mindre langs disse to aksene, kan man komme til hvilket punkt som helst på kartet. Alle punktene på kartet kan nås ved først å gå langs den ene aksen (for eksempel øst-vest) og deretter langs den andre (for eksempel nord-sør). Det er dette som menes med todimensjonale flater.

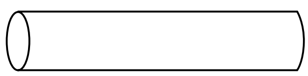
Et vanlig koordinatsystem utgjør også en todimensjonal flate. De to aksene som «viser vei» på denne flata, er den horisontale x-aksen og den vertikale y-aksen. Ved å angi hvor mye man vil bevege seg langs hver av disse to aksene, kan vi komme til hvilket punkt som helst (og dermed til alle mulige punkter) på denne flata. På samme måte som endimensjonale figurer kan krumme, kan også todimensjonale flater være krumme. Overflata til en ball eller en globus er en slik krum flate. Det er mye interessant geometri knyttet til slike krumme flater. Hvis man for eksempel skal finne korteste vei mellom to punkter på ei kule, kan man få overraskende resultater. Skal man fly den korteste veien fra Oslo til Alaska, må man fly så å si rett nordover, og ikke vestover som man kanskje skulle tro. Det å regne på krumme flater blir fort nokså komplisert. Det er grunnen til at det meste av den todimensjonale geometrien i grunnskolen er knyttet til flater som ikke krummer.

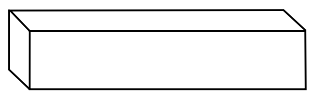
Tredimensjonale figurer er figurer som har en romlig utstrekning. Alle tingene som vi omgir oss med, er tredimensjonale. En murstein er et eksempel på et tredimensjonalt objekt. Sett ovenifra har en murstein en utstrekning både i nord-sør-retning og i øst-vest-retning. I tillegg har den en utstrekning i en opp-ned-retning. Ved å bevege seg langs disse tre aksene, kan man komme fram til hvilket som helst punkt i denne mursteinen. Legg merke til at *overflata* til en tredimensjonal figur, som for eksempel en ball, er ei todimensjonal flate.

Alle virkelige objekter er tredimensjonale. Derfor vil slike figurer ligge til grunn for de fleste erfaringene barna ha gjort før de kommer til skolen. Todimensjonale figurer er enten *avledet* av tredimensjonale objekter (som overflata til en ball, altså ikke selve ballen, men bare overflata), eller det er tegninger på et papir eller lignende. Undervisningen i geometri starter ofte med todimensjonale figurer fordi dette anses som lettest. Dermed bryter man med det erfaringsgrunnlaget som elevene bringer med seg inn i undervisningssituasjonen. En undervisning mer i takt med elevenes forutsetninger vil i stedet bygge videre på deres kunnskaper både om to- og tredimensjonale figurer.

Et tema som har fått liten vekt i geometriundervisningen, er forholdet mellom to- og tredimensjonale figurer. Dette er et svært viktig tema både i forhold til seinere matematikkundervisning og ikke minst i forhold til mye praktisk bruk av matematikk. For eksempel er all tegning av konkrete gjenstander et forsøk på å overføre tredimensjonale objekter til ei todimensjonal flate. Dette gjøres i hovedsak ved å innføre *perspektiv* i tegningen. Her kommer noen undervisningseksempler:

En klasse med 7-åringer satt i grupper med 3-4 elever i hver gruppe. Hver gruppe fikk noen treklosser som de skulle bygge tårn av. Deretter skulle hver elev lage en tegning av tårnet. Denne tegningen skulle så gis til en annen gruppe, som så skulle prøve å bygge et tilsvarende tårn på grunnlag av tegningen. De tegningene elevene lagde, viste ofte kun en side av hver kloss, og da gjerne den mest særpregete siden. Dette førte til at for eksempel disse to klossene ble tegnet likt:





Dermed ble det vanskelig for dem som skulle bygge tårn på grunnlag av en slik tegning. I en avsluttende klassediskusjon ble flere slike tvetydigheter tatt opp, og elevene kom opp på tavla for å vise sine forslag til hvordan dette kunne løses. Her ser du tre tegninger av samme tårn fra samme utgangspunkt. Den midterste tegningen forsøker å vise klossenes romlige utstrekning.

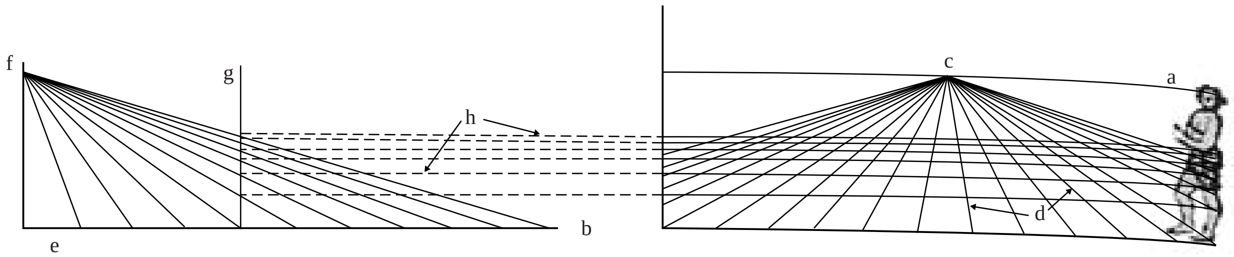
Denne aktiviteten fungerte godt til å få elevene til å fokusere på noen av problemene med å tegne tredimensjonale figurer. En annen måte å gjøre dette på er å oppfordre elevene til å tegne slike tårn slik de ser dem fra den kanten de sitter. Tre tegninger fra tre forskjellige vinkler vil gi ganske forskjellige tegninger av samme tårn. Dette kan eventuelt sammenlignes med et polaroidfotografi av tårnet. I alle tilfeller vil dette kunne gi opphav til gode diskusjoner omkring det å avbilde tredimensjonale objekter på et todimensjonalt plan.

En annen utmerket aktivitet er å bruke skyggeteater. Dette kan både gjøres ved at man klipper ut figurer i papp, eller ved at man bruker andre tredimensjonale objekter. Det interessante matematiske aspektet ved en slik aktivitet er å se på hvordan forskjellige figurer kaster skygge: at en ball kaster en sirkulær skygge hvis lyset står rett bak ballen, mens den kaster en elliptisk (oval) skygge hvis lyset treffer ballen på skrå i forhold til lerretet; at en sylinder også kaster en sirkulær skygge hvis lyset treffer fra én kant, mens den kaster en rektangulær skygge hvis lyset treffer fra en annen, osv. Utklippede pappfigurer vil også endre skygge hvis de vris i forhold til lyset og lerretet. Et annet moment er at en figur nær lyskilden vil kaste en større skygge enn hvis den var langt fra lyskilden. Som for de øvrige aktivitetene bør denne etterfølges av en diskusjonsfase som framhever de sentrale aspektene tilknyttet de matematiske begrepene som elevene har arbeidet med. Det kan for eksempel gjøres ved at man stiller spørsmål som: Hvilke figurer kastet oval skygge? Hvilke kastet størst skygge (i tilknytning til areal)?

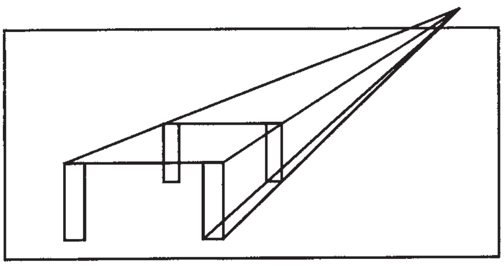
9.4 *Perspektiv*

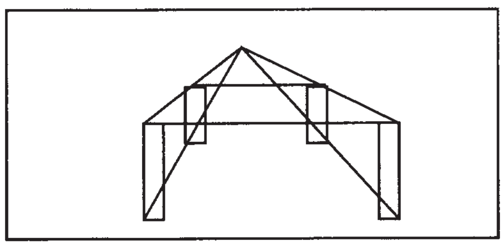
I mange yrker arbeides det med å overføre romlige legemer, legemer med en tredimensjonal utstrekning, til en todimensjonal flate. Dette må alle arkitekter og ingeniører gjøre når de lager arbeidstegninger, og geografer må gjøre det når de skal avbilde jordkulen på et kart. Det som er tema i dette kapitlet, er hvordan enkelte billedkunstnere har løst dette, og utnyttet dette til å skape spesielle uttrykk.

Det var i renessansen at billedkunstnere virkelig begynte å bruke perspektiv i bildene sine. Maleren og arkitekten Leone Battista Alberti (1404-1472) skrev ei lærebok i perspektiv-tegning, kalt «De Pictura». Den tok for seg plassering og størrelser av figurer i malerier som gjengir romlig utstrekning. Her er et lite utsnitt fra boka:



Et stort problem i perspektivtegning er å finne ut størrelsen eller lengden på objekter med forskjellig romlig plassering. Du kan tenke deg at du skal tegne et bord sett på skrå ovenfra. Spørsmålet blir da: Hvor lange skal de bakre beina være i forhold til de forreste? Og hvor bredt skal bordet være i bakkant i forhold til den fremre kanten? Dette kan løses ved at man velger seg et fikseringspunkt. Dette punktet kan velges vilkårlig, enten innenfor eller utenfor bildets rammer. Se på disse eksemplene:





I det venstre bildet er de bakre beina justert både i høyde og bredde. I bildet til høyre er de bakre beina kun justert i forhold til riktig høyde, de er ikke justert i bredden. De er tegnet like brede som frambeina. Så selv om beina er akkurat like brede (mål!), gir plasseringen lenger inn i bildet et inntrykk av at de er bredere.

Denne innovasjonen i malerkunsten ble grundig utnyttet av renessansemalerne. Se for eksempel på dette bildet av Piero della Francesca (ca 1416-1492).

Ved å tegne inn linjer langs de få stedene hvor det er parallelle linjer «inn» i rommet, kan vi se at det i dette bildet er brukt et sentralperspektiv. Det betyr at samlingspunktet for perspektivlinjene ligger innenfor maleriets rammer. Det samme er tilfellet for det høyre av de to bordene over. Kan du finne hvor perspektivlinjene møtes?

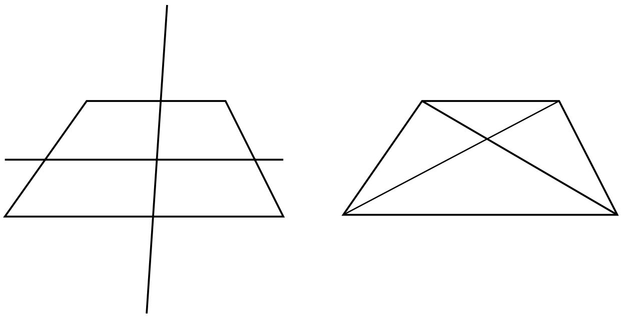
De treffer nokså nøyaktig midt i Madonnas ansikt, noe som neppe er tilfeldig. Det maleren forsøker å oppnå, er at betrakterens blikk dras mot dette sentrum, at Madonnas ansikt blir et tyngdepunkt i bildet. Denne effekten forsterkes ved at maleriets vertikale midtlinje er ei slags speilingslinje. Personene til høyre og venstre for Madonna er ganske nær en speiling av hverandre. Hvor ligger den horisontale midtlinja på dette bildet?

På 1900-tallet begynte modernistiske malere å bryte disse matematiske prinsippene for perspektiv. Dette ses blant annet i kubismen. Igjen er hensikten å skape spesielle effekter og via disse effektene påvirke betrakteren i en eller annen retning.

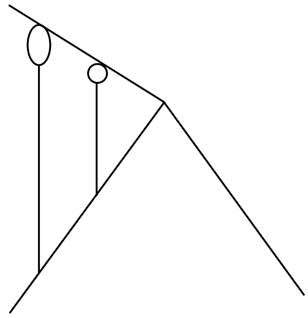
Elever på småskoletrinnet kan gjerne arbeide med perspektiv. En måte er som tidligere nevnt å be dem tegne forskjellige tredimensjonale figurer. De vil da ofte tegne figurene sett fra én side. Videre kan man se på hvordan man kan tegne et hus sett på skrå o.l. Slike tegninger kan sammenlignes med polaroidfotografier av samme gjenstand.

Når man skal etabler perspektiv som et hjelpemiddel i tegning, kan man gjerne se på hvordan det er blitt brukt i malerkunsten. Man kan isolere detaljer fra bilder og fokusere på hvordan perspektiv der er brukt for å skape en virkning av dybde og rom. Aktuelle oppgaver for 3. og 4. klasse kan være for eksempel å finne midtpunktet på flater som de to bordene tegnet over. En intuitiv måte å gjøre det på er å halvere alle de fire sidene og så trekke linjer mellom disse punktene. Det blir imidlertid feil. Grunnen til det er at siden bordet er tegnet i perspektiv, blir den halvdelen som ligger lengst «inn» i bildet, i virkeligheten lengre enn den halvdelen som ligger lengst framme. Den beste måten, som også er illustrert i eksemplet fra «De Pictura», er ved å tegne diagonaler. Diagonalene vil krysse hverandre midt på bordet. Man kan også se på høyden til figurer som er plassert langt framme i bildet sammenlignet med personer lenger bak i bildet.

Finner midtpunkt, en feil og en riktig måte:



Bestemmer høyde:



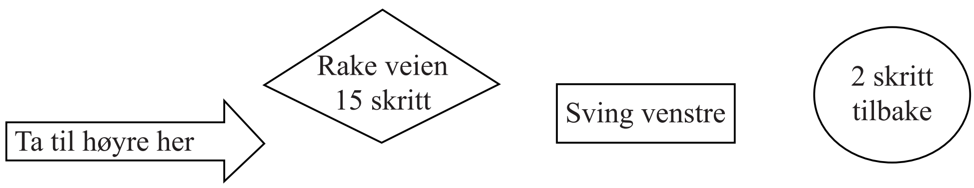
Som for tidligere aktiviteter er det viktig at elevene får anledning til å diskutere sine erfaringer etter at aktiviteten er gjennomført. Det kan være spørsmål knyttet til malerier eller til elevenes egne tegninger: «Hvor mange centimeter er figurene i bakgrunnen og de i forgrunnen?», «Hvorfor er det forskjell?», «Hva hvis man hadde tegnet dem like store, hvilket inntrykk ville det gi?» osv.

9.5 Størrelser og plassering

9.5.1 Plassering

Vi bruker mange ord i dagligtalen for å beskrive forskjellige objekters plassering: bak, etter, fjernt, før, høyre, lang, mellom, midt, ned, nederst, nært, opp, over, rundt, under, ved siden av, venstre. Det er viktig at elevene, spesielt i de første årene på skolen, blir vant til å bruke disse ordene. Det kan gjøres gjennom mange forskjellige aktiviteter. Noen aktiviteter kan kombineres med kroppsøving:

- gå under og over hverandre når annenhver står på huk / med beina fra hverandre
- «følg lederen», diriger den første eleven over, under, til venstre/høyre osv., mens resten av klassen følger etter
- man kan ha en «venstre-» og en «høyredag» hvor alt skal skje med hhv. venstre og høyre hånd, fot osv.
- lage en modell, for eksempel en bondegård: gi direksjoner som involverer plassering: la stallen stå til venstre for låven, putt traktoren mellom … Be elevene fortelle hvor hesten må gå for å komme fram til åkeren: «først må han gå ut av stallen, så svinge mot venstre, gå langs låven til treet…»
- be elevene lage «hinderløype» med direksjoner på skilt:



- lag skattekart med slike direksjoner

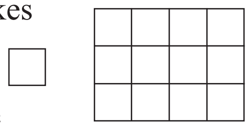
9.5.2 Areal og volum

Areal uttrykker størrelsen på en todimensjonal flate. Areal er altså et mål. Når små barn skal beregne arealer, vil de ofte gjøre det ved direkte sammenligning. To flater er like store hvis de dekker hverandre når den ene legges oppå den andre. Man kan også gjøre sammenligninger ved å betrakte flater ved siden av hverandre. På den måten kan man se at et ark er større enn et annet, det har større areal.

Når målingen dreier seg om en sammenligning av to flater som befinner seg i to forskjellige rom, f. eks. størrelsen på to bord, blir det vanskelig å bruke direkte sammenligning. Da må man innføre måleenheter. Det enkleste er å finne en måleenhet som dekker det ene bordet fullstendig, f. eks. en duk. Da kan man ta med seg den duken inn i det andre rommet og se om den passer på det andre bordet. Hvis man ikke finner en slik måleenhet, kan man bruke mindre måleenheter og telle hvor mange av dem som må til for å dekke bordet. Man kan f. eks. bruke en del av et ark.

Det tredje nivået i slike målinger nås når behovet for standardiserte måleenheter melder seg. Det skjer når man skal gjøre sammenligninger utenfor en umiddelbar nærhet. I det forrige eksemplet ble målingen gjort med en del av et ark. Denne delen kunne man ta med seg inn i rommet ved siden av for å se om det bordet var større eller mindre. Hvis man skal sammenligne størrelsen på en pult i Norge med en i Australia, er det lite hensiktsmessig å måle med slike spesielle måleenheter. I så fall måtte den sendes hele veien til Australia. Da er det mye enklere å måle med en standardenhet som cm^2. Vi lager oss da ei kvadratisk flate hvor alle sidene er en cm, og vi kan måle andre flater ved å se hvor mange slike cm^2 vi får plass til på de flatene:

Dette rektanglet kan dekkes
av 12 standardenheter:



Arealet er dermed 12 cm^2

Det fjerde nivået i utviklingen av måleferdigheter i forhold til areal er knyttet til forenkling og systematisering av tellingen. Ved enkelte flater kan tellingen gjøres systematisk. Det gjelder f. eks. rektangulære flater som den over. Her skal man fylle hele rektanglet med standardenheter. For å få til det må man være systematisk. En metode er først å tegne standardenheter langs en kant, og på den måten fylle ut en rad (eller en kolonne). Så kan man bruke denne første raden som utgangspunkt og tegne standardenheter under hver firkant i denne raden. På den måten kan man få fylt ut hele arealet.

Hvis elevene får arbeide med å fylle ut slike arealer en periode, vil de etter hvert begynne å se etter mer effektive metoder enn å tegne alle standardenhetene. Det er fortrinnsvis to metoder å gjøre det på. Den ene er å tegne ved hjelp av linjer. Da går tegningen mye raskere. Den andre metoden er å bruke regning. Det å beregne slike arealer har en multiplikativ struktur som barna etter hvert vil kjenne igjen. I en overgangsfase vil de kunne bruke gjentatt addisjon, men den desidert raskeste måten å finne et svar på er ved multiplikasjon.

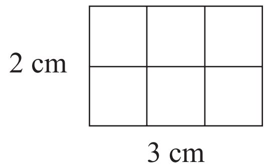
I tradisjonell undervisning har man lagt stor vekt på nettopp å lære elevene denne formelen for arealberegning. Faren med å gå for raskt over til den formelle algoritmen, er at elevene da mister hensikten med algoritmen av syne. De lærer at areal er å gange sammen «lengde og bredde», men hvorfor de gjør det eller hvorfor de da får riktig svar, vil de ofte ikke være klar over. Fokus har vært på formelen, ikke på det formelen betyr eller på den opprinnelige problemstillingen: det å beregne et areal. Alle de fire fasene som her er nevnt, fra direkte sammenligning til det å effektivisere algoritmer for beregning av areal, bør inkluderes i undervisningen av areal på småskoletrinnet. På den måten kan hensikten med beregningene hele tiden være i fokus, selv om beregningsmåtene varierer.

Se på følgende oppgave:

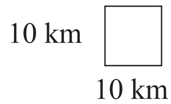
> *På et kart er målestokken 1:1 000 000. Det betyr at 1 cm på kartet er 1 000 000 cm = 10 000 m = 10 km i virkeligheten. Et skogområde på kartet måles til ca. 6 cm^2. Hvor stort er dette skogområdet i virkeligheten?*

En meget utbredt misoppfatning gjelder forholdet mellom en- og todimensjonale størrelser. Målestokk er noe som gjelder i en dimensjon, mens areal er en todimensjonal størrelse. Det betyr at målestokk ikke kan brukes direkte til å «oversette» areal på et kart til arealet i virkeligheten. Hvis du svarte 60 km^2 på oppgaven, har du prøvd nettopp det. Her kommer forklaringen på hvorfor det blir feil:

La oss si at skogområdet på kartet ser ut som et rektangel med lengde lik 2 cm, og bredde lik 3 cm. Da blir arealet på kartet lik 6 cm^2. I virkeligheten er lengden da lik 20 km, mens bredden er lik 30 km. Virkelighetens areal blir derfor 20 km · 30 km = 600 km^2.



På tegningen ser vi at hver rute er på 1 cm^2 . I virkeligheten vil vi få sider på 10 km, og altså areal på 10 km · 10 km = 100 km^2. Seks slike ruter gir et areal på 600 km^2.



Så mens målestokken for lengder medfører at lengder på 1 cm på kartet blir 10 km i virkeligheten, blir areal på 1 cm^2 lik 100 km^2. Dette skyldes at utstrekningen skjer i to dimensjoner.

For volum gjelder tilsvarende. For lengder kan vi si at det ikke er særlig stor forskjell på desimeter og meter: Med ti desimeter får vi samme lengde som en meter. For areal blir forskjellen ti ganger større. Det går 100 kvadratdesimetere på en kvadratmeter. For volum blir forskjellen enda ti ganger større. Dette gjør at mens en kubikkdesimeter er en forholdsvis liten størrelse, det er det vi kaller en liter, så er en kubikkmeter forbausende stor. Det går altså tusen kubikkdesimetere, 1000 l, på en kubikkmeter.

For at elever skal få en formening om hvor stor en kubikkmeter er, kan det være lurt å få laget et rammeverk, en terning hvor alle sidene er en meter lange. Denne terningen kan gi utgangspunkt for mange forskjellige aktiviteter:

Hvor mange elever er det plass til i kubikkmeteren?

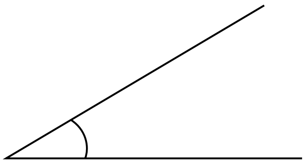
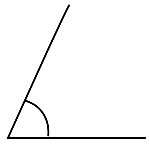
Hvis den skal fylles med mindre terninger hver på en kvadratdesimeter (eller pakker med smør), hvor mange slike terninger er det plass til?

Hvor mange 10-liters bøtter med vann må man bruke for å fylle terningen helt full?

9.5.3 Vinkler

Tradisjonelt innføres vinkler ved at man ser på to linjer som krysser hverandre. Et problem som ofte oppstår da, er at elevene blander sammen hva som er vinkelen og hva som er linjene.

En utbredt misoppfatning blant elever framkommer når vi ber dem si hvilken vinkel som er størst av disse to:

a)  b) 

En tilsvarende oppgave ble gitt i KIM-undersøkelsen om *Målinger og enheter*. Da var det kun 22 % av elevene i 6. klasse som svarte den riktige vinkelen. Når mange elever tror at vinkel a) er større enn vinkel b), skyldes det antakeligvis at de ser på vinkelbeina i stedet for selve vinkelen.

En annen introduksjon kan gis ved å knytte vinkelbegrepet til rotasjon: jo større rotasjon jo større vinkel. Vinkel er da ikke et statisk begrep knyttet til bildet av noen linjer, men knyttet til *måling*, måling av rotasjon. For dannelsen av et godt vinkelbegrep er det viktig at elevene møter begge disse aspektene ved begrepet.

I eksemplet nedenfor gis en mulig framgangsmåte, men rotasjoner opptrer i mange praktiske sammenhenger, så det er mange muligheter å velge blant. De erfaringene som elevene gjør med vinkler på denne måten, må siden knyttes til den «vanlige» måten å arbeide med vinkler på, hvor man ser på vinkler som dannes når to linjer skjærer hverandre. Et mellomledd kan da være å late som om en person kommer gående langs ei av linjene, og så se på hvor mye han må rotere for å følge den andre linja. En annen mulighet er at personen står i skjæringspunktet og ser langs den ene linja. Vinkelen framkommer da ved å se på hvor mye han må rotere for å se langs den andre. Den vinkelen han da roterer, kan vi angi ved å tegne inn en bue fra den første retningen til den endelige.

Vinkler har på denne måten to aspekter: et *dynamisk* aspekt, knyttet til rotasjon, og et *statisk* aspekt, som for eksempel framkommer når to linjer krysser hverandre. Begge disse aspektene finnes i forskjellige daglige situasjoner. Det statiske aspektet ses ved alle former for skjæringer: veier som krysser hverandre, linjer som skjærer hverandre på et papir (i bokstaver, som Y, danner linjene vinkler), grener ut fra en trestamme. Det dynamiske aspektet finnes ved alle former for rotasjon. Det er viktig å vektlegge dette aspektet ved vinkelbegrepet for elever på småskoletrinnet. Forskjellige hverdagslige situasjoner gir opphav til rotasjon:

Ubegrenset rotasjon, rundt et felles punkt. Slike rotasjoner (svingdører, hjul, vifter) er ofte bygd opp omkring rotasjonssymmetri.

Begrenset rotasjon, om et felles punkt. Her er det vel definerte begrensninger som rotasjonen skjer innenfor (termostatbryter på komfyr, «gammeldagse» vannkraner). Her er det også ofte rotasjonssymmetri.

I-rotasjon, hvor et enslig, lineært objekt er fast i en ende og roterer i den andre (vanlige dører, de fleste visere).

V-rotasjon, hvor to lineære objekter er festet i et felles endepunkt (foldekniver, bokpermer).

X-rotasjon, hvor to lineære objekter er festet i et felles punkt utenom endene (saks).

Kryss, hvor to linjer møtes. Her vil det skje en rotasjon hvis man beveger seg langs den ene linja, mot møtepunktet og så videre langs den andre. Rotasjonen skjer akkurat i møtepunktet.

For å utvikle et godt vinkelbegrep må elevene gjøre erfaringer med både det statiske aspektet ved vinkler og det dynamiske. De bør møte begge aspektene i mange forskjellige situasjoner og i arbeid med mange forskjellige oppgaver. De må også få anledning til å reflektere over likheter mellom disse to aspektene, slik at de selv kan finne grunnleggende egenskaper ved begrepet vinkel.

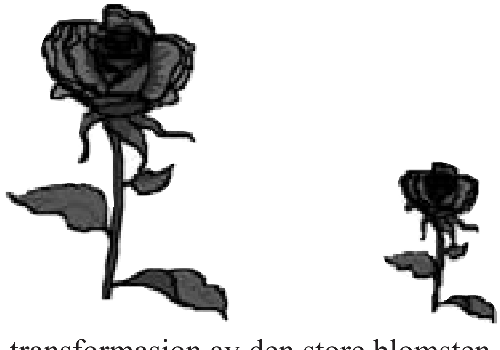
Blindebukk
Ta et bånd foran øynene, be elevene dirigere deg fra et sted til et annet. Hensikten er at elevene skal se nytten av presise direksjoner. Hvis en elev sier «Gå et skritt fram», kan du velge å ta enten et lite eller stort skritt fram. Dette er en god motivering for innføring av måleenheter for lengde. Hvis en annen elev sier «Sving til høyre» kan du velge å enten snu veldig lite eller veldig mye. Ut fra det kan man innføre noen «kjernevinkler», dvs. en halv omdreining og en kvart omdreining. Så kan elevene dirigere hverandre ved å bruke de direksjonene man blir enig om. Deretter kan dette utvides. En mulig aktivitet er å la elevene dirigere en figur som vandrer i et tegnet landskap, enten på en overhead eller på tavla. Da kan læreren tegne inn hindringer slik at det blir vanskelig å dirigere bare med halve og kvarte dreininger. Etter ei stund, kan læreren introdusere vinkelmål for å angi vinkelstørrelser: at 90° tilsvarer en kvart omdreining, 180° tilsvarer en halv og 360° en hel omdreining.

I etterkant kan man diskutere hvilke direksjoner de forskjellige elevene brukte i forskjellige sammenhenger. Videre kan man diskutere om noen direksjoner var vanskeligere å forstå og som førte til misforståelser.

9.6 Transformasjoner

I tillegg til å ha gjort erfaringer med geometriske former, har barna også kjennskap til geometriske begreper knyttet til plassering og til geometriske prosesser. Når det gjelder plassering, vil barna ha varierende kunnskaper om begreper som over, under, til siden for, mellom, i, rundt. Både det å kunne plassere objekter i henhold til direksjoner og å kunne bruke slike begreper for å beskrive plassering for andre er viktige egenskaper i arbeidet med å utvikle god romforståelse. Dette er nevnt tidligere i dette kapitlet.

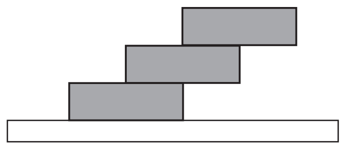
Når du har et todimensjonalt objekt, kan du foreta en *transformasjon* av det objektet. Det vil si at du gjør en avbildning av objektet som bevarer sentrale aspekter ved objektet. Sett at du har et bilde av en blomst. Hvis du forminsker denne tegningen, vil du få en ny blomst som er så å si lik den tegningen du først hadde. Den eneste forskjellen er at den nye er mindre, ellers har den akkurat de samme egenskapene:



Det vi har gjort her, er en transformasjon av den store blomsten. Det vil si at vi har laget en ny blomst, en avbildning av den første, hvor noen av de opprinnelige geometriske egenskapene er bevart. Denne avbildningen, *forminsking*, bevarer alle innbyrdes forhold. Det betyr for eksempel at bladene er like store i forhold til stilken på begge tegningene. Hvis stilken er 4 cm og det venstre bladet 2 cm på den store blomsten og stilken på den lille blomsten er 2 cm, så må det venstre bladet være 1 cm langt. Hvis bladet er halvparten av stilken på den første tegningen, så må det også være slik på den andre tegningen. Selve lengdemålene er imidlertid forandret. For eksempel er lengden på den nye stilken mindre enn på den første.

En annen avbildning er *forstørring*. Forstørring kan man arbeide med på mange forskjellige måter. En underholdende variant er å la elevene tegne figurer på en ballong og så blåse den opp. Motsatt går også bra: tegn på en oppblåst ballong og slipp ut luft, litt etter litt. Lag gjerne tegninger inni tegninger. Bruk de erfaringene elevene gjør til å diskutere hva som skjer. Siden dette er forstørring/forminsking, vil forholdet mellom de forskjellige delene på tegningene bli det samme, men størrelsen blir forskjellig. Det at forminsking og forstørring bevarer innbyrdes forhold, gjør at aktiviteter med slike transformasjoner også kan brukes i sammenheng med multiplikasjon.

Her skal vi se på noen andre transformasjoner, avbildninger som bevarer sentrale aspekter ved den opprinnelige figuren:



Parallellforskyvning. Denne prosessen brukes blant annet for å lage en trapp med legobrikker. Vi starter med en brikke som settes fast på et brett. Neste brikke skal være helt lik den første, og dens plassering er en parallellforskyvning av den første. Det vil si at brikken har samme form og retning, men den er forskjøvet, litt bortover og litt oppover. Neste brikke er en tilsvarende parallellforskyvning av den andre; samme form og retning, men en litt annen plassering:

Rotasjon. I mange leiker er rotasjon et viktig element. For eksempel når man hopper paradis skal man foreta en 180° rotasjon, en halv vending når man kommer til enden. Det er også mange ting som roterer: en snurrebass, et hjul, viserne på ei klokke. Noen serveringsbrett roterer. De vil i så fall sjeldent foreta slike fullstendige rotasjoner, men nøye seg med mindre rotasjoner.

Speiling. Mange flater gir speilbilder. Dette er noe barn oppdager før de fyller ett år, og alle former for eksperimenter som barn gjør foran speilflater, er med på å danne den erfaringsbakgrunnen vi som lærere kan og bør dra nytte av i matematikkundervisningen. I tillegg brukes speiling blant annet til å lage kunst hvor man vil ha (en viss) likhet mellom venstre og høyre side. På en slik måte bruker vi speiling når vi skal finne på nye mønstre på julekurver. Da legger vi høyre og venstre del oppå hverandre, og så bretter vi langs midten før vi klipper det nye mønstret. Denne brettingen gjør at mønstret blir likt på begge sider av de to stykkene som skal flettes. Et annet eksempel på speiling som de fleste barn vil kjenne, er de «sommerfuglmalerier» som lages ved at man maler på den ene halvdelen og så bretter arket og klemmer godt. Da blir de to delene så å si identiske, og det er nettopp denne speilsymmetrien som er framtredende ved slike bilder.

I disse forklaringene er det gitt ideer til mange aktiviteter knyttet til de forskjellige begrepene. For alle aktivitetene gjelder at de bør etterfølges av diskusjoner som fokuserer på og framhever de sentrale aspektene ved begrepene. Det kan f. eks. gjøres ved at man arbeider med flere aktiviteter som alle tar i bruk den samme avbildningen. Deretter kan man diskutere forskjeller og likheter ved aktivitetene. Videre kan elevene oppfordres til å tenke ut andre steder hvor avbildningen dukker opp. På den måten kan man rette fokus på *egenskaper* ved avbildningen. Det er det som er det viktigste læringsutbyttet, ikke navnet på avbildningen.

Referanser

Ahlberg, A. & Hamberger, B. (1995). *Att möta matematiken i förskolan. 6-åringars förståelse av tal och räkning.* Rapport nr 1995:08, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Ahlberg (1995). *Att möta matematiken i förskolan. Matematiken i temaarbetet.* Rapport nr 1995:14, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Bell, A., Costello, J. & Küchemann, D. (1983). A *Review of Research in Mathematical Education. Part A. Research on Learning and Teaching.* Windsor: NFER-Nelson.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *JRME*, vol 24, nr 5, s. 428-441

Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *JRME*, vol 27, nr 1, s. 41-51.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *JRME*, vol 23, nr 3, s. 242-273.

Hughes, M. (1986). *Children and Number.* Oxford: Blackwell.

Imsen, G. (1991). *Elevens verden,* 2. utgave. Oslo: TANO.

Irwin, K. C. (1996). Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships. *JRME*, vol 27, nr 1, s. 25-40.

Johnsen Høines, M. (1987). *Begynneropplæringen, fagdidaktikk for matematikkundervisningen 1.-6. klasse.* Bergen: Caspar forlag.

Johnsen, V. (1996). Hva er en vinkel? *NOMAD*, vol 4, nr. 1, s. 25-49.

O´Brien, T. & Casey, S. (1983). Children learning multiplication. *School Science and Mathematics*, 83, s. 246-251.

Olivier, A., Murray, H & Human, P. (1990). Building on young children's informal arithmetic knowledge. I G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (red), *Proceedings of PME14*, vol 3, s. 297-304. Mexico City: Organising Comittee of PME 14.

Thomas, N., Mulligan, J. & Goldin, G. (1994). Children's Representations of the Counting Sequence 1-100: Study and Theoretical Interpretations. I J. P. da Ponte & J. F. Matos (red), *Proceedings of PME 18*, vol 3, s. 1-8. Lisboa: Organising Comittee of PME 18.

MA-19

Utdanningsdirektoratet

Postboks 2924 Tøyen
0608 Oslo

Internett: www.utdanningsdirektoratet.no/

Bestillingstorget: bestilling.utdanningsdirektoratet.no/
E-post: bestilling@utdanningsdirektoratet.no
Telefaks: 23 30 13 89

Grafisk produksjon: GAN Grafisk AS, Oslo. 08.98