Bokmål

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Veiledning til algebra

F, H og J

Nasjonalt læremiddelsenter
2000

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Gard Brekke
Liv Sissel Grønmo
Bo Rosén

Veiledning til algebra

F, H og J

Forord

Dette veiledningsheftet er skrevet av Gard Brekke, Liv Sissel Grønmo og Bo Rosén som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden (TFN) og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS).

Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen og har flere formål:

- Utvikle en integrert prøve- og etterutdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.
- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan danne utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor deler av faget.
- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og til undervisning i faget.
- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimum kompetanse.

I tillegg til dette veiledningsheftet er det tidligere utviklet veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innenfor disse områdene:

Tall og tallregning
Funksjoner

Det er også utviklet et veiledningshefte, *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som diskuterer matematisk kompetanse og arbeidsmåter i faget. *Matematikk på småskoletrinnet* er et veiledningshefte som ikke er basert på innsamlede data fra diagnostiske oppgaver, men presenterer og diskuterer viktige sider ved den faglige utviklingen hos elever på småskoletrinnet innenfor faglige emner i matematikk. Alle veiledningsheftene er tilgjengelige i Nasjonalt læremiddelsenter.

To veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innenfor områdene *Geometri* og *Måling og enheter* for grunnskolen er under utarbeiding. Det samme gjelder to veiledningshefter, *Tall og tallregning* og *Måling og enheter,* for videregående opplæring.

Det arbeides også med et veiledningshefte som er basert på elevenes tanker om skolematematikken.

Innhold

Innledning		1
DEL 1	**ANALYSE AV DIAGNOSTISKE OPPGAVER**	2
	Algebra	2
1	**Grunnskolens algebra**	3
1.1	Introduksjon	3
1.2	Bruk av algebra	4
1.3	Noen korte glimt fra algebraens historie	6
1.4	Algebra og aritmetikk	7
1.5	Forståelse og bruk av likhetstegnet	8
1.6	Variabelbegrepet	9
1.7	Annen bruk av bokstaver i matematikk	9
1.8	Elevers oppfatninger av bokstaver i matematikk	10
2	**Innledning til algebra**	12
2.1	Prioritet mellom regneoperasjoner	12
2.2	Tallmønster	15
2.3	Mønstre, symboler og generaliseringer	18
3	**Symboler og symbolbruk**	24
3.1	Sammenhenger der verdiene til de variable størrelser er uvesentlige	24
3.2	Bokstav som et objekt	28
3.3	Forenkling av uttrykk	33
3.4	Å sette inn verdi	42
3.5	Å finne verdien til en ukjent størrelse	44
3.6	Fra algebraiske uttrykk til kontekst og omvendt	47
3.7	Tilordninger	51
3.8	Bokstav som et generelt tall	54
3.9	Fra situasjon til algebraiske symboler	59
DEL 2	**IDEER TIL UNDERVISNINGSAKTIVITETER**	63
4	**Undervisningsaktiviteter**	65
4.1	Organisering med sikte på diskusjoner	65
4.2	Utforskning og eksperimentering som utgangspunkt for diskusjoner	67
4.3	Geometriske mønstre og tallfølger	73
4.4	Likhetstegnets betydning	76
4.5	Å forstå egenskaper til tall og regneoperasjoner	79
4.6	Bruk av bokstavsymboler	81
4.6.1	Fra situasjon til algebraisk uttrykk	81
4.6.2	Fra algebraisk uttrykk til en konkret situasjon	88
Referanser		93

Innledning

Dette veiledningsheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til diagnostiske oppgaver rettet mot begreper i algebra. Spesielt fokuserer disse oppgavene på elevers forståelse av bokstaver og bruk av likhetstegnet i matematikk. Oppgavene er prøvd ut, og data er samlet inn blant elever i 5., 7. og 9. klasse etter M87. Oppgavene er samlet i egne hefter og kan brukes fra 6. til 10. klasse etter L97.

Veiledningsheftet bygger på heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som inneholder en generell diskusjon av matematisk kompetanse, læring i matematikk, arbeidsmåter i faget og bruk av diagnostiske oppgaver. Det er mulig å gjøre seg nytte av de diagnostiske oppgavene i undervisningen uten først å lese introduksjonsheftet. En vil likevel tilrå at det blir brukt noe tid på dette. En klargjøring av følgende spørsmål har en sentral plass i introduksjonsheftet:

- Hva er misoppfatninger?
- Hva er diagnostiske oppgaver?
- Når fungerer oppgaver diagnostisk?
- Hvordan bruke de diagnostiske prøvene i klasserommet?
- Hvilke pedagogiske konsekvenser får våre kunnskaper om misoppfatninger?
- Hvordan undervise med basis i kunnskap om den enkelte elevs misoppfatninger?

Del 1 i veiledningsheftet går igjennom de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatninger som kan ligge til grunn for dem. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger fra en nasjonal standardisering.

Prøvene og analysen har rettet søkelyset mot noen sider ved algebra i grunnskolen. Analysen har pekt på funn som en mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisning, slik at elevene kan utvikle så solide begreper som mulig.

Analysen er på ingen måte uttømmende. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere dype studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdanning innenfor temaet algebra.

Del 2 inneholder en samling undervisningsaktiviteter med kommentarer og rettledninger, som er rettet mot de vansker som de diagnostiske oppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av å ha god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver lages, og hvordan en kan tilpasse undervisningsopplegg til de begreper og erfaringer som elevene har.

DEL 1
ANALYSE AV DIAGNOSTISKE OPPGAVER

Algebra

I denne delen blir ulike begreper knyttet til algebra analysert og diskutert med bakgrunn i en nasjonal standardisering. Hovedvekten er lagt på elevers oppfatninger av hva bokstaver representerer i matematikk, men andre sider av forståelse av algebra blir også trukket inn. Noen få av oppgavene er endret på et par punkter etter standardiseringen.

Det deltok 100 femteklasser, 90 sjuendeklasser og 90 niendeklasser (M87-betegnelser) i standardiseringen. På disse klassetrinnene var det henholdsvis 1805, 1953 og 1957 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulike størrelser. Prøvene ble gjennomført i november og desember 1996. Blant de elevene som besvarte prøvene, har en trukket ut ca. 500, etter fødselsdato i måneden. Det er disse elevene som danner grunnlaget for analysen:

505 i 5. klasse, 517 i 7. klasse og 511 i 9. klasse (M87-betegnelser)

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike sider ved algebra og ut fra bestemte misoppfatninger. En finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett. Derfor kommer vi tilbake til noen av oppgavene flere ganger i analysen. I kodeboka har vi tatt med så vel de vanligste feilsvarene vi fant under en forprøve, som interessante feilsvar en har funnet i andre undersøkelser. I framstillingen i dette kapitlet kommenterer vi noen av svaralternativene for de aktuelle oppgavene. Noen misoppfatninger blir illustrert med autentiske elevsvar.

1 Grunnskolens algebra

I dette kapitlet vil vi reise og diskutere noen problemstillinger knyttet til undervisning i og læring av algebra. Diskusjonen vil fortsette i de neste kapitlene, der vi vil gå mer detaljert til verks når det gjelder konkrete elevoppfatninger. En presentasjon og diskusjon av elevaktiviteter følger så i del 2.

1.1 Introduksjon

Det å lære algebra har sine røtter i den matematikken en lærer i de første klassene i grunnskolen, når elevene legger merke til regelmessigheter i sitt arbeid med tall. Fra denne begynnelsen utvikler de kunnskaper om egenskaper ved tallene og regneoperasjonene, egenskaper som senere skal generaliseres til kunnskaper i algebra. Flere studier som er gjort av elevers kunnskaper i dette emnet, peker på at mange får vansker med å lære algebra fordi de ikke har solide nok kunnskaper om tallene og de grunnleggende regneoperasjonene. De trenger å få gjort seg opp *generelle* tanker om resultatet en får ved å utføre regneoperasjoner med tall, og ikke *bare* rette oppmerksomheten mot å få riktige svar på sine utregninger. Slike tanker vil danne et grunnlag for generaliseringer innenfor algebra.

Algebra blir vanligvis sett på som et problemområde for mange elever, noe som har fått lærere til å sette spørsmålstegn ved nytten av dette emnet i skolen. Kan dette komme av at en konsentrerer så mye av arbeidet om å lære regler, formler og algoritmer at begrepsdanningen kommer i bakgrunnen? Med *for* stor vektlegging av dette aspektet i undervisningen kan siktemålet til mange elever bli et spørsmål om å beherske en rekke prosedyrer. Det må understrekes at prosedyrene i algebra *er* viktige, på samme måte som prosedyrene i tallregning er det, men det er uheldig hvis elevenes siktemål med emnet bare blir knyttet til disse prosedyrene. Det er enighet om at de matematiske utfordringene for elevene ligger i:

- Å se sammenhenger til andre områder av matematikkpensumet og til anvendelser utover skolematematikken.
- Å se linjene innenfor algebra og at dette arbeidet skjer med å trekke paralleller til tallforståelse og tallregning.
- At mange elever mangler grunnleggende forståelse av de regneoperasjoner som de skal utføre på symbolene, uttrykkene eller ligningene.
- Holdningen til emnet, det at emnet oppfattes som et formelt, isolert system der symbolmanipulasjon og regler dominerer.

I mønsterplanen for grunnskolen, M87, var algebra og funksjonslære ett fagemne, mens algebra og tall er ett fagemne på ungdomstrinnet i L97. Det følgende sitatet fra L97 setter søkelys på det vi mener er de grunnleggende utfordringene i emnet algebra i grunnskolen.

Det er avgjørende for utvikling av innsikt i målområdet tall og algebra at arbeidet med variabler og formler foregår i meningsfylte sammenhenger. Elevene bør få oppleve sammenhengen mellom tallregning og algebra. Et utgangspunkt på småskole- og mellomtrinnet er arbeid med mønstre og regelmessigheter og med å beskrive dette på en kort og enkel måte. Det må skapes en økt oppmerksomhet om selve variabelbegrepet og om hva formler og uttrykk kan tjene til.

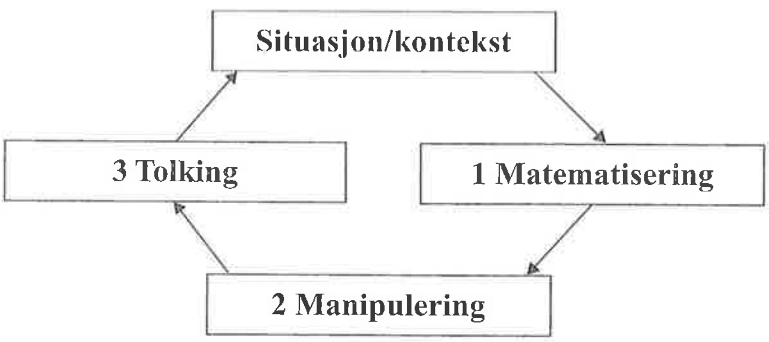
Temaet krever spesiell oppmerksomhet fordi det i noen grad bryter med tidligere tenkemåter. Den formelle siden ved algebraen må ha et grunnlag i arbeid med konkrete eksempler. Algebra blir et redskap til å løse problemer, et språk som kan lette tenkning og resonnement, og en kilde til å oppdage nye sammenhenger. (L97, side 156)

Læreplanen poengterer dermed hvor viktig det er at elevene har et godt grunnlag i tallregning for at de skal kunne lære algebra på en meningsfull måte. Det er likevel i denne sammenheng viktig å understreke at elevene vil møte mange nye begrepsmessige utfordringer i emnet, for eksempel det å oppfatte bokstaver som generaliserte tall. Videre viser en rekke undersøkelser at mange av de vanskene som elevene opplever i algebra, kan føres tilbake til sviktende kunnskaper i aritmetikk – tallregning. En mener det er viktig å legge opp til en undervisning som er mer innrettet mot at elevene skal få tid til å bygge opp de grunnleggende begrepene i dette fagemnet, enn det som har vært tilfellet tidligere. I veiledningsheftet presenteres den informasjon om elevenes forestillinger som de diagnostiske oppgavene i algebra gir oss. Videre diskuteres denne informasjonen, og til slutt gis det eksempler på undervisningsaktiviteter som kan avhjelpe vansker som de diagnostiske oppgavene har vist. Det legges spesielt vekt på:

- Sammenhengen mellom tall, tallregning og algebra.
- At elevene skal erfare at de kan representere variable størrelser ved bokstaver. Bokstaver som generaliserte tall.
- Å arbeide med mønster og system som utgangspunkt for generaliserte tall.
- At introduksjonen til emnet gjøres med konkrete eksempler for å belyse hva formler og algebraiske uttrykk kan brukes til.

1.2 Bruk av algebra

Å kunne matematikk består av en rekke ulike typer av kunnskaper. Ser en på det å kunne bruke matematikk i forsøk på å løse problemer, så omfatter det i de fleste tilfeller en syklus av matematisering, manipulering og tolkning, som en kan illustrere ved figur 1.



Figur 1: Ulike sider av bruk av matematikk

Matematisering (1) går på å se relevansen av en eller annen matematisk sammenheng i en konkret situasjon. Matematiseringen går ut på å uttrykke denne sammenhengen ved hjelp av matematiske kunnskaper, oftest ved bruk av matematiske symboler. Fase 2 på figuren innebærer å omforme de matematiske sammenhengene eller det symbolske uttrykket for å få fram nye aspekter ved den gitte situasjonen/konteksten. I fase 3 går det ut på å tolke de nye aspektene inn i den gitte situasjonen for dermed å få fram ny innsikt i den gitte situasjonen slik at en kan løse det problemet en hadde i utgangspunktet. Vi kan gjerne dele denne beskrivelsen inn i det en kaller «anvendt matematikk» og «ren matematikk», der manipulering er et viktig element i den rene matematikken.

Tradisjonelt syn på matematikkundervisning har vært at det er den rene matematikken, manipuleringen, som det trengs å fokusere mest på. Denne formen for matematikkunnskap baserer seg på at en har gode kunnskaper knyttet til en rekke matematiske konvensjoner og notasjoner. Denne typen kunnskaper kan en kalle *fakta.* I tillegg til dette må en også beherske *ferdigheter* knyttet til manipulering av symboler.

Den mest «effektive» læringen av disse formene for kunnskap foregår i hovedsak ved demonstrasjon og forklaring av en bestemt metode fulgt av øvelser med varierende tall og/eller andre symboler. Når en så senere i undervisningen møter situasjoner der problemstrukturen skiller seg fra standardtypen en har startet læringen av ferdighetene med, har en antatt at det trengs videre spesifikk undervisning knyttet til denne nye situasjonen. Et alternativ er å rette undervisningen mot aktiviteter som får elevene til å utvide og tilpasse sine egne basisideer til denne nye situasjonen.

Det er gjennomført omfattende forskning på undervisning og læring i matematikk. Fra slik forskning går det klart fram at de første oppfatningene av en matematisk sammenheng innen en gitt situasjon (kontekst), og den måten denne sammenhengen da ble uttrykt på i et matematisk språk, skaper like store vansker i læringsprosessen som de utfordringer elevene møter i den manipulative fasen. Det blir i forskningen understreket at disse vanskene med matematiseringen vanligvis ikke får nok oppmerksomhet i undervisningen. Det er dermed rimelig å hevde at den overdrevne fokuseringen på den rene matematikken har ført til at en har undervurdert problemene som elevene møter i sin begrepsdanning.

Det algebraiske språket har en dobbelt funksjon. Dels er det effektivt til å representere matematiseringen, og dels er det manipulativt, det vil si at språket er velegnet til å omforme gitte forbindelser for å få fram nye sammenhenger av de opprinnelige forbindelsene. På den måten blir algebra et redskap til å løse problemer. Her rører vi ved et viktig poeng ved mye av læringen i matematikk, nemlig forholdet mellom problemløsning og ferdigheter i form av manipulering av symboler. Det er *ikke* slik at den ene av disse to typene av kunnskap kommer av å øve på den andre, men det er slik at begrepskunnskapene støtter opp under ferdighetene, og at det å beherske ferdighetene støtter opp under utviklingen av begrepene. Ferdigheter i tallregning er nødvendig både for begrepsdanning i algebra og for den manipulering av symboler i algebra som følger etter matematiseringen. For mer omfattende diskusjon av forholdet mellom begreper og problemløsning på den ene siden og fakta, ferdigheter og algoritmer på den andre siden vises det til KIM-heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* (Brekke 1995). Følgende eksempel fra Bergsten (1997) illustrerer noe av det som er pekt på ovenfor.

Svein: *Gi meg ti klinkekuler, så har vi like mange!*
Åse: *Hvis du i stedet gir meg ti kuler, så vil jeg ha dobbelt så mange som deg.*

Hvor mange kuler hadde Åse og Svein?

Med utgangspunkt i figur 1 vil det være tre faser i forhold til matematiske sammenhenger:

Fase 1: *Matematisering*

La oss si at Åse har x og Svein y kuler. Oversettelsen gir oss da to ligninger:

$x - 10 = y + 10$ (a)

$x + 10 = 2 \cdot (y - 10)$ (b)

Fase 2: *Manipulering/omskriving av det algebraiske uttrykket*

(a) $x - 10 = y + 10$ gir $x = y + 20$

(b) $x + 10 = 2(y - 10)$ gir $x + 10 = 2y - 20$, og $x = 2y - 30$

Altså er $y + 20 = 2y - 30$. Dette gir $y + 50 = 2y$, og $y = 50$. Da er $x = 50 + 20$, dvs. $x = 70$.

Fase 3: *Tolkning av sammenhengen etter omformingen*

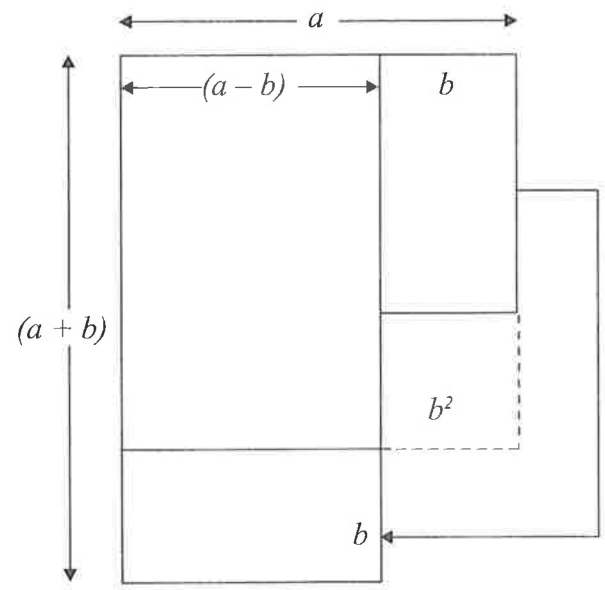
Hva sier dette om situasjonen? Svarene $x = 70$ og $y = 50$ tolkes slik at Åse hadde sytti klinkekuler, og at Svein hadde femti kuler.

1.3 Noen korte glimt fra algebraens historie

Noen av de kognitive prosessene som elevene må igjennom når de skal lære det som er pensum i algebra, finner en igjen som karakteristiske trekk i utviklingen av et algebraisk symbolsystem historisk sett. Både i den historiske utviklingen av algebra og i undervisningen i skolen opptrer algebraisk tenkning lenge før et opplevd behov for å innføre spesielle symboler. Her vil vi kort peke på tre stadier eller måter å bruke algebra på i den historiske utviklingen.

Det første stadiet kalles *retorisk algebra* og er karakterisert ved at en bruker vanlige språklige beskrivelser for å løse spesielle typer av problemer, og at en ikke bruker symboler eller spesielle tegn til å representere ukjente størrelser. Et eksempel: «*Produktet av to tall er uavhengig av rekkefølgen en betrakter dem i.*» Eller: «*Ethvert kvadrattall er summen av to etterfølgende trekanttall.*» (Nikomakhos ca. 60-120). Allerede i de første årene i grunnskolen arbeider elevene med sammenhenger mellom tall og uttrykk i forhold til sine erfaringer. Disse sammenhengene blir uttrykt gjennom elevenes dagligspråk, de arbeider altså med retorisk algebra. Det neste stadiet har fått navnet *synkopert algebra* og har sitt utspring hos Diofantos, som levde omkring år 250. Han introduserte forkortelser for «ukjente» størrelser. Denne typen symboler var i bruk fram til slutten av 1500-tallet. Våre elever lærer tidlig at summen av to oddetall blir et partall, og kan gjerne skrive det som: $o + o = p$. Det siste stadiet, *symbolsk algebra,* ble innført av Viète (1540-1603), som brukte bokstaver til å representere gitte, ukjente størrelser. Først på dette stadiet ble det mulig å angi ukjente og variable størrelser og å uttrykke generelle løsninger. Bruk av algebra som et redskap til å bevise tallmessige sammenhenger ble da mulig. Imidlertid introduserer dette avanserte symbolspråket problemer. Hva er forskjellen mellom $5 + 3 = 3 + 5$ og $a + b = b + a$? Den første likheten er et faktum, mens den andre er et mønster som er gyldig i et mangfold av situasjoner. Et annet viktig punkt i denne utviklingen var «oppfinnelsen» av likhetstegnet. I kapittel 1.5 kommer vi tilbake til ulike betydninger av likhetstegnet i matematikk.

Det er også viktig å peke på at geometrien spilte en viktig rolle på alle disse stadiene ved at geometriske betraktninger ble brukt til støtte for resonneringen. En kaller ofte denne måten å arbeide med ukjente størrelser og variabler på for *geometrisk algebra.* Fra oldtiden kjenner en til mange eksempler på hvordan en kan bruke geometri for illustrere eller begrunne bestemte sammenhenger. Ett eksempel som fortsatt er i bruk i undervisningen, kan være hvordan en utleder sammenhengen $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.



Figur 2: Geometrisk framstilling av tredje kvadratsetning.

1.4 Algebra og aritmetikk

Vygotskij uttrykker forholdet mellom algebra og aritmetikk slik: «*Written language is to oral language what algebra is to arithmetic.*» Som de historiske glimtene viser, kan algebraisk tenkning gjerne eksistere uavhengig av et symbolsystem. Sitatet fra L97 på side 3 peker på den nære forbindelsen mellom aritmetikk og algebra og på at elevenes erfaringer med det nye emnet må knyttes til de kunnskapene som de har utviklet i aritmetikken. Kunnskapene elevene har fått om egenskaper ved tallene og om regneoperasjonene, skal i det nye emnet generaliseres til kunnskaper i algebra. For at elevene skal kunne foreta slike generaliseringer, må de ha solide kunnskaper om egenskapene til både tall og regneoperasjoner. De må være fortrolige med å bruke store tall, brøker og desimaltall slik at de kan gjenkjenne en generell sammenheng eller se at en regel gjelder. Elevenes oppdagelser av mønster og system kan da brukes til å uttrykke generelle sammenhenger. For at en slik overgang skal kunne skje, må altså elevene både ha et solid tallbegrep og beherske ferdigheter i tallbehandling.

Selv om elevene har utviklet solide kunnskaper om tall og regneoperasjonene, vil de møte nye utfordringer i algebra. Ett nytt aspekt er altså ideen om generalisering, algebra som generalisert tallregning. Et uttrykk med bokstaver har for mange elever bare mening ved at de tenker seg bestemte tallverdier for bokstavene. De gjør også ofte feil fordi de tror at en bestemt bokstav må stå for en bestemt tallverdi. Slik kan det å tenke på bokstaver som tallverdier både hjelpe og hindre elevene i å lære algebra. Elevenes forestillinger knyttet til bokstavsymboler vil bli grundig diskutert i forhold til de diagnostiske oppgavene.

Notasjonene og konvensjonene er også noe ulike i algebra og aritmetikk. I tallet 57 refereres det til posisjonssystemet med en «usynlig» + mellom verdiene til de to symbolene (50 + 7), mens $5a$ ikke er bygd opp etter posisjonssystemet på samme måte – her skal verdien av a multipliseres med 5. Også fokus er ofte ulikt. I tallregning er en sterkt opptatt av svaret. En ser ikke på prosedyren for utregning som interessant i seg selv. Dette kan skape problemer i algebra, der en ofte avslutter med et uttrykk som inneholder en regneoperasjon, for eksempel $a + 7$. Elevene er ofte utilfredse med slike «åpne» svar fordi de inneholder en regneoperasjon.

Et annet avvik fra aritmetikken finner en når en skal bruke ligninger til å symbolisere relasjoner mellom størrelser i et problem som er gitt i vanlig tekst. I aritmetikk fokuseres det på de regneoperasjoner som kan brukes til å løse oppgaver. I algebra må en i større grad heller arbeide med å representere problemsituasjonen enn å løse oppgaven. Et eksempel: *Når en adderer 4 til tre ganger et tall, så får en svaret 40. Finn tallet.* Når en løser dette ved hjelp av aritmetikk, kan en for eksempel subtrahere 4 fra 40 og deretter dividere svaret på 3. I algebra vil en forsøke å representere en slik problemstilling ved en ligning: $3x + 4 = 40$. I algebra tenker en altså «i motsatt retning» i forhold til når en bruker aritmetikk.

Når elevene skal utvide de ferdigheter de behersker i tallregning, til å mestre algebra, trenger de å kunne:

- Snakke om tall uten å regne. Tallene kan være: store eller små, kjente tall eller tall som er kommet som et resultat av en måling. Et bestemt tall kan være ukjent av alle. En kan ha tall som kan endre seg, eller tall som er faste, osv.
- Gjøre rede for eller beskrive utregninger. Slike beskrivelser har som mål å gi oppskrifter som kan beskrives med ord. Målet er å gå fra slike beskrivelser til forkortinger og formler.
- Forandre på måten som tall og størrelser er beregnet på. Ved bruk av regnereglene for tallregning får en nye muligheter til å beregne det samme problemet. Elevene skal bli oppmerksomme på at de kan erstatte én beregning med en annen, eller én prosedyre med en annen, og vite at de vil få det samme resultatet. I algebra kaller en dette omforminger.

I del 2 av heftet presenteres ideer til aktiviteter som kan hjelpe elevene med denne overgangen.

1.5 Forståelse og bruk av likhetstegnet

Språket som brukes i tallregningen, fokuserer på svaret. I tallregning får elevene oppgaver som $8 + 7 =$, likhetstegnet står da for «*blir lik*». Tegnet blir altså et signal om at noe skal utføres. Slik fungerer det også på lommeregneren, tegnet er et signal om at noe skal regnes ut. Tegnet får på den måten også det en kan kalle en «venstre til høyre-effekt». Elevene møter også oppgaver av denne typen: *Eva hadde 75 kroner. Hun fikk 50 kroner av far. Hun kjøpte en CD til 98 kroner. Hvor mye hadde hun igjen?* Mange elever vil her skrive utregningen sin som: $75 + 50 = 125 - 98 = 27$. Også her tolker elevene likhetstegnet på samme måte som lommeregneren. Men i tallregning ligger det *også* et element av *likeverdighet* knyttet til likhetstegnet. $8 + 7$ er *likeverdig* med 15. Tallene eller uttrykkene på hver side av et likhetstegn skal ha samme *verdi*. Det er på denne måten en bruker tegnet i algebra. I arbeidet med oppgaver i algebra får elevene ofte åpne svar, for eksempel $a + 7$. Skal et slikt svar gi mening, må elevene være fortrolige med oppfatningen av likeverdighet, ellers vil likheter som $7x + 11 = 13x - 19$

vanskelig kunne få et meningsinnhold. En mener således at det er viktig at en tidlig retter søkelyset mot denne betydningen.

1.6 *Variabelbegrepet*

Variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er oppfatningen om at noe varierer – i motsetning til det å være konstant. Dette aspektet er velkjent for de fleste elever når variabelbegrepet introduseres i skolen, selv om de ikke kjenner *ordene* variabel og konstant. De har erfart at en melkesjokolade koster 8 kr, og at det de må betale, *varierer* med hvor mange sjokolader de kjøper.

Det andre aspektet er måten en bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk. I en rekke talluttrykk kan en størrelse endre seg, mens andre forblir konstante. I denne situasjonen erstatter matematikeren den variable størrelsen med et symbol, gjerne en bokstav, og kan således samle alle talluttrykkene i ett eneste uttrykk som inneholder en bokstav, den variable størrelsen. For eksempel kan $2 \cdot 1 + 1$, $2 \cdot 2 + 1$, $2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 4 + 1$ ... erstattes med $2x + 1$. En må regne med at elevene ikke har gjort erfaringer med dette aspektet når de begynner å arbeide med algebra i skolen.

1.7 Annen bruk av bokstaver i matematikk

Matematikk er et eget «språk», med egne regler for lesing og tolking. Dette kommer klart fram i forbindelse med bruk av *bokstaver* til å representere tall og andre størrelser i faget.

Fra regning med tall kjenner elevene til at $12m$ kan stå for 12 meter, eller om vi vil, 12 ganger så langt som 1 meter. I algebra kan m-en i $12m$ ha en dobbelt betydning. Betydningen avhenger av konteksten, m kan stå for 1 meter, altså en benevning. I andre sammenhenger kan m stå for et ukjent antall meter, *et variabelnavn.* I andre kontekster kan $12m$ for eksempel stå for en forkortet skrivemåte for 12 meloner. I det siste tilfellet står m som en referent til en bestemt type objekter. Det er *ikke* alltid enkelt å oversette mellom et dagligspråk og det algebraiske språket, og det skaper problemer for en del elever. For eksempel, i oppgaveeksempel 10, side 47, skulle elevene skrive en regnefortelling som passer til uttrykket $3a + 2a = 5a$. Mange elever svarte med en fortelling som refererer til et objekt, for eksempel at 3 aper og 2 aper blir 5 aper til sammen. Slike ideer forsterkes dersom en i undervisningen prøver å «konkretisere» innholdet i for eksempel sammentrekningsregler ved å vise til appelsiner og bananer i uttrykk som inneholder a-er og b-er.

I tillegg til det som det er pekt på ovenfor, kan vi kort nevne andre typer bruk av bokstaver i matematikken.

Funksjonssammenhenger

Disse er oftest gitt på en algebraisk form, for eksempel vil alle rette linjer kunne skrives på formen $y = ax + b$. Her brukes bokstavene på *tre* ulike måter.

- a og b er det en kaller parametere. De står for vilkårlige, men faste tall fra gang til gang. Setter en inn ulike verdier for a og b, får en forskjellige linjer.
- Både x og y er variable, men de har ulik mening i dette uttrykket. For den uavhengige

variabelen, x, kan en sette inn vilkårlige tall og dermed regne ut de tilsvarende verdiene til den *avhengige* variabelen, *y*.

Ligninger

I arbeidet med ligninger spiller bokstavene en *fjerde* rolle. Her er de er ikke lenger variabler, men *ukjente* tall som en skal finne verdien til.

- I ligninger med to ukjente skiller en ikke mellom de ukjente x og y.

Ulikheter

I uttrykket $2x + 1 \leq 7$ vil verdiene til x kunne stå for uendelig mange tall.

I geometri har en også et tilsvarende forhold. Trekanten *ABC* kan for eksempel, i noen tilfeller, referere til en *bestemt* trekant, med hjørner i bestemte fastlagte punkter, mens en i andre sammenhenger kan tenke på trekanten *ABC* som en *vilkårlig* trekant. Det er mange konvensjoner å holde styr på!

1.8 Elevers oppfatninger av bokstaver i matematikk

Elevene bygger sine oppfatninger om algebra på erfaringer fra tallregningen. De begrepene de har om tall og tallregning, må så utvides til også å omfatte algebraiske begreper. I første rekke gjelder dette i forhold til variabelbegrepet, bruk av bokstaver som generaliserte tall og en utvidet forståelse av likhetstegnet. Når begreper utvides, oppstår det ofte misoppfatninger knyttet til disse begrepene, først og fremst fordi en «overgeneraliserer» begrepet. En berører her et sentralt problem i matematikkundervisningen: å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke gjelder i alle nye situasjoner. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. En kaller ufullstendige tanker om et begrep for *misoppfatninger*. Se Brekke (1995) for en mer utførlig diskusjon av misoppfatninger.

Det er gjort en rekke studier av hvilke oppfatninger elever har av bokstaver i matematikken. Küchemann (1981) fant seks ulike måter som elevene tolket eller brukte de bokstavene på som inngikk i oppgavene. Elevene var fjortenåringer. Blant de diagnostiske oppgavene er det en rekke spørsmål av samme type som Küchemann brukte. Hans seks kategorier er:

Å finne verdien til en bokstav

Dette er en av tre kategorier der elevene ikke trenger å gjøre noen utregninger som involverer en spesifikk ukjent størrelse. De trenger her bare å finne verdien av bokstaven direkte fra det gitte uttrykket. *To eksempler kan være: Hva kan du si om a hvis* $a + 5 = 8$? og *Hva kan du si om u hvis* $u = v + 3$ *og* $v = 1$?

Bokstaver som ikke trengs brukes

To eksempler av oppgaver innenfor denne kategorien er: *Hvis* $a + b = 43$, *så er* $a + b + 2 = \ldots$ og *Hvis* $e + f = 8$, *så er* $e + f + g = \ldots$ En kan løse disse oppgavene uten å vite noe om verdiene til *a, b, e* eller *f*. Den siste oppgaven er vanskeligst, trolig først og fremst fordi «svaret» er $8 + g$ og ikke er et bestemt tall.

Bokstaver brukt som objekt

Det er en vanlig oppfatning at bokstaver i matematikken er forkortelser for objekter, for eksempel a for appelsiner og b for bananer. Som vi har pekt på ovenfor, *blir* bokstaver *også* brukt på denne måten i faget. I tillegg til denne typen kan en peke på to andre typer knyttet til oppgaven: *Skriv en matematikkfortelling som passer til uttrykket:* $3a + 2a = 5a$.

1 Bokstaven står for et **konkret objekt** (eller symbol for en enhet): «*Tre jenter ville starte en klubb. Så fant de ut at det var lite med bare tre jenter, så derfor spurte de to jenter til, sånn at de ble fem jenter.*»

2 $3a$ og $2a$ står for et **objekt i seg selv:** «*Lise har 3a og Knut har 2a, hvor mange har de da til sammen?*»

De tre kategoriene ovenfor beskriver alle måter å unngå generalisert aritmetikk på, ved ikke å bruke bokstaver som ukjente tallstørrelser. Dette gjelder ikke for neste kategori, selv om ideen med en spesifikk ukjent fortsatt er en primitiv oppfatning av hva bokstaver står for i algebra.

Bokstav som en spesifikk ukjent størrelse

Elevene kan betrakte bokstaven som et spesifikt ukjent tall og utføre regneoperasjoner på dette. Når en oppfatter g som et spesifikt ukjent tall i oppgaven ovenfor, vil dette uttrykket ha en mening. Svaret vil være 8 pluss den spesifikke verdien til g.

Bokstav som et generelt tall

I motsetning til når en bruker en bokstav til å representere en spesifikk, men ukjent størrelse, så handler det her om å bruke den bokstaven til å representere et generelt tall. Bokstaven kan stå for *flere* ulike verdier, i mange tilfeller uendelig mange verdier. For eksempel: *Hva kan du si om c hvis* $c + d = 10$ *og c er mindre enn d?*

Bokstav som en variabel

Variabler er et redskap til å uttrykke generaliseringer matematisk. Hvis elevene har arbeidet med å uttrykke slike generaliseringer med ord før de blir bedt om å formalisere dem ved bruk av symboler, vil en trolig hjelpe elevene til å få forståelse av dette begrepet. Et eksempel på en oppgave til å undersøke om en elev behersker dette, kan være: *Hva er størst av* $2n$ *og* $n + 2$*? Forklar hvordan du tenker.*

Denne korte gjennomgangen av noen fundamentale ideer om en begynnende symbolisering i algebra viser at variabelbegrepet og bruken av bokstaver til å representere ulike aspekter ved dette begrepet er mangslungne. En legger ulike betydninger i bokstaver og bokstavuttrykk i ulike sammenhenger. De variablene som bokstavene representerer, har to spesielt nyttige anvendelser:

- De gjør det enkelt å formulere matematiske sammenhenger.
- Løsningen til et problem kan uttrykkes ved variable størrelser slik at resultatet gjelder for mange enkelttilfeller uten at en trenger nye utregninger. En kan ganske enkelt sette inn forskjellige verdier for variablene.

En fyldigere behandling av punktene vi har pekt på, finnes i Breiteig & Venheim (1998).

2 Innledning til algebra

Kapittel 2 handler om ideer som elever har i forhold til den innledende delen av algebra i grunnskolen. Når elevene begynner å arbeide med algebra knyttet til symboler, er de kommet til en utvidelse av begrepene som de har dannet i aritmetikken. De skal utvide disse kunnskapene og ferdighetene, samtidig som de blir stilt overfor en økende grad av symbolisering. I dette kapitlet vil vi ta for oss de diagnostiske oppgavene som retter seg mot denne innledningsfasen til algebra som et nytt emneområde i matematikken.

Som pekt på i kapittel 1 kan en del av elevenes problemer i algebra spores tilbake til usikkerhet i tallregning. Det er derfor viktig at elevene får arbeide grundig med oppgaver som styrker deres aritmetiske kunnskaper, samtidig som sentrale begreper i algebra blir introdusert. Målet er å gi elevene et grunnlag for å regne med symboler. For eksempel har undersøkelser vist at om elevene bare får oppgaver av typen $3 + \square = 7$, $6 - 4 = \square$ og $\square + 5 = 11$, opplever de vanskeligheter når oppgaver av typen $8 = \square + 3$, $\square = 5 + 9$ og $31 = \square - 17$ skal løses, fordi det i de siste oppgavene ikke står et «svar» til høyre for likhetstegnet.

Det er understreket i kapittel 1 at det også er viktig å arbeide grundig med likhetstegnets betydning i denne fasen. Hvis elevene har sviktende erfaringer på disse områdene, vil det skape ekstra vansker når de begynner å bruke bokstaver som symboler i matematikk. Slike aktiviteter sammen med arbeid rettet mot en begynnende generalisering er viktige for å forberede elevene på sentrale algebraiske ideer. Dette blir av noen kalt *prealgebra.*

2.1 Prioritet mellom regneoperasjoner

I algebra vil elevene fort erfare at det er viktig å sette parenteser, i uttrykk som $5 + 3(x + 2)$ gir parentesen signal om at en skal multiplisere $x + 2$ med 3 og legge dette til 5. En skal *ikke* først addere 5 og 3 for så å multiplisere 8 med $(x + 2)$. Denne konvensjonen, som henger sammen med at multiplikasjon er gjentatt addisjon av like store addender, gjelder også for regning med tall: $5 + 3 \cdot 2$ er lik 11 (legger sammen 5 og 6) og ikke 16 (multipliserer 8 med 2). En sier at multiplikasjon er prioritert foran addisjon i sammensatte uttrykk. I moderne lommeregnere er slike konvensjoner innbygd.

Konvensjonene om prioritering mellom regneartene er viktige i aritmetikk, men det er ikke sikkert at alle elever har gjort bevisste erfaringer med dette, siden det er lagt relativt liten vekt på dette i oppgavene i lærebøkene. Dette er ett eksempel på hvordan sviktende aritmetiske kunnskaper kan skape ekstra problemer i algebra, fordi det i algebra blir mye vanskeligere å oppdage grunnen til at en har gjort en slik feil enn i ren tallregning.

Oppgave 1
Skriv rett tall i rutene

a) $3 \cdot \square = 21$ **b)** $\square \cdot 2 + 4 = 12$

c) $3 + 2 \cdot \square = 15$ **d)** $25 - 2 \cdot \square = 17$

Oppgaveeksempel 1: Prioritering av regneoperasjoner

Hovedhensikten med oppgave 1 er å undersøke hvordan elever tenker når de må bruke slike konvensjoner knyttet til multiplikasjon. I spørsmålene i denne oppgaven er det ukjente tallet i likhetene representert ved en rute. Tabell 1 viser at å bruke en rute til å representere et bestemt ukjent tall er velkjent for de aller fleste elevene på de aktuelle trinnene.

Oppgave 1a	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	1	1	0
7 (Riktig svar)	97	98	98

Tabell 1: Oppgave 1a. Svarfordeling i prosent

I oppgave 1b får en del elever problemer med å avgjøre om addisjon skal utføres før multiplikasjon eller omvendt. Her er feilsvaret «2» av spesiell interesse. Det er bemerkelsesverdig hvor mange elever som gir dette svaret i 8. og 10. klasse. Mange elever utfører trolig først addisjonen $2 + 4 = 6$. Deretter multipliserer de svaret 6 med 2 for å få svaret 12. Denne oppgaven er laget slik at den kan «avsløre» de elever som ikke kjenner til denne konvensjonen i regning med tall. Oppgaven er derfor en god diagnostisk oppgave, en oppgave som gir rik informasjon om elevtenkning. Se Brekke (1995) for videre diskusjon om diagnostiske oppgaver. En kunne ha erstattet den tomme ruten med en bokstav slik at oppgaven hadde lignet mer på en algebraoppgave, $a \cdot 2 + 4 = 12$, men da er det ikke sikkert at en kunne ha trukket den samme konklusjonen om prioritering på grunn av et mer ukjent format på oppgaven.

Feilsvarene 6 og 8 kan komme av misforståelser av symboliseringen i oppgaven, for eksempel at $2 + 4 = 6$ og dette «svaret» skal skrives i ruten, eller «å multiplisere 2 med 4 gir svaret 8» og svaret 8 skal stå i den tomme ruten.

Oppgave 1b	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	4	2	1
4 (Riktig svar)	61	77	88
2	22	16	9
3	4	2	–
6	5	2	–
8	3	2	1

Tabell 2: Oppgave 1b. Svarfordeling i prosent

Kieran (1984) har i et undervisningsforsøk studert overgangen fra «denne tomme rute» til å sette inn bokstaver for den. I sine undersøkelser startet hun med en aritmetisk likhet, for eksempel $7 \cdot 2 - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Så skjulte hun et av tallene først med en finger og deretter med en rute, slik: $7 \cdot \square - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Til slutt erstattet hun den tomme ruten med en bokstav, slik: $7 \cdot a - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Dette ble da en aritmetisk likhet med et skjult tall. Bokstaven som skjulte tallet, ble kalt en ukjent. På denne måten kunne elevenes algebra forankres i deres aritmetiske kunnskaper.

Hovedforskjellen mellom oppgavene 1b og 1c går på at i oppgave 1b er multiplikasjon den første operasjonen i uttrykket sett fra venstre, mens multiplikasjonen i oppgave 1c kommer «inne i uttrykket». Det vil si at elevene trolig i høyere grad blir ledet til å svare riktig på oppgave 1b, siden de er vant med å regne fra venstre mot høyre i oppstilte regneuttrykk.

I oppgave 1c ser en enda klarere de problemstillingene som ble diskutert i forbindelse med tabell 2. Det er trolig den samme typen feiltenkning som ligger til grunn i 1c. Elevene utfører addisjonen $3 + 2 = 5$ og deretter multiplikasjonen $5 \cdot 3 = 15$. Legg merke til at det er flere som gjør denne feilen i 8. klasse enn i 6. klasse. En ser også at problemet vedvarer siden dette feilsvaret ikke går noe særlig ned i 10. klasse. Dette viser at det er et stort problem at elever ikke behersker konvensjonene for prioritering mellom regnearter, og det skaper, som det ble påpekt tidligere, enda større problemer når en innfører variabler i algebra, siden det da er vanskeligere å oppdage at de har kommet fram til et galt resultat.

Oppgave 1c	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	4	4	2
6 (Riktig svar)	13	17	33
3	67	73	63
5	8	3	1
10	5	2	0

Tabell 3: Oppgave 1c. Svarfordeling i prosent

Oppgavene 1b og 1c er to «forholdsvis» like oppgaver med én type feilsvar som går igjen i begge oppgavene. Når en sammenligner elevenes svar på disse to spørsmålene, finner en at det bare er 12 %, 15 % og 31 % av elevene i henholdsvis 6., 8. og 10. klasse som svarer riktig på begge oppgavene. Hele 39 %, 55 % og 54 % av de elever på de tre klassetrinnene som har svart riktig på oppgave 1b, gir svaret «3» på oppgave 1c. Nesten alle elevene som svarer «2» på oppgave 1b, gir også feilsvaret «3» på 1c, henholdsvis 95 %, 91 % og 83 % på de tre trinnene. Det er altså her tale om en konsekvent løsningsstrategi blant elevene. Denne strategien er ekstra hyppig i 1c, og det er rimelig å tro at det skyldes vanen med å utføre operasjonene i den rekkefølge de kommer i regneuttrykket, fra venstre mot høyre. Dette gir riktig svar på oppgave 1b, men ikke på 1c.

Det at elever ikke behersker prioriteringsreglene for regneoperasjoner, er trolig ikke et problem fordi dette er vanskelig lærestoff, men skyldes heller at det ikke har blitt satt tilstrekkelig søkelys på grunnlaget for å forstå slike konvensjoner i undervisningen. Aktivitet 4, side 76–78, kan være en måte å få elevene til å vinne erfaringer med dette.

Dette er ett eksempel på hvordan sviktende kunnskaper i aritmetikk kan skape ekstra problemer for elevene når de skal lære algebra. Det blir vanskeligere for dem å «oppdage» en slik feiltenkning, spesielt fordi et algebraisk uttrykk er mer abstrakt enn et talluttrykk.

Oppgave 1d	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	59	62	35
4 (Riktig svar)	13	18	47
0,74 eller 0,75	0	3	5
6 eller –6	4	2	2
8	4	1	1
Andre svar	20	14	10

Tabell 4: Oppgave 1d. Svarfordeling i prosent

Den ytre strukturen i oppgavene 1c og 1d er omtrent den samme. Forskjellen er at i oppgave 1d får en ikke et helt tall som svar dersom en bruker den strategien som var så utbredt i oppgave 1c. Elevene ville da komme fram til uttrykket $23 \cdot \square = 17$, noe som trolig er en viktig grunn til at så mange elever på de to laveste trinnene ikke har svart på 1d. Sammenligner en med 1c, legger en merke til at det er omtrent like mange som gir et korrekt svar på denne oppgaven i 6. og 8. klasse, mens flere i 10. klasse klarer oppgave 1d enn 1c. Det er dermed ikke sagt at det er de samme elevene som svarer riktig på begge oppgavene. Det var henholdsvis 24 %, 43 % og 73 % av de elevene på de tre trinnene som svarte riktig på oppgave 1c, som også kom fram til et riktig svar på 1d. Dette betyr at måten å svare på er mer konsistent i 10. klasse enn på lavere trinn.

At løsningsfrekvensen øker fra oppgave 1c til 1d (33 % til 47 %) i 10. klasse, kan skyldes at hvis elever velger å utføre regneoperasjonene fra venstre mot høyre i oppgaven, vil de oppdage at svaret på oppgave 1d ikke blir et helt tall. Det kan da lede dem til å endre strategi, de prøver på nytt og tenker kanskje at 2 må multipliseres med 4 for at svaret skal bli 17 på denne oppgaven.

Sammenligner en elevenes svar på disse deloppgavene, finner en at svarene er mer konsistente jo eldre elevene blir. Dette gjelder både for feilsvar og riktige svar. Dette indikerer at misoppfatninger som elevene har, blir befestet med alderen hvis en ikke tar opp slike ufullstendige oppfatninger i undervisningen.

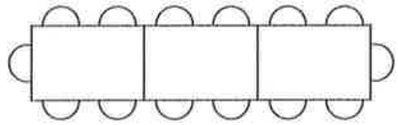
2.2 Tallmønster

I L97 står det at elevene skal

- undersøke tall og utforske tallmønstre, ...oppdage og beskrive egenskaper (6. klasse)
- gjøre erfaringer med spesielle tall, tallforhold og tallmønstre (9. klasse)

Elevene skal bli kjent med tallene, med deres egenskaper og med noen mønstre som tall kan danne i ulike situasjoner. I kapittel 1 trakk vi fram arbeid som kan gjøres for å binde algebra nærmere til aritmetikk gjennom å arbeide med tallmønstre. Denne typen arbeid gir elevene muligheter til å utforske, finne sammenhenger, gi begrunnelser for hvordan disse kommer fram, og til å generalisere slike sammenhenger. Oppgavene 2 og 6 undersøker elevenes strategier når de arbeider med tallmønstre med utgangspunkt i geometriske figurer.

Oppgave 2
Et langt bord er satt sammen av småbord. Rundt det lange bordet er det satt stoler, slik:



a) **Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 4 småbord? ....**

b) **Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 25 småbord? ....**

c) **Forklar hvordan du kom fram til svaret i b: ....**

Oppgaveeksempel 2: Å oppdage et mønster

Hensikten med oppgavene 2a og 2b er å undersøke hvordan elevene bruker mønsteret som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi. Antallet av småbord i oppgave 2b er valgt så stort at elevene ikke uten videre kan løse oppgaven ved hjelp av en tegning der de teller alle stolene. I oppgave 2c undersøker en hvordan de beskriver dette mønsteret ved hjelp av ord.

Oppgave 2a	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	1	1	1
18 (Riktig svar)	67	75	81
16	2	2	2
17 eller 19	13	5	3
20	5	2	2
24	5	7	7
Andre svar	6	8	3

Tabell 5: Oppgave 2a. Svarfordeling i prosent

Noen av feilsvarene, som 17 eller 19, tyder på at elevene prøver å telle antallet, gjerne ved å bruke en tegning, og at de har gjort en tellefeil i denne prosessen. Dette gjelder i første rekke elever i 6. klasse. Det kan selvsagt også være en del av elevene som får rett svar, som også bruker en tellestrategi på spørsmål a. Svarene 20 og 24 tyder på at elevene velger en ukorrekt regnestrategi, som: «5 ved hvert bord» eller «6 ved hvert bord».

Oppgave 2b	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	9	6	6
102 (Riktig svar)	39	48	67
100	6	5	2
110	2	4	2
125	7	3	2
150	7	9	11
Andre svar	30	25	10

Tabell 6: Oppgave 2b. Svarfordeling i prosent

I oppgave 2b har vi valgt 25 bord for å få informasjon om hvordan elevene angriper problemet når antallet blir så stort at telling blir en lite effektiv løsningsstrategi for å bestemme antall stoler. Av elevsvarene ser en at en relativt stor andel av elevene, spesielt i 6. klasse, ikke tar i bruk multiplikasjon i denne oppgaven. De tegner alle de 25 bordene og teller deretter alle stolene.

Svarene 100, 125 og 150 representerer ulik forståelse av oppbygning av mønsteret, de tenker trolig:

- Fire stoler ved hvert bord, med svaret 100.
- Fem stoler ved hvert bord, med svaret 125.
- Seks stoler ved hvert bord, med svaret 150.

En mulig grunn til dette er at oppgaveteksten kan tolkes på to forskjellige måter:

- det er 25 separate småbord, og da kan det være 6 stoler ved hvert bord
- eller som teksten sier - «Et langt bord er satt sammen av småbord. … Hvor mange stoler blir det plass til om vi har 25 småbord?»

7 % av elevene i både 8. og 10. klasse svarte «24» på oppgave 2a. Av disse elevene var det henholdsvis 79 % og 81 % som svarte «150» i 2b. Dette tyder på at disse elevene bruker den samme strategien på begge spørsmålene.

Oppgave 2c	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	14	10	10
Riktig forklaring ($25 \cdot 4 + 2$)	28	40	57
«Tegnet og regnet»	9	4	1
$23 \cdot 4 + 10$	2	3	8
Andre riktige forklaringer (også med galt tallsvar)	3	3	3
Forklaringer til $25 \cdot 4$, 100 eller lignende	6	4	1
Forklaringer til $25 \cdot 5$, 125 eller lignende	7	5	2
Forklaringer til $25 \cdot 6$, 150 eller lignende	7	10	11
Forklaringer til 110	1	3	1
Andre svar	23	19	7

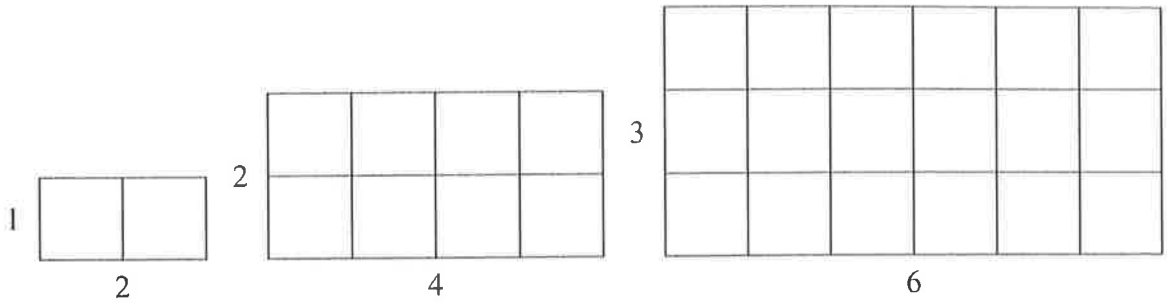
Tabell 7: Oppgave 2c. Svarfordeling i prosent

Vi legger merke til at de elevene som teller og regner, kommer fra de laveste trinnene. Vi ser også at det er stor variasjon i forklaringsmåtene. Dette indikerer at det ikke er lett for elevene å sette ord på systemet i et tallmønster. I kapittel 1 har vi pekt på at tallmønstre kan brukes for å skape forbindelse mellom tallregning og algebra. I den forbindelse er det avgjørende å kunne sette ord på de mønstre en oppdager, og å knytte dette til aritmetiske uttrykk. Svarene på denne oppgaven tyder på at dette må vektlegges i undervisningen. I del 2 vil vi presentere eksempler på aktiviteter som retter seg mot dette.

2.3 Mønstre, symboler og generaliseringer

I kapittel 1 pekte vi på problemer elevene møter når de skal begynne å bruke bokstaver eller andre symboler til å representere størrelser som varierer. Oppgave 6 er laget for å studere hvilke problemer elevene møter når de blir bedt om å generalisere med utgangspunkt i et tallmønster som de har arbeidet med.

Oppgave 6
Her er tre figurer som er bygd opp etter samme mønster.



a) Hvor mange ruter trengs det for å lage neste figur i mønsteret? ....

Tabellen nedenfor er laget ved hjelp av figurene ovenfor.

b) Fyll ut resten av tabellen:

Ruter langs den korteste siden	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ruter langs den lengste siden	2	4	6						
Ruter til sammen	2	8	18						

c) Hvor mange ruter trengs det for å lage en figur hvor det er 20 ruter langs den korteste siden?

d) Hvor mange ruter trengs det for å lage en figur hvor det er *k* ruter langs den korteste siden?

e) Forklar hvordan du kom fram til dette.

Oppgaveeksempel 3: Hvor mange ruter trengs det for å lage figuren?

Oppgave 6 ligner på oppgave 2 i de første delspørsmålene. Elevene skal utvide et geometrisk mønster, telle eller regne antall ruter, registrere svarene i en tabell for så til slutt å lete etter tallmønster i tabellen. Den viktigste faglige forskjellen mellom de to oppgavene er at en i spørsmål d i denne oppgaven undersøker i hvilken grad elevene klarer å generalisere til et vilkårlig tall *k* fra mønsteret i tabellen, og hvordan de uttrykker denne generaliseringen.

Oppgave 6a	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	11	6	4
32 (Riktig svar)	36	52	70
8 og 4, 4 på korte og 8 på lange, eller lignende	8	8	8
24	8	6	3
28	5	3	1
Andre svar	27	19	13

Tabell 8: Oppgave 6a. Svarfordeling i prosent

Relativt mange elever svarer riktig på oppgave 6a. Av elevenes arbeider ser en at en del elever har tegnet og talt rutene i neste figur. De har ikke brukt multiplikasjon.

Noen elever gir korrekt antall ruter langs de to sidene i neste rektangel (8 og 4 eller 4 på korte og 8 på lange, og lignende). De har således oppdaget det geometriske mønsteret, men kobler ikke dette til spørsmålet i oppgaven.

Svaret 28 kan muligens komme av at de tror at antallet nye ruter øker med 10 hver gang siden det økte fra 8 til 18, mens svaret 24 kan være usikkerhet i multiplikasjonstabellen.

Oppgave 6b	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	13	7	4
Riktig utfylt tabell	21	42	68
Kortside multiplisert med langside ut fra tallene i tabellen.	12	15	11
Bare tallene for langsiden er utfylt	29	18	9
Rett langside, leter etter mønster blant samlet antall ruter	22	15	6
Andre svar	3	4	2

Tabell 9: Oppgave 6b. Svarfordeling i prosent

På samme måte som i oppgave 2 er antallet av ruter langs kortsiden valgt så stort at elevene ikke uten videre kan løse oppgaven ved tegning og telling. En legger merke til at i overkant av 10 % av elevene vet at de skal multiplisere antallet ruter langs kortsiden med antallet langs langsiden, men at de gjør en eller annen regnefeil. En slik regnefeil vil også påvirke deres svar i 6c og d. Vi ser også at i tillegg til de elevene som får riktig svar på oppgaven, klarer en del elever å se mønsteret i tallene for langsiden, men utnytter ikke dette i en multiplikasjon. At elever klarer å fortsette et mønster i en tabell, men har problemer med å danne en regneregel eller et algebraisk uttrykk med utgangspunkt i mønsteret, er et fenomen som er velkjent fra en rekke studier. Det er derfor viktig at dette får en sentral plass når en bruker mønster og system som utgangspunkt for å danne algebraiske sammenhenger. Når vi ser på elevenes besvarelser, legger vi merke til at mange på de to laveste trinnene prøver å bygge et mønster med utgangspunkt i tallene 2, 8 og 18 og utnytter altså ikke den informasjon som de kan hente «på tvers» i tabellen. Eksempler på undervisningsaktiviteter og videre diskusjon rundt dette problemet finner en i kapittel 4.3, side 73–76.

Oppgave 6c	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	35	22	14
800 (Riktig svar)	18	33	59
20	4	4	2
40	7	7	4
80	5	5	2
120	3	1	1
200	4	4	3
Andre svar	26	24	16

Tabell 10: Oppgave 6c. Svarfordeling i prosent

Tabell 10 viser at det nesten er like mange elever som svarer riktig på oppgave 6c, som har klart å fylle ut tabellen riktig i oppgave 6b. Når en ser på hva hver enkelt elev har svart, viser det seg at henholdsvis 56 %, 66 % og 86 % av elevene på de tre klassetrinnene som har svart riktig på oppgave 6b, *også* har svart riktig på 6c. Dette viser at det ikke har vært en stor utfordring for disse å gå fra 9 ruter til 20 ruter langs kortsiden i tabellen. Disse elevene har basert seg på regning eller mønstre i tallene, og ikke på telling.

De andre svarene som går igjen, kan karakteriseres som ulike misforståelser av oppgaveteksten. En får svaret 200 hvis en tenker seg 20 ruter langs langsiden og bruker mønsteret i figuren, mens svaret 20 trolig er antall ruter langs kortsiden og 40 er antall ruter langs langsiden i den figuren en spør etter. Når en sammenligner hver enkelt elevs svar på oppgavene 2b og 6c, finner en at blant de elevene som svarte riktig på oppgave 2b, var det henholdsvis 55 %, 59 % og 75 % som også gav et riktig svar på oppgave 6c. Dette viser at flertallet av disse elevene har klart å videreføre systemet, representert ved en figur til en mer kompleks situasjon der de ikke kan basere seg på telling. De har oppdaget en sammenheng mellom tallene.

I oppgave 6d, som bare ble gitt i 8. og 10. klasse, fører en denne sammenhengen et skritt videre mot en generalisering til et vilkårlig tall med utgangspunkt i tabellen. Her er vi interessert i å få innblikk i hvilke problemer elevene møter med generaliseringen, og ikke minst hvilke utfordringer de møter når de skal uttrykke dette ved hjelp av en variabel.

Oppgave 6d (8. og 10. klasse)	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	59	41
$2k^2$, $2k \cdot k$, $k \cdot (k + k)$, og lignende (Riktig svar)	1	20
Betrakter langsiden: $2k$, $k + k$, k^2, $k^2 = 2k$, og lignende	4	8
k^2, $k \cdot k$, og lignende	2	2
«Summerer de to sidene»: $3k$, $2k + k$, $k \cdot 2k = 3k$, og lignende	1	4
Ukorrekt potensnotasjon: k^3, $k \cdot k^2$, og lignende	0	3
«k multiplisert med langsiden», $k \cdot x$, $k \cdot 1$, og lignende	0	5
Setter inn verdien 11 for k	3	1
k, x og lignende	7	9

Tabell 11: Oppgave 6d for 8. og 10. klasse. Svarfordeling i prosent

Vi ser at denne oppgaven er vanskelig for storparten av elevene. Det viktigste er at oppgaven, i diagnostisk sammenheng, likevel gir oss nyttig informasjon om typisk elevtenkning knyttet til bruk av bokstaver som variable tallstørrelser.

Noen av svarene dreier seg trolig om antall ruter langs langsiden, for eksempel $2k$, $k + k$, og k^2, som alle er korrekt bruk av notasjoner for dette problemet. Svar av typen k^2, $k \cdot k$, $2k = k^2$ hører sannsynligvis hjemme i samme kategori som $2k$. Det spesielt interessante er at disse elevene tar i bruk potensnotasjon. Dette er typisk for de eldste elevene. Kan det være at de gjerne vil bruke noe som for dem nylig har vært tema i undervisningen? Dette er trolig et mer grunnleggende problem i matematikkundervisningen enn å ikke kunne skille mellom for eksempel $2k$ og k^2. Det illustrerer at en del konvensjoner eller notasjoner i faget er «tomme for innhold» for mange elever.

I gjennomgangen av andre oppgaver vil vi se at det ikke er uvanlig at elevene tildeler en variabel størrelse en verdi ut fra dens plass i alfabetet. Således gis a verdi 1, b settes lik 2, og k, som i dette tilfellet, gis verdien 11. En del elever tildeler også variabler verdien 1, gjerne ut fra denne tankegangen: «*Når en bokstav kan stå for hvilken som helst verdi, så hvorfor ikke for 1.*»

I kapittel 1 pekte vi på hvordan arbeid med tallmønster kan være et godt utgangspunkt for å knytte algebra og tallregning nærmere sammen. Elevenes utforskninger danner grunnlag for at de finner sammenhenger, generaliserer dem og uttrykker sammenhengene med sitt eget språk og deretter ved bruk av variabler. Elevenes svar på oppgave 6d viser at det siste skrittet i denne prosessen ikke er enkelt for elevene. Vanskene er nok knyttet både til ideen om å bruke en bokstav til å representere et vilkårlig tall og til hvilke notasjoner en bruker. Bruken av disse notasjonene har elevene liten erfaring med utenfor skolen. I del 2 av veiledningsheftet gir vi noen eksempler på undervisningsaktiviteter som kan være med og bygge opp en slik erfaring.

I oppgave 6 er det også spurt etter forklaringer, i 6. klasse har en spurt hvordan eleven kom fram til totalt antall ruter når korteste side hadde 20 ruter, og i 8. og 10. klasse når denne siden hadde k ruter. Dette gjør at en ikke direkte kan sammenligne dette spørsmålet for 6. klasse med de to andre trinnene. I tabell 12 og tabell 13 er noen typer av forklaringer klassifisert. Blant sjetteklassingene er det mange av de elevene som har kommet fram til riktig svar i oppgave d (c i 6. klasse), som også greier å sette ord på hvordan de har kommet fram til svaret. Denne typen spørsmål har tradisjonelt ikke vært mye brukt i skolen. Forholdet mellom å gi et riktig svar og å kunne sette ord på dette peker på nødvendigheten av å vektlegge både muntlig og skriftlig kommunikasjon ved innlæring av algebra.

Oppgave 6d (6. klasse)	**6. klasse**
Ubesvart	40
Riktig forklaring	12
Riktig forklaring. Feil utført utregning	4
Ufullstendig eller uklar forklaring	9
Forklarer hvordan en finner den lengste siden	4
Addisjonsforklaringer	3
Andre svar	27

Tabell 12: Oppgave 6d for 6. klasse. Svarfordeling i prosent

Oppgave 6e (8. og 10. klasse)	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	66	57
Riktig forklaring	2	13
Riktig forklaring. Feilaktig regneoperasjon	1	2
Riktig forklaring ut fra tall (f.eks. $11 \cdot 22$)	1	2
Manglende eller ufullstendig forklaring	3	3
Forklarer hvordan man finner den lengste siden	4	16
Andre svar	21	7

Tabell 13: Oppgave 6e for 8. og 10. klasse. Svarfordeling i prosent

Legg merke til at det er svært mange elever som ikke har besvart dette spørsmålet, spesielt for 8. og 10. klasse. Dette kan ha sin grunn i at de er usikre på bruken av bokstaven k i denne forbindelsen. Resultatene fra denne oppgaven viser at en må legge vekt på å uttrykke slike forklaringer med bruk av dagligspråk før en går over til å bruke et kompakt algebraisk språk. I del 2 av dette heftet vil vi gi eksempler på undervisningsaktiviteter som sikter mot dette.

3 Symboler og symbolbruk

I kapittel 1 presenterte vi kort forskjellige måter en bruker bokstaver på i matematikk. I dette kapitlet vil vi diskutere en rekke elevoppfatninger knyttet til de temaene som de ulike oppgavene i undersøkelsen kan gi oss informasjon om.

3.1 Sammenhenger der verdiene til de variable størrelser er uvesentlige

En kan løse oppgave 4a uten å vite hvilken verdi de to bokstavene representerer. Den kan lett løses hvis elevenes oppmerksomhet er rettet mot at svaret må bli 2 større enn 43.

Oppgave 4

a)	**Hvis**	$a + b = 43$	**så blir**	$a + b + 2 =$	....
b)	**Hvis**	$e + f = 8$	**så blir**	$e + f + g =$	....

Oppgaveeksempel 4: Svar uavhengig av verdiene til de variable størrelsene

Løsningsfrekvensen er høy. Storparten av elevene oppfatter altså a + b som ett tall. Dette samsvarer bra med en stor engelsk undersøkelse (Küchemann 1981) av tretten- og fjortenåringer, der henholdsvis 92 % og 97 % fikk riktig svar på denne oppgaven. Det er likevel interessant å dvele litt ved noen av feilsvarene på denne oppgaven siden en finner disse typene feil igjen i andre oppgaver som en vil diskutere senere.

Oppgave 4a	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	10	10	6
45 (Riktig svar)	84	84	90
2*ab*, *ab*2 eller lignende, «Legger inntil hverandre»	1	0	1
4	1	1	0
86	0	1	1
Andre tallsvar enn 4 og 86	3	3	2

Tabell 14: Oppgave 4a. Svarfordeling i prosent

I flere undersøkelser av elevers forståelse av bruk av bokstaver til å representere ukjente eller variable har en funnet at når det er tale om addisjon, legger elevene symbolene – og i noen tilfeller også tallene – «inntil» hverandre. De bruker på en måte addisjon i betydningen «legge sammen» eller «å samle». Det er interessant at dette ikke skjer når bare rene tallsymboler inngår. Som en ser, er det ikke mange som gjør dette i a-oppgaven, men tabell 15 viser at denne feiltenkningen er utbredt i oppgave 4b, og at antallet **øker** med alderen. En grunn til det kan være at korrekte svar her *må* inneholde *g*.

Svaret 4 i oppgave a kan ha framkommet ved at eleven setter verdien 1 for de variable størrelsene, trolig ut fra den oppfatning at når en bokstav kan stå for hvilken som helst verdi, så kan denne verdien gjerne være 1. Svaret 86 *kan* en ha fått ved $43 \cdot 2$.

Oppgave 4b	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	27	23	13
$8 + g$ eller $g + 8$ (Riktig svar)	4	8	38
$8g$, $8 \cdot g$ eller lignende. «Legger inntil hverandre»	4	11	27
9	21	16	3
10	7	7	2
12	18	16	7
15	5	3	1
16	2	3	2
Andre tallsvar	7	9	3

Tabell 15: Oppgave 4b. Svarfordeling i prosent

Denne oppgaven kan løses ved sammenligning, på samme måte som a-oppgaven, men selv om en kan se bort fra hvilke verdier e og f kan ha, så må en gi svaret ved å bruke g. Problemet for mange elever vil da være at en må gi et svar som inneholder en addisjon. Dette vegrer elevene seg for siden de ikke vant til dette fra aritmetikken, der svaret alltid er ett bestemt tall. Noen elever løser dette ved å gi g en bestemt verdi. Av tabell 15 ser vi at dette er en ganske vanlig reaksjon fra elevene på alle tre trinn, og at den forekommer mye hyppigere enn i oppgave 4a.

Svaret 9 i oppgave 4b indikerer også den oppfatning at verdien til den ukjente størrelsen gjerne kan være 1. Legg merke til det store antallet som gir dette svaret på de to laveste klassetrinnene.

Vi legger også merke til at svaret 12 forekommer ofte på alle de tre klassetrinnene. Ved intervjuer har en funnet at elever forsøker å gi den samme tallverdi til alle variabler, i dette tilfellet 4, fordi $e + f = 8$, og derfor må $e + f + g$ til sammen bli 12. I den engelske undersøkelsen av Küchemann (1981) var det hele 26 % som svarte slik.

En del elever synes å ha den oppfatning at i oppgaver av denne typen gjelder det å oppdage et mønster eller en kode som skal knekkes. De er bevisste på at svaret skal være et tall. Da g er den *sjuende bokstaven i alfabetet,* gir de g verdien 7. Denne strategien gir feilsvaret 15.

Oppgave 3

a)	**Legg sammen $6n$ og $3n$**	**Svar: ....**
b)	**Legg sammen 2 og $n + 5$**	**Svar: ....**
c)	**Legg sammen 4 og $3n$**	**Svar: ....**

Oppgaveeksempel 5: Addisjon av algebraiske uttrykk

Det er mulig å løse oppgave 4 uten å kjenne verdiene som bokstavene kan ha. Dette er også tilfellet for oppgave 3. Det er to mulige måter å unngå å forholde seg til bokstaver på i et algebraisk uttrykk. Den ene er å beholde bokstaven, men ignorere den, og den andre er ganske enkelt å kvitte seg med bokstaven. I en del tilfeller fungerer den ene eller den andre av disse strategiene slik at en kommer fram til et korrekt svar på algebraoppgaver. I oppgave 3a kan en også betrakte n som objekt, for eksempel «nøtter». 6 nøtter og 3 nøtter blir til sammen 9 nøtter. Eller en kan se på dette som enheter av en bestemt type, på samme måte som at m kan stå for enheten meter. Det er derfor rimelig at det er høy løsningsfrekvens på denne oppgaven. Dette trenger ikke å bety at elevene har god forståelse av variabelbegrepet. Dette ser en klart i 3b og c, der en skal addere tallstørrelser sammen med variabler. Vi vil i kapittel 3.2, side 28, diskutere mer utførlig den oppfatning at bokstaver i matematikken representerer objekter.

Oppgave 3a	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	12	6	3
$9n$ (Riktig svar)	72	85	84
$9nn$, $6n3n$ eller 6, $3n$, «Legger inntil hverandre»	2	1	1
9 (Ignorerer variabel eller setter variabel lik 1)	6	3	–
Potensnotasjon ($9n^2$ eller 9^n)	–	1	10
Andre tallsvar enn 9	5	2	–

Tabell 16: Oppgave 3a. Svarfordeling i prosent

Merk at 10 % av elevene i 10. klasse også her svarer med et potensuttrykk. Regning med potenser er lærestoff som nylig har blitt introdusert for disse elevene. Elevene er vant til at de blir prøvd i det lærestoffet som nylig er gjennomgått. Når lærestoffet ikke er forankret i forståelse, blir det ofte brukt ukritisk. Vi har også pekt på dette fenomenet i diskusjonen av oppgave 6d på side 19 og vil møte dette igjen i flere oppgaver senere i vår diskusjon.

Oppgave 3b	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	16	14	5
n+7, 7+n, 7 og n eller lignende (Riktig svar)	4	9	37
$2n + 5$, $2n5$ og lignende «Legger inntil hverandre»	3	2	13
$7n$, $n7$, og lignende «Adderer tall og legger variabelen inntil»	58	50	33
7 «Ignorerer variabelen»	5	3	–
8 «Setter variabel lik 1»	2	2	–
$8n$	3	12	1
Potensnotasjon (f.eks. 7^4 eller $3n^4$)	–	1	1

Tabell 17: Oppgave 3b. Svarfordeling i prosent

I oppgavene 3b og c er $7n$ i en eller annen form det vanligste feilsvaret for alle klassetrinnene og forekommer oftere enn et korrekt svar for de to laveste trinnene. De korrekte svarene, $7 + n$ og $3n + 4$, synes å være uaktuelle for flertallet av elevene. En grunn til det kan være, som nevnt under oppgave 4b ovenfor, at mange elever er utilfredse med å gi et svar som inneholder en regneoperasjon, de er ikke vant til «åpne» svar av denne typen. Elevene forsøker derfor å trekke sammen $3n + 4$ på en eller annen måte, og det mest naturlige for mange er å «samle» tallene og variablene hver for seg og dermed få svaret $7n$. Dette fenomenet er påpekt i en rekke undersøkelser i flere land og har fått betegnelsen *«lack of closure»*. Elevene bruker de oppgitte tallene i oppgaven, regner ut og ser bort fra den variable størrelsen i denne prosessen. Til slutt setter de inn den variable størrelsen i svaret. Når vi sammenligner hvilket svar de elevene som svarte $7n$ på oppgave 3b, gav på oppgave c, finner vi at de er konsekvente. Henholdsvis 95 %, 95 % og 85 % av disse elevene på de tre klassetrinnene svarte også $7n$ på oppgave c. Dette tyder på at elevene har en konsekvent strategi som de benytter på slike oppgaver.

Svar som $2n + 5$, $2n5$ og lignende kan komme av at elevene legger den variable størrelsen inntil når det er tale om addisjon.

Oppgave 3c	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	16	11	5
$4 + 3n$, $3n + 4$, 4 og $3n$ (Riktig svar)	4	7	46
4, $3n$ eller 4 $3n$ «Legger inntil hverandre»	1	1	3
$7n$, $n7$, $4 + 3n = 7n$ «Adderer tall og legger variabel inntil»	63	69	39
7 «Setter variabel lik 1», ev. «Ignorerer variabelen»	6	4	–
Potensnotasjon (f.eks. 7^4 eller $3n^4$)	–	1	1

Tabell 18: Oppgave 3c. Svarfordeling i prosent

Legg merke til at færre elever bruker potensnotasjon i oppgavene 3b og c enn i oppgave a.

Feilsvarene på denne oppgaven viser at elevers tolkninger er et resultat av at de resonnerer intuitivt og pragmatisk når de møter ukjente tegnsystemer, i dette tilfellet ved at elevene kombinerer tall og variable størrelser. Dette kan ofte føre til at antakelser og analogier trekkes fra hvordan andre tegnsystemer benyttes, for eksempel i hverdagen, i andre deler av matematikken eller i andre skolefag. Det er vår bestemte oppfatning at elevene må bli bevisste på *meningsinnholdet* i algebraiske uttrykk om arbeidet med algebra skal bli en nyttig kunnskap for dem.

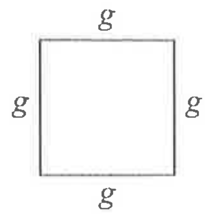
3.2 Bokstav som et objekt

I diskusjonen av oppgavene 3 og 4 pekte vi på at det er rimelig å tolke en del feilsvar ut fra at elevene trolig ser på bokstavene i disse oppgavene som konkrete objekter og ikke som symboler for tall. Vi pekte på at dette fører til at en rekke elever i disse addisjonsoppgavene adderer tallene og «samler» dette svaret med den variable størrelsen ved å legge denne inntil tallsvaret. Dette gjør elevene fordi de ikke ser på et uttrykk der det inngår en regneoperasjon, som et svar på en matematikkoppgave.

Når en eksemplifiserer «bokstavregning» i matematikk, har en tradisjonelt brukt eksempler som «3 bananer og 4 bananer blir til sammen 7 bananer» i forbindelse med uttrykk av typen $3b + 4b = 7b$. Ved et slikt eksempel bruker en bokstaven b som et symbol for et objekt, i dette tilfellet bananer. Når en senere møter oppgaver der en skal forenkle uttrykk som $3a + 5b + 6a$, kan en «samle» a-er og b-er som objekter. En kan dermed forklare hvordan en har kommet fram til uttrykket $9a + 5b$. Vanskeligere blir det å bruke denne typen eksemplifisering til å skape mening i uttrykk som $3a - 5b + a$. Å si at en har 4 appelsiner og tar bort 5 bananer fra dem, vil være meningsløst i denne konteksten. Og hvordan skal en forklare $3a \cdot 5b = 15ab$? Det kan således diskuteres om denne «fruktsalat-introduksjonen» til algebra kan skape mer forvirring enn forståelse.

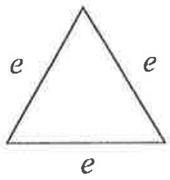
I oppgave 5 vil elevene møte begge disse utfordringene. Bokstavene i oppgave 5 står for bestemte, men ukjente tall. Mange av elevene tolker i stedet bokstavene som navn på eller «etiketter» for sidene eller som et objekt i seg selv, og ikke som den ukjente lengden av siden. Oppgaven forutsetter at elevene har et begrep om hva som menes med omkrets. Det er mulig å løse oppgaven ved å betrakte bokstavene (eller sidene i figurene) som objekt.

Oppgave 5
Eksempel:
Dette kvadratet har sider som er g meter lange.
Omkretsen kan vi da skrive som: $O = g + g + g + g = 4g$



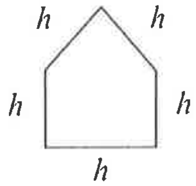
For alle figurene nedenfor er sidene oppgitt i meter
Skriv omkretsen for hver av disse figurene:

a)



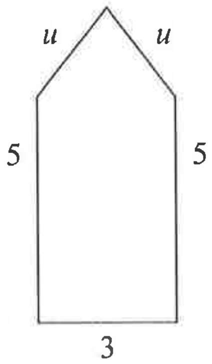
O = ...

b)



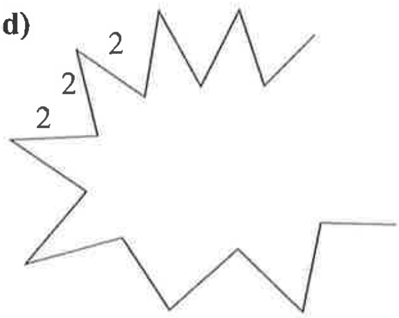
O = ...

c)



O = ...

d)



Deler av denne figuren er ikke tegnet.
Det er n sider til sammen.
Alle sidene har lengde 2.

O = ...

Oppgaveeksempel 6: Addisjon av tall og variable størrelser

Tabell 19 viser at de fleste elever klarer oppgave 5a. Legg likevel merke til hvor mange i 10. klasse som svarer $e + e + e$.

Oppgave 5a	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	7	4	2
$3e$ (Riktig svar)	75	77	81
$e + e + e$ (Riktig svar)	1	3	10
$3g$ eller $3m$	6	6	2
3	3	1	–
Potensnotasjon (f.eks. e^3)	–	1	1
6 eller $6m$ (Måler omkrets)	4	3	–

Tabell 19: Oppgave 5a. Svarfordeling i prosent

Svarene $3g$ og $3m$ er koblet til antall sider i trekanten. Det er mulig at elevene som har svart $3m$, tenker at målenheten er meter. Svaret $3g$ kan komme fordi g er brukt i eksemplet i oppgaven. Noen få elever har svart 3. Kan det være fordi det er tre sider og de ignorerer den ukjente størrelsen? Eller setter de den faste, men ukjente sidelengden lik 1, slik vi observerte i oppgavene 3 og 4? Svar som inneholder 6, kan komme av at elevene måler omkretsen med linjal. De gir dette tallet som svar, og noen elever tilføyer en enhet, for eksempel m.

I oppgavene 5b og 5c møter elevene betydelig større problemer. Det er rimelig å tro at det har sin grunn i at det her er to faste, men ukjente størrelser (h og t) involvert i 5b og en variabel, u, og ett eller flere tall i 5c. Et korrekt svar må da i begge tilfeller inneholde en addisjon. Vi har tidligere pekt på at dette fører til nye typer problemer. Disse problemene er knyttet til de konvensjonene som brukes i matematikk.

Oppgave 5b	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	14	8	6
$4h + t$ eller $t + 4h$ (Riktig svar)	11	27	56
$h + h + h + h + t$ eller lignende (Ing. sammentrekn.) (Riktig svar)	2	4	8
$4h$ og t (Unngår addisjonstegn i svaret)	17	11	–
$4h$ $1t$, $4h$, $1t$ eller lignende (Grupperer symbol)	17	13	1
$4h1t$, $4ht$, $hhht$ eller lignende («Legger inntil»)	15	14	23
5 eller $5m$ (Variabel lik 1, ev. med målenhet)	3	4	–
$5ht$, $5g$ eller $5h$ (Fem sider)	8	7	–
Tallsvar mellom 6 og 8 (Måler omkrets)	4	2	–
Potensnotasjon (f.eks. $h^4 + t$)	–	2	2

Tabell 20: Oppgave 5b. Svarfordeling i prosent

Både av tabell 20 og tabell 21 ser en at de aller fleste elevene har forstått hva de skal gjøre for å finne omkretsen av de to figurene, men at de har vansker med å gi svarene på en korrekt matematisk måte.

Svaret $4h$ og t i oppgave 5b forekommer ofte for de to laveste klassetrinnene. Det henger trolig sammen med den vegringen for å gi et svar som inneholder en addisjon, som vi har omtalt ovenfor. Denne måten å skrive svaret på kan også komme av at elevene oppfatter h og t som konkrete objekter. Av tabell 21 ser en at det ikke er så aktuelt i oppgave 5c. Kan det være fordi det her bare er én variabel involvert?

Disse to oppgavene viser at det i hovedsak er to forskjellige måter å «samle symbolene» på når et korrekt svar må inneholde en addisjon. Den ene måten er å gruppere aktuelle tall og symboler og å skille disse gruppene fra hverandre på ulike måter. En finner mange slike varianter, for eksempel ved å bruke et komma som skille, slik som $4h,\ 1t$ i oppgave b, eller ved bare å legge inn et åpent rom mellom de ulike gruppene, som $2{\cdot}u\ \ 2{\cdot}5\ \ 1{\cdot}3$ i oppgave b. Den andre måten å samle symbolene på er å legge de aktuelle tallene og symbolene inntil hverandre, som *hhht*, $2u13$ eller $2u2513$. En kan muligens si at elevene i den første gruppen har kommet et skritt videre enn elevene i den andre gruppen. I begge tilfellene kan misoppfatningen om at bokstaver i matematikken representerer bestemte objekter, ligge til grunn for svar av denne typen.

Merk at dette er hyppige typer av feilsvar i begge oppgavene, og at det er flere av de eldste elevene som «legger inntil» enn som grupperer symbolene. Kan dette være et tegn på at disse elevene er sikrere på å finne omkretsen, men mindre opptatt av å symbolisere dette på en korrekt matematisk måte enn de yngre elevene?

Oppgave 5c	**6. klasse**	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	17	18	8
$2u + 13$ eller $13 + 2u$ (Riktig svar)	6	7	30
$u + u + 5 + 5 + 3$ eller $2 \cdot u + 2 \cdot 5 + 3$ (Riktig svar)	4	12	26
$2u$ og 13 (Unngår addisjonstegn i svaret)	3	3	–
$2 \cdot u,\ 2 \cdot 5,\ 1 \cdot 3$ eller lignende (Grupperer symbol)	27	22	6
$u13$, $2u13$, $2u2513$ eller lignende («Legger inntil»)	8	8	12
5, $5u$ eller $5g$ (Fem sider)	4	3	–
7 eller tallsvar mellom 6 og 8 (Måler omkrets)	4	2	1
$13u$ eller $13m$	4	2	1
$15u$ eller $15m$	8	6	1
Potensnotasjon (f.eks. $13u^2$, $u^2+5^2+3^1$)	–	2	8

Tabell 21: Oppgave 5c. Svarfordeling i prosent

Begge figurene i oppgavene b og c har fem sider. Av tabell 20 og tabell 21 ser vi at tallet 5 inngår i flere typer svar. Det er usikkert hva som kan være elevenes tanker bak disse ulike typene av uttrykk. Svaret 5 kan indikere at eleven vil uttrykke at figuren har fem sider, eller også at eleven har satt de variable størrelsene lik 1, mens $5ht$ og $5u$ kan indikere at eleven har tatt med de aktuelle variablene, og $5g$ refererer trolig til eksemplet i oppgaven. Noen elever måler trolig omkretsen med linjal, på samme måte som i oppgave a, og får dermed andre tallsvar.

Som pekt på tidligere, for eksempel i kommentarene til tabell 16, side 26, er det en del av de eldre elevene som gir svar som inneholder potenser av ulike typer i slike oppgaver. Vi legger merke til at det er relativt mange slike svar i oppgave 5c.

Oppgave 5d, som bare ble gitt i 8. og 10. klasse, skiller seg fra de andre oppgavene ved at ikke hele figuren er tegnet, og ved at den består av et bestemt, men ukjent antall sider, *n*. Dette stiller elevene overfor nye utfordringer i forhold til de andre spørsmålene i oppgave 5 ved at de må betrakte *n* som et generalisert tall og ikke som et ukjent måltall som i de foregående. På den måten blir ikke misoppfatningen om at en bokstav står for et objekt, så aktuell i oppgave d som i b og c.

Oppgave 5d	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	42	35
$2n$, $N2$ eller lignende (Riktig svar)	9	35
16	1	1
$16n$, $16t$ eller $16,n$	3	2
Ulike «former» av 32 (2 · 16, 2 + 2 + ... + 2 = 32, 16, 2 eller lignende)	9	7
$32 + n$, $32 + x$, $32n$ eller lignende	3	2
Potensnotasjoner (n^2, 2^n, 2^{16} eller lignende)	2	2
Bruker to ganger en variabel som ikke er «n» ($2x$ eller lignende)	4	2
Andre tallsvar enn 16 og 32	13	8

Tabell 22: Oppgave 5d. Svarfordeling i prosent

Det er en relativt stor andel av elevene som ikke svarer på dette spørsmålet, men likevel flere enn i oppgave 6d, og det er betraktelig flere som gir et riktig svar i 5d enn i 6d, se tabell 11, side 21. I denne omgang er det mest interessante å diskutere den tenkning som kan ligge bak de ulike feilsvarene. Legg merke til at det er liten variasjon mellom de to klassetrinnene når det gjelder de svarkategoriene en har valgt.

Den delen av figuren som er tegnet i oppgave 5d, har 16 sider. De fleste av kategoriene for feilsvar viser at elevene har tatt utgangspunkt i dette, ved at tallene 16 og 32 går igjen på ulike måter i svarene. Noen få elever gir svaret 16, mens andre kobler 16 med opplysningen om at det er et ukjent antall sider i figuren, og får svar som $16n$, $16k$, $16x$ eller $16,n$. Dette ligner på et fenomen som vi har pekt på tidligere, nemlig at elevene ignorerer den variable størrelsen i utregningen med de aktuelle tallene i en oppgave for så å sette den inn igjen i svaret de gir. Noen elever har merket seg at lengden til hver side er 2, og gir tallsvar som er ulike versjoner av 32, mens noen elever i tillegg setter inn *n* eller en annen bokstav sammen med 32, både som addisjon og som multiplikasjon. Ingen av disse elevene har oppfattet *n* som et generelt antall. Vi merker oss også at det er en del elever som gir svaret som potenser.

I tillegg til dem som har fått riktig svar på oppgaven, er det noen elever som har tatt ett langt skritt mot en korrekt bruk av den variable størrelsen her ved at de har gitt svar som $2x$ eller $2s$.

3.3 Forenkling av uttrykk

Oppgavene 8a–8k handler om å skrive et algebraisk uttrykk på en enklere eller, i noen tilfeller, på en mer kompakt form. Dette er typiske eksempler på oppgaver som har som siktemål å øve på prosedyrer i algebra, og som en bruker relativt mye tid på i undervisningen av algebra i ungdomsskolen. Oppgavene fra b til h er identiske for 8. og 10. klasse, mens oppgavene som handler om forkorting av brøkuttrykk, bare forekommer i 10. klasse.

Oppgave 8
Skriv disse uttrykkene enklere:
Eksempel: $2a + 5a + 4b = 7a + 4b$

a) $4a + 3a + a =$ .... (8. kl)

a) $2a + 5b + a =$ .... (10. kl)

b) $a + 4 + a - 4 =$ ....

c) $x + y - x + y =$ ....

d) $(a + b) + (a - b) =$ ....

e) $3a - (b + a) =$ ....

f) $3a + a^2 + 2a =$ ....

g) $x \cdot x \cdot x =$ ....

h) $2y \cdot y^2 =$ ....

i) $\frac{2y}{3y} =$ ....

j) $\frac{4x + 2}{8x} =$ ....

k) $\frac{3b^3}{2b^2} =$ ....

Oppgaveeksempel 7: Forenkling av uttrykk

Oppgave 8a for 8. klasse er nokså lik oppgave 3a, men skiller seg fra den på to måter. For det første er det tre ledd i oppgave 8 og to i oppgave 3, og for det andre er det et rent algebraisk uttrykk i oppgave 8, mens en har brukt uttrykket «legg sammen» i oppgave 3.

Oppgave 8a	8. klasse
Ubesvart	9
$8a$ (Riktig svar)	34
$7a + a$ eller $4a + 4a$ (Riktig svar, trekker sammen to ledd)	33
$7a$, $4a + 3a$ eller $7 + a$	15
8 (Setter $a = 1$)	1
Potensnotasjoner	1

Tabell 23: Oppgaveeksempel 7 i 8. klasse. Svarfordeling i prosent

Andelen av riktige svar har gått ned fra 85 % på oppgave 3a til 67 % på denne oppgaven. Av de elevene som svarte riktig på oppgave 3a, er det 71 % som også svarer riktig på oppgave 8a, mens 89 % av dem som gav riktig svar på 8a, også hadde riktig svar på oppgave 3a.

En rekke elever svarer $7a$ eller alternativt $4a + 3a$. Det er rimelig å tro at de adderer tallene i oppgaven, og siden det ikke står noe tall foran den siste a-en, blir det til sammen sju slike. De to elevsvarene nedenfor illustrerer dette:

a) $\mathbf{4a + 3a + a =}$ $7a + a = 7a$ a) $\mathbf{4a + 3a + a =}$ $7a + 0a$

Elevsvar 1

Andre elever svarer $7 + a$. Bak dette svaret ligger det trolig en tilsvarende tankegang om at en summerer tallene i oppgaven og setter så inn a-en igjen, altså 7 og a.

Oppgave 8a	**10. klasse**
Ubesvart	2
$3a + 5b$ (Riktig svar)	86
$3a5b$, $7a^2a$, $7a2b$ (Legger inntil)	2
$2a^2 + 5b$	5
$8a$	4

Tabell 24: Oppgaveeksempel 7 i 10. klasse. Svarfordeling i prosent

Vi ser at det er mange elever som klarer denne oppgaven, men likevel er det interessant å legge merke til at også her er det en del elever som samler symboler og tall på ulike måter. Vi merker oss også at denne samlingen av like symboler fører til at en del elever bruker potensnotasjon, som i svaret $2a^2 + 5b$.

Det er fullt mulig å få korrekte svar på alle oppgavene fra 8a til 8e selv om elevene oppfatter bokstavene som representanter for ulike objekter. Oppgavene 8b til 8d bør sees i sammenheng for å få best mulig forståelse av hvordan elevene tenker når de løser oppgaver av denne typen. Oppgavene b og d har lik «struktur», firetallet i oppgave 8b er byttet ut med b, og det er satt parentes rundt to og to ledd, mens forskjellen mellom b og c er at firetallet i b er «byttet ut» med x i oppgave c. Dette gir oss en mulighet til å vurdere hvordan en forsiktig progresjon i symbolisering påvirker elevenes svar.

Oppgave 8b	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	20	3
$2a$, $2a + 0$, $a + a$, $2a + 4$ eller lignende (Riktig svar)	33	79
$a4 - a4$, $a4 + a4$, $4a + 4a$, $4a + a - 4$, aa, $5a - 3a$ (Legger inntil)	8	1
0, $0a$, $a - a$, $4 - 4$ eller lignende	7	1
a, $1a$, $a + 0$ eller lignende	7	1
$10a$	9	1
Potensnotasjoner, a^2, $-a^2$, $8a^2$, $a^2 + 8$ eller lignende	1	7

Tabell 25: Oppgave 8b. Svarfordeling i prosent

Legg merke til at andelen elever som ikke svarer på denne oppgaven i 8. klasse, er doblet i forhold til oppgave a, og at andelen av riktige svar er halvert. Det kan virke underlig at introduksjonen av tallene 4 og –4 skulle kunne føre til så store endringer i elevenes svar. En grunn til det kan være at det her blir vanskeligere å løse oppgaven dersom en oppfatter at bokstaven a står for et objekt, enn det var i oppgave a. En legger også merke til at denne effekten ikke er så tydelig i 10. klasse.

Oppgave 8c	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	33	7
$2y$ (Riktig svar)	12	57
$xy - xy$, yy, $xxyy$ eller lignende (Legger inntil)	8	3
0, $0x + 0y$, $0xy$ eller lignende (Som om det var en parentes om x og y)	21	16
Potensnotasjoner, y^2, $-x^2 2y^2$, $2y^2$ og lignende	1	6

Tabell 26: Oppgave 8c. Svarfordeling i prosent

Svaret 0 i en eller annen form er det hyppigst forekommende feilsvaret på begge klassetrinn på denne oppgaven og er i 8. klasse mer «populært» enn det korrekte svaret. Den «forsiktige» faglige progresjonen, som vi pekte på fra oppgave b til c, fører altså til store utslag i de svar elevene gir. Flesteparten av elevene som svarte rett på oppgave c, hadde også rett svar på oppgave b, henholdsvis 78 % og 96 % på de to trinnene. Men av dem som svarte rett på oppgave b, var det henholdsvis bare 33 % og 69 % som også fikk rett svar på oppgave c.

Svaret 0 kommer trolig som et naturlig resultat for de elever som oppfatter x og y som representanter for objekter: en har x og y og tar så bort x og y. Dette gir altså den samme effekten som om det stod en parentes etter minustegnet. Merk også et nytt hopp i andelen av elever som ikke svarer på denne oppgaven i 8. klasse. Det samme skjer når en går fra oppgave c til d. Nå får en stor økning også i 10. klasse.

Oppgave 8d	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	45	19
$2a$, $a + a$, $2a + b - b$ (Riktig svar)	8	40
aa- bb, $aabb$, $ab + ab$ (Legger inntil)	9	3
0 eller $0a$	12	5
Potensnotasjoner, a^2, $-a^2 + b$, a^2b eller lignende	1	5
Bruker tredje kvadratsetning, riktig eller galt, $a^2 - b^2$, $a^2 - ab + ba - b^2$, $a^2 + b^2$	–	15

Tabell 27: Oppgave 8d. Svarfordeling i prosent

Også på denne oppgaven er det mange elever som gir svaret 0. Det er vanskeligere å finne en rimelig forklaring på dette svaret i denne oppgaven enn i c-oppgaven. I 8. klasse er det 67 % av de elevene som gav svaret 0 på oppgave d, som gjorde det samme på oppgave c. Kan det være at deres svar på c-oppgaven har påvirket det de svarer på denne oppgaven? Det er to ledd, i det ene pluss, i det andre minus, svaret blir derfor null, som i c.

Vi har tidligere pekt på at elevene er vant til at de matematikkprøver de får, i første rekke handler om aktuelt lærestoff. I svarene på oppgave 8d finner en spor av dette. Hele 15 % av elevene i 10. klasse bruker tredje kvadratsetning i denne oppgaven. Dette kan også være et tegn på at mange elever ser etter «ytre» likheter i algebraiske uttrykk når de skal forenkles. I dette tilfellet ser de to parenteser som inneholder de samme bokstavene, en med pluss og en med minus, noe som får dem til å tenke på tredje kvadratsetning. Det er velkjent at mange elever heller baserer sine algebraiske prosedyrer på slike «ytre» likhetstrekk, enn å se prosedyrene som en logisk konsekvens av variabelbegrepet og begreper om regneoperasjonene. Nedenfor ser en to eksempler på det:

$(a + b) + (a - b) =$ $a^2 - b^2$ $\qquad$ $(a + b) + (a - b) =$ $a^2 - ab + ba - b^2$

Elevsvar 2

I tillegg til svar som tydelig har framkommet ved bruk av tredje kvadratsetning i oppgave 8d, har vi også tatt med andelen av elever i 10. klasse som gir andre svar som inneholder potenser i oppgavene 8b, 8c og 8d. Det viser seg at det i stor grad er de samme elevene som gir denne typen svar på disse deloppgavene. Svar av denne typen henger trolig sammen med at potenser også er aktuelt undervisningsstoff for denne elevgruppen.

Vi har tidligere, i kapittel 2.1, side 12, diskutert konvensjoner for prioriteringer mellom ulike regneoperasjoner. Parenteser er et viktig redskap for slik prioritering. I oppgave 8d er ikke parentesen et *nødvendig* signal for prioritering. En del elevsvar i 8c tyder på at disse elevene tenker seg en parentes rundt de to siste leddene. Derimot har parentesen en nødvendig funksjon i oppgave 8e, siden denne oppgaven har et subtraksjonstegn foran parentesen. I undervisningen legges det ofte vekt på muntlige formuleringer som går på å beskrive den prosedyren en gjør ved omforminger av slike uttrykk. En bruker gjerne formuleringer som: «*Hvis tegnet foran parentesen er minus, så skal en skifte tegn inni parentesen.*» På den måten legger en mer vekt på framgangsmåten enn på forståelsen av et slikt sammensatt uttrykk, altså mer vekt på ferdigheter enn på begrepsforståelse.

Oppgave 8e	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	54	23
$2a - b$ (Riktig svar)	4	43
$3a - ba$, $3a - ab$, $3aba$, $2ab$ (Legger inntil)	6	5
$4a - b$ eller $3a - b + a$	6	7
$2a + b$	3	2
$4a + b$	3	2
$3ab - 3a^2$, $-3ab + 3a^2$, $-3ab - 3a^2$, $3ab + 3a^2$ (Multipliserer parentesen)	–	9

Tabell 28: Oppgave 8e. Svarfordeling i prosent

Det er naturlig at det er få elever i 8. klasse som får rett svar på denne oppgaven, da bruk av parenteser ikke har vært aktuelt lærestoff for dem. Svarene viser at mange av elevene prøver å tolke oppgaven ut fra erfaringer de har med å gi mening til algebraiske uttrykk ved å betrakte de variable størrelsene som objekter. 70 % av de tiendeklassingene som svarer rett på 8e, gir også et korrekt svar på 8d. De fleste av disse tiendeklassingene ser altså ut til å beherske parentesreglene. Derimot er det 10 % av dem som svarer rett på 8d, som ignorerer parentesen i 8e og får svaret $4a - b$. Svaret $2a + b$ kan indikere at elever skifter fortegnet til a, men ikke til b fordi den ikke har noe fortegn.

En legger merke til at det, på samme måte som i oppgave 8d, er relativt mange av tiendeklassingene som multipliserer $3a$ med parentesen. Det er rimelig å tro at de gjør det av samme grunn som vi pekte på ovenfor: at mye av arbeidet i algebra på dette klassetrinnet dreier seg om multiplikasjon, inkludert kvadratsetningene. Elevsvar 3 viser hvordan en elev har regnet ut svarene på oppgavene 8d og e.

d) $(a+b) + (a-b) =$
$a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b =$
$a^2 - ab + ba - b^2 =$
$a^2 - b^2$

e) $3a - (b+a) =$
$3a \cdot -b + 3a \cdot a =$
$3a \cdot b - 3a \cdot a =$
$3ab - 3a^2$

Elevsvar 3

Oppgave 8f skiller seg fra de foregående spørsmålene i denne oppgaven ved at en skal trekke sammen ulike potenser av a. Dette spørsmålet er lettere enn de to foregående spørsmålene i denne oppgaven for begge klassetrinn.

Oppgave 8f	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	49	12
$a^2 + 5a$, $5a + a \cdot a$ eller lignende (Riktig svar)	11	61
$5a^2$ eller lignende (Legger inntil)	6	7
$7a$, $4a + 3a$ eller lignende (Adderer tallene og henger på en a)	20	4
$6a^2$	3	6
$5a^4$	1	4
Andre potensnotasjoner	1	5

Tabell 29: Oppgave 8f. Svarfordeling i prosent

Som vi kunne vente, møter vi igjen i 8f flere av typene av feilsvar som vi har diskutert ovenfor, blant annet det at mange elever samler tallene og bokstavene hver for seg og legger dem inntil hverandre og får $5a^2$. Andre elever adderer alle tallene i oppgaven, får svaret 7 og henger på en a til slutt. Dette er det vanligste feilsvaret i 8. klasse. Svaret $6a^2$ er et uttrykk for samme tankemåte, med a^2 som et objekt. Svaret $5a^4$ får en ved å addere tallene og a-ene hver for seg og skrive fire a-er som a^4.

De siste spørsmålene i oppgave 8 handler om å forenkle uttrykk der det inngår multiplikasjon eller divisjon. Oppgave g handler om definisjonen av et potensuttrykk. Tabell 30 viser at tre firedeler av elevene i 10. klasse behersker denne notasjonen, og bare 14 % i 8. klasse. Det siste er ikke overraskende på grunn av plasseringen av dette lærestoffet i ungdomsskolen. På den andre siden er det interessant å observere hvilke oppfatninger elevene har av denne notasjonen, både før og etter at dette er behandlet i undervisningen. Dette er jo nettopp hensikten med å diagnostisere før en behandler et tema i undervisningen.

Oppgave 8g	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	34	4
x^3 (Riktig svar)	14	75
x	5	–
$3x$ eller $x3$	36	18

Tabell 30: Oppgave 8g. Svarfordeling i prosent

Hvis elevene oppfatter bokstavene som objekt og ikke som tall, er det lett å trekke den slutning at det her er tre objekter, altså tre x-er. Det kan da for noen være naturlig å betegne dette som $3x$. Det er henholdsvis 36 % og 18 % av elevene på disse to klassetrinnene som gjør det. Et annet interessant svar som kan ha bakgrunn i samme type objekttenkning, er svaret x. Elevene ser her bare en bokstav, og en måte å forenkle dette på er å vise til denne *bokstaven.*

I oppgave h må en bygge på den forståelsen av potensnotasjon som er undersøkt i oppgave g. Elevene møter her en ekstra utfordring i forhold til oppgave g i og med at det inngår både tall og potenser i spørsmålet. En ser at andelen av riktige svar går kraftig ned fra den forrige oppgaven.

Oppgave 8h	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	51	13
$2y^3$ (Riktig svar)	1	51
$2y \cdot y \cdot y$ (Riktig definisjon, forenkler ikke)	1	3
$4y$, $2y + 2y$ eller lignende (Adderer tall og bokstaver hver for seg)	16	5
$2y^2$ eller $2y{\cdot}y$	6	9
$3y^2$ (Teller 3 y-er og beholder eksponenten)	3	9
$4y^2$, $4y \cdot y$ eller $2y \cdot 2y$ (Betrakter eksponenten som et gitt antall)	4	1

Tabell 31: Oppgave 8h. Svarfordeling i prosent

Vi finner igjen noen av de feilene som er kommentert ovenfor, for eksempel at en adderer tall og bokstaver hver for seg. Vi ser også at en del elever betrakter eksponenten som et gitt antall, for eksempel at y^2 består av to y-er. Noen bruker så dette videre og får enten $2y \cdot 2y$ eller til sammen tre y-er og beholder så eksponenten. Nesten 20 % av elevene i 10. klasse bruker denne tenkemåten.

De tre siste spørsmålene i oppgave 8 (i, j og k) handler om forkortinger og er bare gitt i 10. klasse. Det er omtrent en tredel av elevene som ikke svarer på hver av oppgavene. Når en undersøker nærmere hvordan den enkelte elev svarer, finner en at det stort sett er de samme elevene som svarer blankt på alle disse tre spørsmålene. Disse utgjør nesten en firedel av alle elevene i 10. klasse som deltok i undersøkelsen. En forundres stadig over det store antallet av *ulike* svar som det er mulig å få på oppgaver av denne typen. Noen av disse svarene lar seg gruppere i kategorier som sier noe om karakteristiske omformingsstrategier som elevene bruker.

Oppgave 8i	**10. klasse**
Ubesvart	33
2/3, 0,666... eller 0,67 eller lignende (Riktig svar)	20
y eller $1y$ Subtraksjonstenkning (nevner minus teller)	13
$-y$ eller $-1y$ Subtraksjonstenkning (teller minus nevner)	7
$1/y$, $1/1y$ eller $-1/y$ Subtraksjonstenkning (teller minus nevner, svaret i nevner)	3
$0{,}67y$, $2y/3$, Delvis forholdstenkning, korrekt tallforhold	10
$1{,}5y$ Delvis forholdstenkning, omvendt forhold	2
$5y$ Addisjonstenkning	2

Tabell 32: Oppgave 8i i 10. klasse. Svarfordeling i prosent

En oppfatning eller strategi er at ved forkorting av denne typen skal nevneren subtraheres fra telleren eller omvendt. Dette kan synes merkelig siden svært få av disse elevene ville mene at en forkorting av brøken $\frac{4}{8}$ ville gi svaret 4 eller -4. Det er rimelig å tro at elevene *ikke* oppfatter disse oppgavene som brøker, men prøver å bruke regler de har fått presentert i undervisningen i algebra. I tabell 32 kan en se tre ulike typer av slike subtraksjonsstrategier. Nesten en femdel av elevene bruker denne tenkemåten. En finner også noen elever som følger en addisjonstenkning og får svaret $5y$. Videre er det noen elever (12 %) som betrakter forholdet mellom tallene, men «trekker med seg» y-en som en slags enhet. Det er rimelig å tro at disse elevene oppfatter y som et objekt.

Oppgave 8j er klart mer komplisert enn den forrige oppgaven, i første rekke fordi det er en sum i telleren som inneholder en variabel størrelse i det ene leddet. Vi har funnet mer enn førti forskjellige svar på denne oppgaven. På samme måte som i den forrige oppgaven finner vi subtraksjoner mellom teller og nevner, eller med bare den delen av telleren som inneholder x. Samtidig er det en rekke kreative typer av forkortinger. I tabell 33 har en tatt med noen typiske feil som kort kommenteres nedenfor.

Oppgave 8j		**10. klasse**
Ubesvart		32
	$(2x + 1)/4x$ (Riktig svar)	2
A	0,75, 3/4, 6/8 eller lignende (Forkorter x mot x og trekker sammen)	4
B	$0{,}75x$ eller lignende (Som over og «henger på» en x til slutt)	2
C	1,5 eller lignende	2
D	2,5 eller lignende	2
E	$6x/8x$	4
F	$0{,}5x + 2$	8
G	$4x + 2$ eller $-4x + 2$ (Subtraksjon)	4
H	$2x$ eller $-2x$	3
I	$2x + 2$ eller $-2x + 2$	5
J	$(x+2)/2x$	5
K	$2/4x$ (Subtraksjon)	4
L	1 «Forkorter alt»	7
M	0 «Forkorter alt»	2

Tabell 33: Oppgave 8j i 10. klasse. Svarfordeling i prosent

Gruppene **A** og **B** framkommer ved at en forkorter x mot x og får 6 i telleren og 8 i nevneren. Elevene i gruppe **B** «henger så på» en x i svaret igjen. Gruppe **E** ligner litt på **A** og **B**, en «samler» tallene og x i telleren, men forkorter ikke x slik elevene i gruppe **A** gjør. Et eksempel på et svar i gruppe **C** er:

$$\frac{\cancel{4x}+2}{{}^{2}\cancel{8x}} = \quad \frac{3}{2}$$

Elevsvar 4

Tilsvarende får noen svaret 2,5 (gruppe **D**) ved å forkorte $4x$ mot $8x$, som gir en halv, og addere dette til 2. I gruppe **F** forkortes 4 mot 8, en får 0,5 og beholder x-en (som en slags enhet) og får svaret $0{,}5x + 2$.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}x+2}{4\cancel{8}x} = \frac{2x+2}{4x} \quad 0{,}5x+2$$

Elevsvar 5

Svarene $4x + 2$, $-4x + 2$ og $\frac{2}{4x}$ i gruppene **G** og **K** er alle eksempler på subtraksjoner mellom teller og nevner. Gruppene **I** og **J** er eksempler på en kombinasjon mellom delvise forkortinger og subtraksjoner. Men noen elever forkorter bort alt, noen av disse gir svaret 1 (gruppe **L**):

$$\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{x}+2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{x}} \qquad \frac{2}{2}=1$$

Elevsvar 6

Andre svarer 0, disse foretar en subtraksjon etter at alt er forkortet (gruppe **M**).

Oppgavene 8i og 8k er faglig sett relativt like. En ville kanskje tro at den siste var vanskeligst fordi den inneholder potenser av den variable, men tabell 34 viser at flere har fått riktig svar på denne oppgaven enn på 8i. Flesteparten (83 %) av dem som svarte riktig på 8i, gav også riktig svar på denne oppgaven. Det ser altså ut til at omtrent en firedel av elevene behersker prosedyrene i omforming av uttrykk av denne typen. Men det betyr altså ikke at de dermed behersker prosedyrene for forenkling av uttrykk som i oppgave 8j. Tilsvarende resultater ble også funnet i en undersøkelse gjort i Sverige tidlig på åttitallet.

Oppgave 8k	**10. klasse**
Ubesvart	36
1,5*b* eller 3*b*/2 og lignende (Riktig svar)	29
b eller 1*b* og lignende	14
Andre uttrykk med *b* multiplisert med et tall (2*b*, 3*b* osv.)	3
b^3	1
1,5 multiplisert med potenser av *b*	2
Andre potenssvar	5

Tabell 34: Oppgave 8k i 10. klasse. Svarfordeling i prosent

Som i de foregående oppgavene er det de ulike typene av feilsvar som gir oss den mest verdifulle informasjonen om elevenes tenkning. For eksempel har vi for gruppen av svar med 1,5 multiplisert med en potens av *b*, altså elever som har et korrekt forhold mellom tallene, registrert følgende svar:

- $1{,}5b^{1{,}5}$, de regner også ut forholdet mellom eksponentene
- $1{,}5b^2$ og $1{,}5b^7$, det er vanskelig å finne en begrunnelse for disse eksponentene
- $1{,}5b^5$, de adderer eksponentene
- $1{,}5b^6$, de multipliserer eksponentene

Noen elever får svaret $5b^5$, de adderer både tall og eksponenter. I alt er det 3 % av elevene som adderer eksponentene.

Andre elever mener at eksponentene har virkning både på den variable størrelsen og på tallene, og de omformer $\frac{3b^3}{2b^2}$ til $\frac{27b^3}{4b^2}$ og får svar som 6,25*b* eller med andre eksponenter av *b*.

Kategorien «andre potenssvar» i tabell 34 inneholder svar som b^5, $5b^5$, $0{,}67b^5$, b^2, $5b^3$ osv., altså en blanding av prosedyrer anvendt på tallene og på de variable.

Vi mener det er viktig å ikke se seg blind på alle de forskjellige resultatene som er presentert med utgangspunkt i oppgave 8. Det viktigste budskapet til læreren fra denne analysen er at flertallet av elevene ser ut til å bruke vilkårlige, men i noen grad konsekvente, prosedyrer ved omformingene. Ofte er dette prosedyrer som har tilknytning til brokker av tidligere erfaringer med tallregning, men også prosedyrer som er totalt løsrevet fra tallregningen, som for eksempel når en skal forenkle brøkuttrykk. På den måten blir reglene deres isolerte kunnskaper som er vanskelige å bruke i nye sammenhenger. Satt på spissen kan elevsvarene på denne oppgaven tyde på at for flesteparten av elevene går mye av tiden de bruker på å arbeide med algebra, ut på å flytte «tomme» symboler meningsløst rundt på et papir.

Det er ikke riktig å hevde at elevene har en rekke misoppfatninger når det gjelder prosedyrer for omforming av algebraiske uttrykk. Det er rimelig å tro at de fleste bare har erfaringer med prosedyrene fra aktiviteter i matematikktimene. De har således ikke hatt anledning til å utvikle begrepsstrukturer eller tankemodeller som inkluderer disse prosedyrene. Dette fører til at de prøver å huske regler fra tilsvarende oppgaver i algebra. Hvis disse reglene bare er knyttet til ytre trekk ved disse kunnskapene, er det ikke uventet at en får en stor variasjon av ulike elevsvar. Ofte fører dette til prosedyrer som er totalt meningsløse, for eksempel at en subtraherer nevner fra teller når en skal omforme et algebraisk uttrykk som er gitt som en brøk. Bak en slik tanke ligger trolig den «ytre» erfaringen en har fått ved forkortinger. Når en for eksempel forkorter med 2, eller a, så stryker en et totall, eller en a, både over og under brøkstreken. Dette minner i høy grad om å «ta bort» det samme, eller like mye, både i teller og nevner.

Det er vår mening at en bare kan rette på dette forholdet ved å legge vekt på begrepsforståelse av de ulike prosedyrene ved algebraiske omforminger, en forståelse som må bygge på solide kunnskaper i tallregning, som så kan bli utgangspunktet for de algebraiske prosedyrene. Dette vil kreve en balansert fordeling av den tiden som brukes på begrepsdanning og ferdighetstrening.

3.4 Å sette inn verdi

Oppgave 11

Sett inn tallene og regn ut:

a) $a = 1$, $b = 2$, og $c = 3$

$a + b - c =$ ....

b) $b = 2$

$b^3 =$ ....

c) $3x = 7$, og $5y = 11$

$3x + 5y =$ ....

d) $a = 10$, og $b = 2$

$a - 3b =$ ....

Oppgaveeksempel 8: Å sette inn verdier

Oppgave 11 er bare med for 10. klassetrinn. Det er 12–13 % av elevene som ikke svarer på disse oppgavene. Flesteparten av dem, 91 %, har alle disse oppgavene blanke. Oppgave a er den enkleste. Det vanligste feilsvaret er 6, som en får ved å addere de tre oppgitte verdiene.

Oppgave 11a	**10. klasse**
Ubesvart	13
0 (Riktig svar)	81
6	3

Tabell 35: Oppgave 11a. Svarfordeling i prosent

Den nye utfordringen i oppgave b i forhold til oppgave a ligger i å sette verdien 2 inn i et potensuttrykk og å regne ut dette uttrykket.

Oppgave 11b	**10. klasse**
Ubesvart	12
8 (Riktig svar)	68
2^3	4
6 eller 2 + 2 + 2 og lignende	9
16 eller $2^3 = 16$	2
$2b^3$	1

Tabell 36: Oppgave 11b. Svarfordeling i prosent

Relativt mange av dem som har besvart oppgaven, klarer dette, noen elever setter inn riktig verdi, men regner ikke ut. En del elever, 9 %, betrakter potensuttrykket som en addisjon. En ser også at noen elever tror at $2^3 = 16$, mens noen gir svaret $2b^3$, de «samler» tallet med uttrykket i stedet for å erstatte b med 2.

I oppgave c ønsker en å undersøke om elevene oppfatter $3x$ og $5y$ som tall.

Oppgave 11c	**10. klasse**
Ubesvart	13
18 (Riktig svar)	70
76 $(3\cdot7 + 5\cdot11)$	11

Tabell 37: Oppgave 11c. Svarfordeling i prosent

Omtrent 80 % av de elevene som prøver seg på denne oppgaven, får riktig svar. Det helt dominerende feilsvaret er 76. Disse elevene oppfatter ikke $3x$ og $5y$ som tall, men setter i stedet inn henholdsvis verdiene 7 og 11 for x og y og får $3 \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 76$. En grunn til det kan være at de er vant til å sette inn verdier for ukjente størrelser når de løser ligninger.

Oppgave 11d	10. klasse
Ubesvart	13
4 (Riktig svar)	65
2	4
5	2
14	1
16	2
– 22	3
8 eller 8b	2

Tabell 38: Oppgave 11d. Svarfordeling i prosent

I tabell 38 er det gjengitt noen typiske feilsvar. Svaret

- 2 kommer fram ved at elevene setter opp $10 - 2 \cdot 2 \cdot 2$, eller i noen tilfeller $10 - 2^3$, de ser på 3 som en eksponent, på tilsvarende måte får noen svaret 1 ved å sette opp $10 - 3^2$
- 5 ved at de setter opp uttrykk som $10 - (3 + 2)$
- 14 ved først å subtrahere 3 fra 10 og deretter multiplisere med 2, de regner fra venstre mot høyre $(10 - 3) \cdot 2$, se diskusjonen om prioritering av regneoperasjoner på side 12
- 16 får elevene ved å addere: $10 + 3 \cdot 2$
- –22 kommer av at a settes lik 10, og at en erstatter b med 2 i $3b$ og dermed får $10 - 32$

Oppgave 11 viser at omtrent tre firedeler av elevene i 10. klasse som forsøker seg på denne oppgaven, behersker det å sette inn verdier for variable størrelser i sammensatte uttrykk. De feil som oppstår, kan tilbakeføres til usikkerhet i tallregning, for eksempel når elevene gir svaret 5 eller 14 i oppgave d. Videre kan det være en sammenblanding av potensuttrykk og addisjon eller multiplikasjon. Svarene 6 i oppgave b og 2 eller 1 i oppgave d er eksempler på det. Vi ser også indikasjoner på manglende forståelse av posisjonssystemet i sammenhenger som er mer ukjent for elevene, som når innsetting av verdien 2 for b i $3b$ i oppgave d blir til 32. Dette illustrerer det som det er pekt på tidligere, nemlig at en del av vanskene i algebra kan spores tilbake til usikkerhet i tallforståelse og tallregning.

3.5 Å finne verdien til en ukjent størrelse

Av de diagnostiske oppgavene som er med i denne samlingen, er det bare i en oppgave, oppgave 14 for 10. klasse, der det er spurt etter hvilken verdi for den variable størrelsen som tilfredsstiller en likhet. De andre diagnostiske oppgavene handler i første rekke om elevenes forståelse av variabler. Det er flere måter en kan løse denne oppgaven på. Felles for alle disse er ideen om at tallverdien av uttrykkene på begge sider av likhetstegnet skal være den samme når en setter inn en verdi for den variable størrelsen. Som vi har pekt på tidligere (se for eksempel side 8: Forståelse og bruk av likhetstegnet), er elevenes første erfaringer med likhetstegnet at det er et signal om å utføre en regneoperasjon. I oppgave 14 ønsker vi å undersøke hvordan elevene angriper denne typen oppgaver, og ikke å studere ligningsløsning generelt.

Oppgave 14

Hva er x når $\frac{x+1}{x+1} = \frac{3}{4}$?   x = ...

Vis hvordan du kom fram til svaret.

Oppgaveeksempel 9: Finne verdien til x

Denne oppgaven er vanskelig å løse med de konvensjonelle metodene som elevene er best kjent med. En grunn til at denne oppgaven er valgt, er at vi ønsker å finne ut hvilke strategier elever bruker i slike sammenhenger. *En* strategi som fører fram i denne oppgaven, er å sette inn forskjellige verdier for x og så undersøke om svaret blir 3/4. I tabell 39 har en hentet informasjon både fra svarene til elevene og metodene de har brukt. Flesteparten (80 %) av de elever som gir et korrekt svar, viser at de har prøvd seg fram med ulike verdier. De resterende fordeler seg nokså likt mellom dem som svarer 5 uten å vise hvordan de kom fram til svaret, og dem som bruker algebraiske metoder.

Oppgave 14	10. klasse
Ubesvart	50
5 (Riktig svar)	9
5/12	1
2	5
2/1 eller 2 og 1, eller 2 + 1 eller (2,1) eller lignende	17
0,75 eller 3/4	2

Tabell 39: Oppgave 14. Svarfordeling i prosent

Den vanligste feilen er at elevene setter inn ulike verdier for x i teller og nevner, det vil si at de løser en ligning for tellerne og en annen for nevnerne. Elevene vet at x kan ha ulike løsningsverdier fra ligning til ligning, så hvorfor ikke også for ligninger for telleren og nevneren i denne oppgaven? Eksempler på det finner en i elevsvar 7 og elevsvar 8:

$\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4}$? $= \frac{2+1}{1+3} = \frac{3}{4}$ $x = \frac{2}{1}$

Elevsvar 7

$x =$ 2og1

Elevsvar 8

Svaret $\frac{5}{12}$ framkommer når elevene stryker x i teller og nevner eller ignorerer x og foretar en brøkregning med tallene. Eksempler på det finner en i elevsvar 9 og elevsvar 10:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$
$$-\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$
$$= \frac{5}{12}$$

Elevsvar 9

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{x}{x} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}$$
$$\frac{x}{x} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12}$$
$$\frac{x}{x} = \frac{5}{12}$$

Elevsvar 10

Av tabell 39 ser vi at det er hele 5 % av elevene som gir svaret 2. Også bak de fleste av disse svarene ligger det trolig at elevene setter inn ulike verdier for x i teller og nevner og får svaret $\frac{2}{1}$. De blir opptatt av at $\frac{2}{1}$ er det samme som 2, uten å reflektere over det utgangspunktet de tok. Elevsvar 11 er et eksempel på dette.

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{+2}{+1} = \frac{3}{4} \quad x = \frac{2}{1}$$
$$\frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Elevsvar 11

Men det finnes også andre muligheter for svaret 2, som i elevsvar 12.

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4} \quad |-3$$
$$\frac{x+1}{x} = \frac{3}{1} \quad |^{-1}$$
$$x = 2$$

Elevsvar 12

Det er en stor mengde forskjellige svar på denne oppgaven. Dette indikerer at få elever i 10. klasse har virkelig forståelse av hva som foregår i rutinene som brukes i ligningsløsning. Elevsvarene ovenfor viser at elevene husker brokker av kunnskaper som de «håper» vil gi dem et korrekt svar.

3.6 Fra algebraiske uttrykk til kontekst og omvendt

I oppgave 7 er det gitt et algebraisk uttrykk som elevene skal skrive en matematisk oppgave eller en matematikkfortelling til. Målet med en slik oppgave er å se om elevene kan tenke på en passende, realistisk kontekst der det algebraiske uttrykket blir brukt på en korrekt måte. En kan rette søkelyset mot flere forskjellige aspekter ved elevenes tenkning om bruk av bokstaver i matematikk i en oppgave av denne typen, for eksempel:

- Hvilken kontekst bruker elevene i matematikkfortellingen?
- Er konteksten realistisk?
- Hvordan behandler elevene den variable størrelsen?
- Hvilke oppfatninger av variable størrelser viser denne oppgaven at elever kan ha?

Oppgave 7
Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket:

$3a + 2a = 5a$ ....

Oppgaveeksempel 10: En matematikkfortelling

Tabell 40 viser hvordan svarene fordeler seg i forhold til noen typiske elevoppfatninger av bokstaven *a* i denne oppgaven.

Oppgave 7	6. klasse	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	34	28	31
Riktig svar	2	5	7
a står for et konkret objekt	11	16	27
a står for et udefinert objekt	3	9	7
3*a* og 2*a* står for selvstendige objekter	16	16	13
Beskriver regneprosedyrer for å få «svaret» 5*a*	8	9	7
Konteksten er en matematikkoppgave på skolen	3	3	1

Tabell 40: Oppgave 7. Svarfordeling i prosent

Noe under en tredel av elevene besvarer ikke oppgaven. En grunn til at dette tallet er så høyt, kan være at dette er en ukjent oppgavetype for de fleste elever. Vanligvis går en i undervisningen i matematikk den «motsatte veien»: En gir oftest en problemstilling i en bestemt kontekst, som så skal «omsettes» til et «algebraisk språk».

Et riktig svar i denne sammenhengen innebærer at bokstaven blir oppfattet som en variabel, et ukjent antall eller et generelt tall. Dette kan for eksempel være knyttet til en kontekst som antall fyrstikker i en eske eller en pris på en vare. En ser at det er få elever på alle klassetrinnene som gir matematikkfortellinger av denne typen.

Den hyppigste svarkategorien er karakterisert ved at *a* står for et konkret objekt. Disse elevene ser ofte på *a* som et symbol eller en «merkelapp» for et konkret objekt som aper, appelsiner, klasser, kjærester osv. Dette er ikke unaturlig, da en i mange sammenhenger bruker bokstaver på en slik måte i matematikk. For eksempel bruker en *m* som en merkelapp for *enheten* meter og tilsvarende *l* for liter. Et eksempel på slike elevsvar kan være:

Espen hadde 3 epler, så fikk han 2 til. Hvor mange epler hadde Espen
=5a

Elevsvar 13

Det er bemerkelsesverdig at andelen av denne typen svar øker fra 11 % i 6. klasse til 27 % i 10. klasse. I en annen type elevsvar lar elevene *a* stå for et udefinert objekt, som i følgende eksempel:

Det var en gang en 3 aem som møtte på 2aer. hvor mange arer var det da.

Elevsvar 14

Også svar der elevene refererer til 3*a* og 2*a* som fullstendige eller helhetlige objekter, er ganske vanlige. Et eksempel på slike svar er:

3A og 2A skulle på tur sammen ute i skogen så sa læreren at kaste 3a og 2a kunne slå seg sammen så kunne de kalle sa 5a

Elevsvar 15

I kapittel 1 og i innledningen til dette kapitlet har vi pekt på det betenkelige ved å bruke objekter når en skal introdusere regning med algebraiske uttrykk. Hvis elevene trekker sammen $2a + 3b$ og får $5ab$, kan det være fristende å si at en ikke kan legge sammen to appelsiner og tre bananer og få fem «appelsinbananer». Det er vår oppfatning at argumentasjoner som dette kan være med på å forsterke den oppfatning at bokstavene i algebra representerer objekter. Svarene på denne oppgaven viser at rundt halvparten av elevene i 10. klasse bruker objekttenkning i en eller annen form.

En del elever knytter sine matematikkfortellinger til prosedyrer for sammentrekking av uttrykket $3a + 2a$. I elevsvarene nedenfor går prosedyrene på først å ignorere a, addere de to tallene og sette inn a igjen i svaret.

Du tar 3+2 det er 5
Så tar du a + a og det blir a.
Da blir det 5a.

Elevsvar 16

Du legger sammen tallene og
beholder a

Elevsvar 17

En rekke ganger har vi i dette veiledningsheftet pekt på at det er nødvendig å knytte den måten en bruker bokstaver på i algebra, sammen med generalisert aritmetikk, se for eksempel kapitlene 1.4, 1.6 og 1.7 på sidene 7–10.

Den neste oppgaven går på sett og vis den «motsatte veien». Her har en gitt hva de variable størrelsene står for, g for antall kg gulrøtter og p for antall kg poteter, og elevene skal i oppgave a forklare hva den gitte summen representerer i denne konteksten. Uttrykket i spørsmål a er i realiteten en funksjon som beskriver hvor mye en må betale når en kjøper forskjellige mengder av gulrøtter og poteter. Oppgave 12 skiller seg på denne måten fra de fleste andre oppgavene i veiledningsheftet, som handler om begrepsforståelse av variable størrelser og regneoperasjoner med slike størrelser. Vi viser til Gjone (1997) for mer utførlig diskusjon av funksjoner. Det er et veiledningshefte om funksjoner i KIM-serien.

Oppgave 12 (10. klasse) / Oppgave 11 (8. klasse)

Gulrøtter koster 13 kroner per kg, og poteter koster 5 kroner per kg.

a) **Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da $13g + 5p$ for?**

....

b) **Hvor mange kg ble kjøpt til sammen?** ....

Oppgaveeksempel 11: Tolkning av algebraiske uttrykk i en gitt kontekst

De to spørsmålene i denne oppgaven *kunne* ha blitt stilt i omvendt rekkefølge. Oppgaven ville da trolig ha blitt lettere, spesielt b-spørsmålet, siden svaret ville følge nesten direkte av teksten. Vi legger merke til, tabell 41, at over halvparten av elevene på begge de aktuelle klassetrinnene mener at $13g + 5p$ står for hvor mange kilogram en kjøper til sammen. Hadde spørsmålene blitt byttet om, ville vi ikke fått fram at dette er en dominerende misoppfatning, nemlig at bokstavene i slike sammenhenger står for objekter eller er «merkelapper» for objekter. På den andre siden får vi nå trolig færre riktige svar på oppgave b siden svaret er avhengig av at elevene husker innledningen til spørsmål a.

Oppgave 12a (10. klasse) / Oppgave 11a (8. klasse)	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	21	18
Riktig svar	2	7
$18gp$, $13g$, $5p$ eller lignende (Legger inntil)	2	1
194 kroner eller andre referanser til pris (Prissvar)	4	9
13 gulrøtter + 5 poteter eller andre referanser til antall (Antallssvar)	9	2
13 kg gulrøtter + 5 kg poteter eller referanser til mengde (Mengdesvar)	55	60

Tabell 41: Oppgave 12a (10. klasse) / Oppgave 11a (8. klasse). Svarfordeling i prosent

Noen typiske eksempler på riktig svar er: *«Prisen på g kg gulrøtter og p kg poteter»*, *«Hvor mye det koster»*, *«Hvor dyrt det blir til sammen»*, «13 kr · g kg + 5 kr · p kg», *«Formel for samlet pris»* og lignende.

Et typisk eksempel på den vanligste feiltypen, *mengdesvar*, er:

13 kg gulrøtter + 5 kg poteter

Elevsvar 18

Her oppfatter elevene at g står for «kg gulrøtter» og p for «kg poteter». Bokstaven g representerer en mengde gulrøtter og p en mengde poteter. Dette er *en* form for oppfatning av variabel som et objekt. En lignende form finner en i det vi har kalt *antallssvar*. Elevsvar 19 er et eksempel på det:

13 gullerøtter og 5 poteter

Elevsvar 19

Disse elevene tolker g som gulrot og p som potet. Denne gruppen av elever betrakter helt klart bokstavene som objekter. Det er rimelig å tro at elevene som gir «mengdesvar», har en oppfatning av bruk av bokstaver i matematikk som er mer omfattende enn denne gruppen.

Noen elever mener at uttrykket viser at en kjøper 13 kg gulrøtter til 13 kroner per kg og 5 kg poteter til 5 kroner per kg. De mener altså at g står for kiloprisen på gulrøtter. Elevsvar 20 er et eksempel på det:

$13 \cdot 13 + 5 \cdot 5 = 169 + 25 = 194$

Elevsvar 20

Som nevnt ovenfor ville en trolig fått flere riktige svar på denne oppgaven hvis spørsmålene hadde byttet plass. Når elevene har gitt et mengde- eller et antallssvar i a-oppgaven, er det rimelig å forvente at de også svarer 18 eller 18 kg på b-spørsmålet. Når vi undersøker hvordan den enkelte elev svarer på disse spørsmålene, finner vi at hele 90 % av de elevene i 10. klasse som gir et «mengdesvar» i a, også svarer 18 kg i b. Tilsvarende er det 67 % av de elevene som gir et «antallssvar» i a, som også svarer 18 på spørsmål b. De tilsvarende tallene for 8. klasse er 87 % og 71 %.

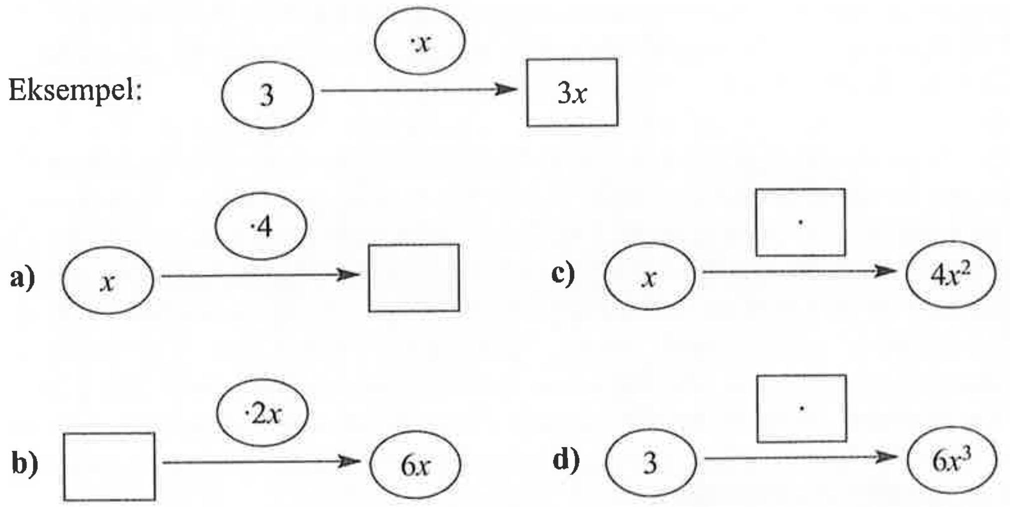
Oppgave 12b (10. klasse) / Oppgave 11b (8. klasse)	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	22	18
$g + p$ (Riktig svar)	1	4
2 eller 2 kg	5	4
18 eller 18 kg	64	64
194, 169 + 25, 169 kr + 25 kr og lignende	1	4

Tabell 42: Oppgave 12b (10. klasse) / Oppgave 11b (8. klasse). Svarfordeling i prosent

Noen elever svarer 2 eller 2 kg. Sammenligner vi disse svarene med svarene på a-spørsmålet, finner vi at disse elevene ser på *g* som 1 kg gulrøtter og *p* som 1 kg poteter.

3.7 Tilordninger

Oppgave 9
Sett inn i rutene det som mangler:



Oppgaveeksempel 12: Tilordninger

Både i noen lærebøker og i undervisningen har det vært vanlig å representere algebraiske sammenhenger skjematisk som i oppgaveeksempel 12. Denne oppgaven tar sikte på å undersøke elevenes forståelse av slike representasjoner. Sammenlignet med oppgaver som bare er representert med algebraiske uttrykk, ser vi at elevene i 10. klasse behersker dette relativt bra.

Oppgave 9a	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	12	6
$4x$ eller $x4$ og lignende (Riktig svar)	80	86
x^4	2	8
Andre svar	5	1

Tabell 43: Oppgave 9a. Svarfordeling i prosent

Vi legger her igjen merke til en økende forveksling med potensnotasjoner i 10. klasse. Som pekt på tidligere kommer dette trolig av at elevene prøver å bruke det lærestoffet som er «nytt» eller «aktuelt» for klassetrinnet.

Oppgave 9b	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	12	6
3 (Riktig svar)	52	81
4	4	1
x eller $1x$	3	–
$3x$	21	9
12, $8x$, $12x$, $8x^2$, $12x^2$ eller $6 + 2 + x^2$ og lignende		3 1

Tabell 44: Oppgave 9b. Svarfordeling i prosent

Utgangspunktet er ukjent i oppgave b, mens det var spurt etter sluttposisjonen i oppgave a. Vi må derfor forvente at spørsmål b er vanskeligere enn a, selv om sammenhengene mellom de tre elementene er av samme type i begge spørsmålene. Vi merker oss at dette har skapt betydelig større problemer for de yngre elevene. Noen svartyper viser at elevene ikke fullt ut forstår denne måten å illustrere sammenhenger på. De tenker seg pilen i «motsatt retning» og får svar som 12, $12x$, $12x^2$, $8x$, $8x^2$ eller $6 + 2 + x^2$.

Tabell 44 viser at $3x$ er den vanligste feilen, spesielt i 8. klasse. Siden vi i denne datainnsamlingen ikke har spurt om begrunnelse for svaret, kan en her bare komme med mulige hypoteser om hvordan elever tenkte med utgangspunkt i mønstre i svartyper. Svaret $3x$ kan ha sin bakgrunn i en ufullstendig forståelse av figuren, eller også i begrepsmessige forhold. Det kan være slik at de elevene som ser på x som en «merkelapp» for en enhet eller et objekt, vil trekke med seg denne «merkelappen» også i svaret. Denne forklaringen styrkes når vi sammenligner svarene til den enkelte elev på denne oppgaven med de svar de gav på oppgavene 5c og 3c. I 8. klasse var det for eksempel 79 % av de elevene som svarte $3x$ på denne oppgaven, som også svarte $7n$ på oppgave 3c. Det er viktig å peke på at det er lettere å få informasjon av denne typen gjennom en samtale med en enkelt elev.

I de to siste spørsmålene skal elevene beskrive den multiplikasjonen som må utføres. Det kan være flere grunner til at disse oppgavene er vanskeligere enn de to foregående. Det er som regel mer problematisk å beskrive *forandring* av uttrykk enn start og sluttpunkt i algebraiske sammenhenger. Det er rimelig å tro at eksponentene i c og d skaper ekstra utfordringer i disse oppgavene. Som pekt på tidligere har elevene i 8. klasse hatt lite undervisning om potensuttrykk. Det er derfor rimelig å forvente en mye større forskjell mellom klassetrinnene på disse to spørsmålene enn på de to første.

Oppgave 9c	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	23	9
$4x$, $4 \cdot x$ eller $x4$ og lignende (Riktig svar)	4	65
2	7	1
4	12	4
4^2 eller 16	28	8
$4x^2$	4	4
Endrer innholdet på flere steder i skjemaet	6	–

Tabell 45: Oppgave 9c. Svarfordeling i prosent

Den vanligste feiltolkningen i oppgave c, på begge klassetrinn, er 4^2, se tabell 45. En nærliggende tolkning av svar av denne typen er at elevene leter etter et mønster mellom leddene i oppstillingen. Da mangler det 4^2. En annen mulig forklaring er at de oppfatter uttrykket $4x^2$ som $(4x)^2$. Svaret 16 er også registrert i denne gruppen av svar, siden en del elever vet at $4^2 = 16$. Spesielt finner en dette i 10. klasse. En tilsvarende argumentasjon kan føres for å begrunne svaret 4: Det mangler et firetall. Svaret 2 kan også oppfattes som et forsøk på å skape et mønster. Totallet i eksponenten må da komme fra en eller annen plass – det mangler altså et totall. Noen elever prøver å finne et mønster ved å endre på flere plasser i skjemaet og skriver for eksempel:

$$2x \xrightarrow{\boxed{\cdot 2x}} 4x^2$$

Disse elevene viser at de behersker et kunnskapselement fra algebra, men svarer ikke på det spørsmålet som oppgaven stiller. Legg merke til at dette stort sett bare er sjetteklassinger.

Vi finner tilsvarende forsøk på å finne et mønster i skjemaet i oppgave d. Fordelingen av de vanligste kategoriene av svar er vist i tabell 46.

Oppgave 9d	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	26	9
$2x^3$ (Riktig svar)	15	69
2	11	2
2^3	11	2
6	4	–
$2x$	6	3
x^3	3	1
$2x^2$	3	6
$3x^3$	2	3

Tabell 46: Oppgave 9d. Svarfordeling i prosent

3.8 Bokstav som et generelt tall

I diskusjonen kapittel 1.8, side 10, ble det blant annet pekt på forskjellen mellom oppfatningen av en bokstav som et spesifikt ukjent tall og den oppfatning at en bokstav kan stå for et generelt tall. Den første oppfatningen har en hatt bruk for i flere av de oppgavene som er diskutert tidligere, se for eksempel oppgaveeksempel 10, side 47, og oppgaveeksempel 11, side 49. I dette avsnittet vil vi bruke oppgaveeksempel 13 til å diskutere andre elementer ved elevenes oppfatninger knyttet til bruk av bokstaver for å representere generelle tall. Formatet på denne oppgaven er nok uvant for en del elever, men en får likevel verdifull informasjon om elevtenkning.

Oppgave 12 (8. klasse) / Oppgave 13 (10. klasse)
Kryss av for rett svar:

a) $a + b + c = c + a + b$

☐ Dette er alltid sant ☐ Dette er aldri sant ☐ Dette kan være sant

Forklar hvordan du kom fram til svaret: ....

b) $4 + x = 4 + y$

☐ Dette er alltid sant ☐ Dette er aldri sant ☐ Dette kan være sant

Forklar hvordan du kom fram til svaret: ....

c) $2a + 3 = 2a - 3$

☐ Dette er alltid sant ☐ Dette er aldri sant ☐ Dette kan være sant

Forklar hvordan du kom fram til svaret: ....

d) $l + m + n = l + p + n$

☐ Dette er alltid sant ☐ Dette er aldri sant ☐ Dette kan være sant

Forklar hvordan du kom fram til svaret: ....

Oppgaveeksempel 13: Alltid, aldri eller kan være sant

I spørsmål a vil vi undersøke om elevene vet at det ikke spiller noen rolle i hvilken rekkefølge en adderer. Spørsmål b fokuserer på om elevene vet at x og y kan representere et generelt tall, og at likheten kan gjelde hvis x og y har samme verdi. I spørsmål c undersøkes det i hvilken grad elevene vet at en bestemt bokstav må representere samme verdi i et bestemt problem. Og til sist, i spørsmål d for 10. klasse, om elevene på samme måte som i b-spørsmålet gir uttrykk for at bokstavene kan representere et generelt tall, noe som gjør likheten sann bare hvis m og p har samme verdi. Tabell 47 framstiller hvordan elevene på de to klassetrinnene krysser av på disse spørsmålene. (I tabellen er avkryssing i riktig rute markert med *.)

	Ubesvart	**Alltid sant**	**Aldri sant**	**Kan være sant**
Spørsmål a, 8. klasse	12	39*	12	33
Spørsmål a, 10. klasse	7	65*	9	18
Spørsmål b, 8. klasse	14	11	23	31*
Spørsmål b, 10. klasse	7	4	54	34*
Spørsmål c, 8. klasse	15	9	60*	14
Spørsmål c, 10. klasse	9	4	72*	14
Spørsmål d, 10. klasse	12	5	49	33*

Tabell 47: Oppgave 12 (8. klasse) / Oppgave 13 (10. klasse). Svarfordeling i prosent

Det er her verken tatt hensyn til kvaliteten på de forklaringer som er gitt, eller om det i det hele tatt finnes en forklaring. Det ser ut til at de yngste elevene krysser av mer tilfeldig enn de eldre, ved at de sprer seg mer mellom de tre alternativene. Åttendeklassingene gir også færre forklaringer enn tiendeklassingene. Av de elevene som har krysset av i *riktig* rute, er det i 8. klasse henholdsvis 31 %, 58 % og 43 % som har gitt forklaring på de tre spørsmålene. Tilsvarende tall for de fire spørsmålene i 10. klasse er henholdsvis 18 %, 23 %, 29 % og 25 %. Ser en på de elevene som har krysset av i gal rute, er prosentdelene uten forklaring mye høyere enn de prosenttallene som er nevnt over.

En ser også at de to spørsmålene der likheten *kan* være oppfylt under visse betingelser, er de vanskeligste for elevene på begge klassetrinn. Det er påfallende at alternativet *«Dette er aldri sant»* er mer attraktivt enn det korrekte svaret i disse tilfellene. En rimelig forklaring på det kan være at elevene har få erfaringer med likhetstegnet som symbol for likeverdighet i forhold til de erfaringer de har med det som et symbol som skiller en *regneoppgave* fra *svaret* på denne oppgaven. Vi vil diskutere dette nærmere når vi nedenfor analyserer noen typer av forklaringer som elevene gir.

Den vanligste korrekte forklaringen til spørsmål a går på at rekkefølgen ikke spiller noen rolle i addisjon, og det blir gitt svar som *«De har bare bytta rekkefølgen på tallene. Derfor blir svaret det samme»* og *«Bokstavene har like stor verdi uansett rekkefølge»*. Det er henholdsvis 17 % og 33 % av elevene på de to klassetrinnene som gir forklaringer av denne typen. Dette betyr at omtrent to tredeler av de elevene som har krysset av i riktig rute, og som gir forklaring, bruker denne argumentasjonen. Men det finnes også elevsvar i denne gruppen som røper andre, mer uklare, tanker knyttet til denne «bokstavregningen», som for eksempel:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: Det er det samme, men vanligvis står de i alfabetisk rekkefølge. Når vi legger sammen er de det samme hvilke faktorer som er først.

Elevsvar 21

Andre elever svarer med å argumentere med utgangspunkt i ett eller flere talleksempler, underforstått at disse viser det generelle. Disse elevene fokuserer da på svarene de får ved innsetting både på venstre og høyre side i likheten, som for eksempel: *«Svaret blir det samme alltid fordi hvis du regner $1 + 2 + 3 = 6$, snur du det, blir det $3 + 2 + 1 = 6$.»* Noen elever uttrykker at det er de samme størrelsene på begge sidene av likhetstegnet, mens andre igjen viser til at *bokstavene* er de samme på begge sidene. Den siste forklaringen *kan* være et tegn på at elevene oppfatter bokstavene som representanter for objekter.

For alle spørsmålene gjelder det at en rekke av forklaringene står i direkte motsetning til problemstillingen, mens andre fører en argumentasjon som ikke er relevant i forhold til den.

De vanligste feilsvarene i spørsmål a er basert på at rekkefølgen mellom bokstavene er forandret, som i elevsvar 22. Dette er aldri sant fordi:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: Det er riktig at bokstavene skal skilles fra hverandre men de skal stå i alfabetisk rekkefølge abc.

Elevsvar 22

I elevsvar 23 trekkes forbindelser mellom de variable og lesing av bokstavene. Dette er aldri sant fordi:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: abc er ikke det samme som a+b. á
Eks: bil er ikke det samme som hus

Elevsvar 23

Mens andre igjen, for eksempel i elevsvar 24, ser på bokstavene som objekter. Dette er aldri sant fordi:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: bcc abc = abc og c+a+b = cab det er helt forskjellige ting.

Elevsvar 24

I alle spørsmålene i oppgaveeksempel 13 ser en tydelig at mange elever oppfatter likhetstegnet som en operator. Tegnet er et signal om at en regneoperasjon eller en annen prosedyre skal utføres (se for eksempel beskrivelsen i kapittel 1.5, side 8). I denne oppgaven blir da for mange elever det uttrykket som står på venstre side av likhetstegnet, *«oppgaven»* og uttrykket på høyre side *«svaret»*. Dette er aldri sant fordi:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: Når det står a+b+c blir svaret = abc

Elevsvar 25

To tredeler av elevene i 10. klasse og 80 % i 8. klasse som i spørsmål a krysser av for *«Dette kan være sant»,* gir ingen begrunnelse for dette valget. Av de elevene som begrunner valget, viser de fleste til rekkefølgen av bokstavene med forklaringer av samme type som i elevsvar 22 og elevsvar 24. En annen type forklaringer går på at det er avhengig av verdiene til variablene om dette kan være sant, som for eksempel: *«Det kan være sant hvis de har samme verdi.»*

Spørsmål b viser seg å være det vanskeligste spørsmålet. For 10. klasse ser vi, tabell 47, at det er betydelig flere elever som tror at dette aldri kan være sant, enn at likheten kan være oppfylt under visse betingelser. Analysen av elevenes forklaringer vil gi oss *noen* ideer om hvorfor dette forholder seg slik.

Den vanligste korrekte forklaringstypen til spørsmål b går på at *x* og *y* er generelle uttrykk for tall og kan dermed ha samme verdi. Eksempler på svar: *«Kommer an på verdien av x og y. Hvis de har samme verdi, er det sant, hvis ikke, er det aldri sant»* eller:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: x og y er vanligvis forskjellige størrelser, men de kan også være like ved „slump" i en ligning

Elevsvar 26

Det er henholdsvis 9 % og 19 % av elevene på de to klassetrinnene som gir forklaringer av denne typen. Over to tredeler av de åttendeklassingene og tre firedeler av de tiendeklassingene som har krysset av i *riktig* rute, og som *skriver* en forklaring, bruker denne argumentasjonen.

En forklaring som trolig er basert på den samme tenkningen, er: *«Det spørs hva x og y er.»* Noen få elever, 1 %, argumenterer med utgangspunkt i ett eller flere talleksempler som oppfyller likheten.

De vanligste feilsvarene i spørsmål b finner en altså i den gruppen som har krysset av for at likheten aldri er sann. De vanligste av disse forklaringene går på at *x* og *y må* representere forskjellige verdier *fordi* de er symbolisert ved hjelp av forskjellige bokstaver. Svar som *«x og y er forskjellige uansett», «4 + x og 4 + y kan ikke være sant fordi x og y aldri står for samme tall»* og *«x og y verdiene er ikke lik i <u>samme</u> oppgave»* er typiske for denne tenkningen. Elevsvar 27 under illustrerer typiske elevsvar der de variable representerer objekter:

x er et annet ord/ting og y er et annet ord/ting.

Elevsvar 27

Henholdsvis 12 % og 29 % av alle elevene på de to klassetrinnene gir slike forklaringer.

I spørsmål a la vi merke til at en del elever betraktet likheten som en oppgave på venstre side og et svar på høyre side. Eksempler på slike svar er: *«Svaret i oppgaven kan ikke være sant pga. 4 + x blir 4x og ikke 4 + y»*, *«Fordi at man må ha med en y i oppgaven for at det kan bli y i svaret.»* og *«Kvar kjem y frå, ein kan ikkje plutseleg blande inn den når den ikkje sto i oppgåva»*. Disse feilsvarene har altså sin bakgrunn i en misforståelse av likhetstegnet som en operator. Dette er vesensforskjellig fra eksemplene over, der problemene var knyttet til forståelse av variabler i slike sammenhenger. Forklaringen *«Fordi det er ei likning og dei skal alltid være like på begge sider»* illustrerer en korrekt oppfatning av likhetstegnet, men knytter den til symbolene og ikke til de verdiene disse symbolene kan ha for at de skal være gyldige.

Tabell 47, side 55, viste at en del elever, henholdsvis 11 % og 4 % på de to klassetrinnene, krysset av for at denne likheten alltid var sann. Bare omtrent en tredel av disse elevene i 8. klasse og halvparten av disse elevene i 10. klasse begrunnet sine avkrysninger, noe som bare utgjør henholdsvis 4 % og 2 % av samtlige elever på disse klassetrinnene. Begrunnelsene er nokså ensartet blant disse elevene. De bruker resonnementet om at det er likegyldig hvilken bokstav en bruker til å representere den variable, derfor må likheten alltid gjelde. Elevsvar 28 er en illustrasjon på dette:

Y og X er ukjent så du spiller ingen rolle hvordan bokstav vi bruker

Elevsvar 28

Det er tydeligvis lettest å knytte et korrekt meningsinnhold til spørsmål c i denne oppgaven, se tabell 47, side 55. Forskjellen mellom oppgave c og de andre oppgavene er spesielt stor for elevene i 8. klasse. Dette kan ha sammenheng med at en i dette spørsmålet kan bruke strategier som ikke var brukbare i de foregående spørsmålene fordi det i disse var mer enn én variabel. Det blir derfor her mulig å bruke noen av de argumentasjonene som ikke førte fram i de foregående spørsmålene. Likevel er det en stor del av elevene som bare krysser av uten forklaring. Henholdsvis 43 % og 29 % av dem som krysser av i riktig rute, gir ingen forklaring.

Elevsvar 29 er et eksempel på en argumentasjon som er knyttet til resultatene av en addisjon og en subtraksjon.

Forklar hvordan du kom fram til svaret: 2a er samme størrelse på begge sider og kan ikke trekkes fra på den ene siden og legges til på den andre om likhets-tegnet skal holdes i hevd.

Elevsvar 29

Noen elever fokuserer bare på fortegnene i sine forklaringer, som: *«+ og – er ikkje det same.»* Det er henholdsvis 26 % og 41 % av alle elevene som gir forklaringer av denne typen. Også i denne oppgaven er det noen elever, 1 % og 4 %, som baserer sin argumentasjon på ett eller flere talleksempler.

Blant de elevene som krysser av i feil rute, er det svært få som i det hele tatt gir noen forklaring på valget sitt. Den eneste feiltypen vi finner som det er mulig å spore tilbake til en systematisk feiltenkning, kan illustreres med følgende elevsvar: *«Når du flytter tallene over =, må du skifte fortegn.»* Disse elevene refererer altså til en prosedyre for ligningsløsning. Denne argumentasjonen blir brukt som forklaring *både* av dem som krysser av for *«Dette er alltid sant»* og for *«Det kan være sant»*. Det er henholdsvis 2 % og 3 % av elevene som argumenterer slik.

Spørsmål d, som bare er med i 10. klasse, er av samme struktur som spørsmål b. Nå har en tre variable størrelser på hver side av likhetstegnet, og to av dem finnes på begge sider. Selv om en altså kan bruke samme resonnement som når en løste b-oppgaven, ville en forvente at denne oppgaven er mer komplisert fordi den har flere variabler og ikke inneholder et eksplisitt tall. Dette stemmer imidlertid ikke med tallene i tabell 47, side 55. Vi ser der at det er omtrent like mange elever som krysser av i riktig rute på disse to spørsmålene. Likeledes er det omtrent like mange elever, 54 % og 49 %, som krysser av i ruten for *«Aldri sant»*. Ser vi nærmere på hvordan den enkelte elev svarer på de to spørsmålene, finner vi at elevene i 10. klasse i høy grad er konsekvente. 83 % av de elevene som krysser av for *«Aldri sant»* i spørsmål d, gjør det samme i spørsmål b. Tilsvarende, 77 % av dem som krysser av for *«Kan være sant»* i d-spørsmålet, gjør det også i spørsmål b. Rett nok er det mange av disse elevene som ikke gir forklaringer på sine valg, men de høye prosenttallene er sterke indikasjoner på konsekvent tenkning. Dette støttes av analysen av de elever som forklarer sine valg. Blant disse elevene er det henholdsvis 85 % og 86 % som gir forklaringer til *«Aldri sant»* og *«Kan være sant»* i spørsmål d, som også gir tilsvarende forklaringer i spørsmål b. De elevene som krysser av for *«Alltid sant»*, er mer «ustabile» i sine svar på disse to oppgavene, bare 40 % av dem som krysser av i denne ruten på spørsmål d, gjør det samme i b. Med bakgrunn i dette kan en for spørsmål d vise til drøftingen av elevenes resonnementer som ble gjort i tilknytning til b-spørsmålet.

3.9 Fra situasjon til algebraiske symboler

I kapittel 1.2, side 4, diskuterte vi kort ulike elementer av matematisk kompetanse. Der ble det pekt på at ofte når en skal løse problemer i en kontekstuell situasjon, må en foreta en matematisering. Dette kan for eksempel gå ut på å uttrykke en bestemt sammenheng ved hjelp av matematiske kunnskaper, oftest ved bruk av matematiske symboler. I noen tilfeller er disse tall og i andre tilfeller bokstaver som representerer variable størrelser. Hensikten med den algebraiske matematiseringen er å kunne omforme sammenhengene for å finne en løsning på problemet. Vi har tidligere i diskusjonen av de diagnostiske oppgavene møtt en slik enkeltoppgave, oppgave 6e for 8. og 10. klasse (se side 23). I oppgaveeksempel 14 møter elevene i 8. og 10. klasse to relativt enkle spørsmål knyttet til algebraisk matematisering.

Oppgave 10

a) Håkon har en årslønn på 100 000 kroner
Berits årslønn er en og en halv gang så stor som Håkons årslønn.

Hvor stor er Berits årslønn? Svar: Berits årslønn er .... kroner

b) Ivar har en årslønn på x kroner.
Roalds årslønn er dobbelt så stor som Ivars årslønn.

Hva er Roalds årslønn uttrykt ved x? Svar: Roalds årslønn er .... kroner

c) Anitas årslønn er en og en halv gang så stor som Ivars årslønn.

Hva er Anitas årslønn uttrykt ved x? Svar: Anitas årslønn er .... kroner

Oppgaveeksempel 14: Hvor stor er lønnen?

På samme måte som i flere av de andre oppgavene som er diskutert i veiledningsheftet, møter elevene også her problemer som ikke i første rekke er knyttet til algebra, når de skal komme fram til et korrekt svar. Vi vet at uttrykk som *«dobbelt så stor som»*, *«en og en halv gang så stor som»* og lignende er uklare for mange elever. I slike problemstillinger skal en sammenligne én størrelse (mengde, lengde, lønn osv.) med en annen ved å se på *forholdet* mellom størrelsene. En annen måte å sammenligne størrelser på er å se på forskjellen mellom dem, altså *differansen*. For en elev kan det være interessant å vite at Liv er 10 cm høyere enn Peder, men trolig lite interessant å vite forholdet mellom høydene deres. Elevene har flere erfaringer med sammenligninger der en betrakter forskjeller, enn å betrakte forhold. Daglig språkbruk kan også bidra til forvirring. En bruker for eksempel ofte ordene tredobbelt og firedobbelt i betydningen tre, respektive fire, ganger så mye som. Vi ser noen utslag av slike problemer nedenfor.

Oppgave 10a	**8. klasse**	**10. klasse**
Ubesvart	7	6
150 000 (Riktig svar)	22	36
50 000	11	6
250 000	46	48

Tabell 48: Oppgave 10a. Svarfordeling i prosent

Legg merke til den lave andelen av rette svar på denne oppgaven. 250 000 er det vanligste feilsvaret. Dette har trolig sin bakgrunn i at elevene er opptatt av forskjellen i slike sammenhenger, og adderer så 150 000 til Håkons årslønn. Som en ser, er dette feilsvaret mye mer utbredt enn det korrekte svaret for begge klassetrinn. 50 000 er også et vanlig feilsvar. Elevene kan ha lest teksten feil og tro at det står «en halv gang så stor som Håkons årslønn», eller igjen at de bare er opptatt av forskjellen.

Oppgave 10b	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	32	14
$2x$ eller $x + x$ (Riktig svar)	32	60
x	5	2
$x \cdot x$ eller x^2	14	18
100 000	3	1
200 000	4	1
Andre tallsvar	6	2

Tabell 49: Oppgave 10b. Svarfordeling i prosent

En del av de problemene som det er pekt på, og som elevene tydelig har illustrert eksisterer i oppgave a, blir unngått av mange i oppgave b. Det har trolig forbindelse med at sammenheng mellom størrelser ved dobling har en annen funksjon, språklig sett, enn i uttrykket *en* og *en halv gang så stor som,* slik spørsmålet er formulert i oppgave a. Ordet dobbelt er språklig mer direkte knyttet til forhold enn uttrykket ... *ganger så stor som.* Det er derfor ikke uventet at så mange svar faller i kategorien $2x$ eller $x + x$. Dette kommer tydelig fram når en sammenligner svarene til de enkelte elever på disse to spørsmålene. For eksempel er det blant de elevene i 10. klasse som gir riktig svar på oppgave a, hele 74 % som svarer $2x$ på oppgave b, mens bare 44 % av dem som gav riktig svar på oppgave b, også hadde oppgave a riktig. Nesten alle de resterende i gruppen av rette b-svar skrev 250 000 på a-oppgaven. Feilsvaret x er rimelig å fortolke som at elevene har funnet forskjellen. Det lave antallet svar av denne typen støtter også påstanden over. Konklusjonen vår er at flesteparten av elevene i 10. klasse behersker den relativt enkle matematiseringen i denne oppgaven, mens det er verdt å merke seg at mange åttendeklassingene har problemer med dette.

Blant feilsvarene på oppgave b finner vi bare en hovedkategori, nemlig de som svarer $x \cdot x$ eller x^2. Disse elevene forveksler altså addisjon med multiplikasjon. De ser kanskje at det må bli x to ganger og multipliserer x med x.

Noen av de spørsmålene vi har reist ovenfor gjennom diskusjonen av elevsvarene på spørsmålene a og b, kan belyses videre gjennom en sammenligning mellom elevenes svar på alle delspørsmålene.

Oppgave 10c	8. klasse	10. klasse
Ubesvart	39	25
$1{,}5x$ (Riktig svar)	13	32
$0{,}5x$ eller $x/2$	4	6
x	6	4
$2{,}5x$	7	13
$x^{0,5}$	2	1
$x^{1,5}$	1	1
$x^{2,5}$	1	2
Andre potenssvar	5	7
Tallsvar	10	2

Tabell 50: Oppgave 10c. Svarfordeling i prosent

Vi legger merke til at det er nesten like mange elever i 10. klasse som kommer fram til korrekt svar på denne oppgaven, som i det var i oppgave a. Vi finner at omtrent 60 % av de elevene som gir riktig svar på oppgave a, også finner en korrekt løsning på oppgave c. Og også motsatt, 60 % av dem som svarer riktig på c, gjør det samme på a. Når vi derimot sammenligner hvordan den enkelte elev svarer på spørsmålene b og c, finner vi ikke dette mønsteret. Bare 50 % av dem som svarer riktig på oppgave b, gjør det samme på oppgave c. Motsatt er det 95 % av dem som svarer riktig på c, som også har riktig svar på oppgave b. Tilsvarende tall for 8. klasse er henholdsvis 34 % og 86 %. Det er også interessant å legge merke til at samtlige elever i 8. klasse som svarte $2{,}5x$ på oppgave c, gav svaret $2x$ på oppgave b. Tilsvarende tall for 10 klasse var 97 %. Dette understreker igjen at elevene er mer opptatt av forskjellen mellom størrelsene enn forholdet mellom dem, og at dobling er et spesialtilfelle. Konklusjonen vår er at av de elever som betrakter forholdet korrekt, er det flertallet som også klarer å representere dette ved å bruke algebra.

På samme måte som i oppgave b finner en at den eneste kategorien av feilsvar er bruk av potenser. I tabell 50 har vi spesielt vist antall svar med eksponenter 1,5 (riktig forhold), 0,5 (differanse) og 2,5 (adderer forholdet til utgangspunktet).

DEL 2
IDEER TIL UNDERVISNINGSAKTIVITETER

I denne delen presenterer vi en samling undervisningsaktiviteter som tar opp noen utfordringer i forbindelse med det å utvikle en god forståelse av algebra. Utbredte problemer og misoppfatninger har stått sentralt i diskusjonen av oppgavene i den første delen av veiledningsheftet. Bruken av bokstaver som symboler for variable størrelser stiller krav til abstrakt tenkning, og elevene skal gjennom undervisningen utvikle en grunnleggende forståelse for denne bruken av bokstaver. Samtidig skal de lære å skille denne bruken av bokstaver fra andre måter bokstaver blir brukt på i matematikk. Siktemålet med undervisningen bør være at bokstaver brukt som symboler for variable størrelser skal oppleves meningsfulle. Dette kan oppnås ved å legge vekt på forholdet mellom det matematiske symboluttrykket og den situasjon uttrykket relaterer seg til.

Språket er et viktig redskap for å utvikle gode begreper og å gi mening til symboler. Termen språk refererer til all bruk av tegn og signaler som del av en kommunikasjon. Vi har her konsentrert oss om hvordan en *bevisst bruk av skriftlig eller muntlig norsk* kan bidra til å styrke læringen i algebra.

I de aktivitetene vi foreslår, vil bruk av elevenes dagligspråk[1] stå sentralt. Skal en hjelpe elevene til å utvikle forståelse av matematikk, er det nødvendig å ta utgangspunkt i de erfaringer de har, og det språk de bruker for å uttrykke disse erfaringene. Det blir lærerens oppgave å knytte dagligspråket til elevene til det matematiske språket.[2] Dette tas opp i kommentarene til de ulike undervisningsaktivitetene. Vi vil knytte bruken av bokstavsymboler til ulike typer av *situasjoner* som kan danne utgangspunkt for åpne og reflekterende samtaler og diskusjoner. Selv om vi har lagt vekt på å bruke situasjoner som elevene burde ha et visst kjennskap til, vil graden av gjenkjenning variere fra elev til elev.

Å lese og lytte i matematikk
Å kunne lese matematiske tekster er nødvendig for å tilegne seg mer matematisk kunnskap og for å forstå hva matematiske problemer omhandler, noe som igjen er en nødvendig forutsetning for at et matematisk problem kan løses.

Mengden av tekst en bør ha i oppgaver og læremateriell i matematikk, har blitt diskutert blant lærere i ulike sammenhenger. Noen hevder at mye tekst vil skape unødvendige problemer for lesesvake elever. De peker på at noen av de problemer en elev måtte ha med å finne svar på bestemte oppgaver, ikke trenger å skyldes manglende forståelse i matematikk, men bunner i leseproblemer. For å unngå leseproblemene ønsker en derfor så langt som mulig å minimalisere bruken av tekst i matematikkoppgaver. En ulempe med en undervisning av denne typen er at den lett vil kunne føre til at en i første rekke retter oppmerksomheten mot å praktisere de matematiske ferdighetene. I algebra vil da arbeidet til elevene lett avgrenses til det å manipu-

[1] Dagligspråk refererer her til det vi noe upresist kan kalle vanlig bruk av norsk uten noen spesiell referanse til matematikk.
[2] Matematisk språk refererer til en korrekt måte å uttrykke matematikk på ved bruk av norsk. Forskjellen mellom det vi kaller elevenes dagligspråk, og et matematisk fagspråk er ofte stor. Det er lærerens oppgave å bygge en bro mellom disse.

lere med symboler og i mindre grad til å arbeide med å knytte algebra til bruken i praktiske situasjoner. Slike situasjoner vil nødvendigvis måtte beskrives. I oppgaver blir slike situasjoner oftest beskrevet skriftlig, eventuelt med støtte i en tegning eller figur. Det er ved å legge mer vekt på sammenhengen mellom situasjoner og algebraiske symboler at en kan bidra til å gjøre symbolene meningsbærende for elevene (se også kapittel 1.2, side 4). Å bruke språket, muntlig og skriftlig, er etter vår mening et nødvendig redskap for å utvikle god begrepsforståelse. Nedenfor presenteres forslag til noen aktiviteter som kan hjelpe elevene til å lese og forstå en matematisk tekst, heller enn å prøve å unngå denne typen tekst.

I forslagene til elevaktiviteter har vi bestrebet oss på å bruke et språk som skal ligge tett opp til dagligspråket. Dette forholdet kan være problematisk, enten symbolene er tallsymboler, eller det er bokstaver som symboler for variable størrelser. Elevene må i begge tilfeller gi symbolene et meningsinnhold. Vi legger spesiell vekt på å arbeide med de symbolene som er nye for elevene, eller får en utvidet betydning når en går fra aritmetikk til algebra, som for eksempel likhetstegnet.

I aktivitetene legges det vekt på at elevene skal bli vant til å lytte til hverandre på en måte som fremmer refleksjon rundt begreper og symboler for disse begrepene. Elever har ofte en forestilling om at det i matematikk gjelder å komme raskest mulig fram til et svar, og at det å arbeide med matematikk er ensbetydende med å produsere svar. De kan derfor være snare med å avbryte den som snakker, og selv gi svaret og på den måten motvirke en nødvendig refleksjon rundt matematiske begreper.

Å skrive og snakke matematikk

Å bruke språket aktivt ved å sette ord på det en arbeider med, er et viktig redskap for å utvikle solide matematiske begreper. Språket er et hjelpemiddel til å klargjøre egne ideer og oppfatninger. Prosessen med å sette ord på noe bidrar til egen læring ved at en blir bevisst på sine ideer. Slik vil også ulike typer misoppfatninger komme til uttrykk. På grunn av dette er det viktig at læreren ikke griper inn i prosessen for tidlig. Det er avgjørende at elevene læres opp til å lytte til hverandre, og at det ikke bare fokuseres på å komme fram til et rett svar.

Skriving er et godt redskap for matematikklæring, særlig hvis elevene læres opp til å skrive for å klargjøre egne refleksjoner rundt matematiske prosesser og begreper. Hva er mine tanker om variabler som jeg blir presentert for i en bestemt sammenheng? Hva er det jeg er usikker på? Hva er det jeg opplever som hensikten med det vi arbeider med? Hva trenger jeg mer kunnskap om? Skal elevene oppleve skrivingen som meningsfull, må den få konsekvenser for den videre undervisningen. En kan for eksempel bruke det som er skrevet, som utgangspunkt for videre diskusjon av en problemstilling der hovedhensikten er å bidra til refleksjon rundt et spesifikt tema.

Både det å skrive og det å snakke kan trolig ikke overvurderes som hjelpemidler når det gjelder å utvikle matematisk forståelse. Ved å framheve dette i de aktivitetene vi foreslår, vil vi illustrere hvordan bevisst bruk av språk kan øke aktiv deltakelse og refleksjon og dermed forståelse av algebraiske begreper.

4 Undervisningsaktiviteter

I kapittel 1.1 ble det pekt på at læring av algebra har sine røtter i den matematikken en lærer i de første årene i skolen, når elevene legger merke til regelmessigheter i arbeid med tall. Fra denne begynnelsen utvikler de kunnskaper om egenskaper ved tallene og regneoperasjonene, egenskaper som senere skal generaliseres til kunnskaper i algebra. En del av dette kapitlet vil dreie seg om generalisering av denne typen. Dette vil handle om fem aspekter som er essensielle for læring av algebra: 1) forståelse av likhet, 2) kunnskaper om sammenheng mellom regneoperasjonene, 3) forståelse av viktige egenskaper ved tallene, 4) å kunne beskrive mønstre og sammenhenger og 5) bokstaver brukt til å representere generaliserte tall. Disse aspektene vil bli dekket gjennom de aktivitetene som blir presentert. Før dette arbeidet vil vi imidlertid drøfte hvordan en kan bruke diskusjoner mellom elever i begrepsdanning av denne typen.

Elevaktivitetene som følger, kan som oftest brukes på ulike måter i klasserommet. Det er til dels presentert aktiviteter hvor det inngår en rekke sammenhengende oppgaver, og hvor en har konkretisert en mulig start på arbeidet. Videre følger kommentarer til hvordan læreren kan gå fram i forhold til gjennomføringen i klassen. Dette betyr ikke at en må følge forslagene slavisk. Denne formen er valgt fordi en ønsker å gi konkrete eksempler. Lærerne bør selv vurdere, endre, videreutvikle og tilpasse forslagene slik de finner det hensiktsmessig. Som oftest er det også nødvendig at elevene gis flere oppgaver av den foreslåtte typen å arbeide med for at de skal oppnå det ønskede læringsutbytte.

4.1 Organisering med sikte på diskusjoner

Det synes å være enighet om at dersom en ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de få anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk is future thinking.*

Dette innebærer at en i de matematikktimene som omhandler begrepsdanning, må legge opp til en variert og bevisst bruk av språk, slik det er framhevet i innledningen til del 2. Lærerens oppgave er å skape en atmosfære i klassen som bidrar til åpne og reflekterende diskusjoner[3], og å organisere dette på en måte så alle elevene deltar aktivt. En undervisning med en lærerdominert stil og med hovedvekt på individuelt arbeid vil holde både mengden av og kvaliteten

[3] Lærerens rolle i klasseromsdiskusjoner er det redegjort for i tidligere hefter fra KIM-prosjektet, som «Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk», «Veiledning til tall og tallregning» og «Veiledning til funksjoner».

på diskusjoner på et lavt nivå; noen lærere assosierer elevdiskusjoner med et høyt støynivå og mangel på disiplin.

Ulike måter å organisere arbeidet på kan ha sine fordeler og ulemper. Det viktige er at læreren er bevisst på og utnytter dette til å legge forholdene til rette slik at alle elevene kan få varierte erfaringer når det gjelder å reflektere rundt matematiske begreper. Læreren bør utnytte den dynamikken som ligger i å veksle mellom ulike måter å organisere arbeidet på, slik dette er beskrevet nedenfor.

Individuelt arbeid
Individuelt arbeid skal gi elevene mulighet til å tenke over og utvikle sine egne ideer knyttet til en matematisk problemstilling eller oppgave. En bør la elevene få nok tid til å tenke igjennom en gitt situasjon eller problemstilling individuelt før de blir bedt om å prøve ut tankene sine i par eller i en gruppe. Hvis arbeidet starter direkte i en gruppe, kan det lett bli slik at de flinkeste eller mest verbale elevene «kjører over» den eller dem som de skal samarbeide med. Ofte kan det være nyttig at elevene setter ned noe skriftlig som en del av dette individuelle arbeidet, som de så kan ta med seg til partneren eller gruppen sin.

Arbeid i par
Å la elevene diskutere to og to legger forholdene til rette for at alle skal kunne være aktive i diskusjoner i matematikk uten at det oppleves som truende. Dette er spesielt viktig fordi en vet at mange elever har liten erfaring med å diskutere i matematikk og lett føler seg usikre. Å arbeide i par er også en organisasjonsform som kan brukes uten store forberedelser fra lærerens side.

Arbeid i grupper
Gruppediskusjoner er viktige for at elevene skal lære å uttrykke og klargjøre sine matematiske ideer ved å teste dem ut på flere andre. I en gruppe vil det vanligvis bli større variasjon i innfallsvinkler enn i parvise diskusjoner, og elevene lærer å snakke matematikk mens flere hører på. Diskusjonen i en gruppe vil også oftere få en mer argumenterende stil enn diskusjoner mellom to elever. Før en eventuell klassediskusjon kan en vurdere å la to grupper sammenligne og diskutere sine konklusjoner.

Klassediskusjoner
Ved å la hvert par eller hver gruppe presentere sine forslag for klassen kan elevene få innblikk i ulike måter å angripe et problem på. Å oppleve en slik variasjon i innfallsvinkler kan bidra til at elevene utvikler solidere begreper og blir mer fleksible i sin måte å analysere et problem på. Det at det er deres egne forslag som blir tatt opp og diskutert, virker også motiverende.

4.2 Utforskning og eksperimentering som utgangspunkt for diskusjoner

AKTIVITET 1 «Hva er regelen min?»

Oppgave 1
Studer tegneserien «Hva er regelen min?».
Hvorfor tror dere Lise svarer Jan på den måten hun gjør, når han sier at han har gjettet regelen? Tenk igjennom hvordan dere selv skal svare når dere spiller.

Aktivitet 1, oppgave 1

Oppgave 2
Spill så «Hva er regelen min?». Bytt på å være den som bestemmer en regel, og den som skal gjette hva regelen er. Dere må begge passe på å holde oversikt slik at dere vet hvilke tall som hører sammen.

Forklar *hvordan* det kan være nyttig å tenke når dere prøve å finne regelen raskest mulig.

Aktivitet 1, oppgave 2

Kommentarer til aktivitet 1

Utforskning og eksperimentering er velegnet til å introdusere sentrale sider av læreplanens faginnhold i algebra. Det er lite trolig at alle elever har erfaring med «Hva er regelen min?». Tegneserien i oppgave 1 er bare tenkt brukt i en startfase. Elevene bør gjøre denne aktiviteten flere ganger for å få varierte erfaringer før de går videre med aktivitet 2 og aktivitet 3. Det er trolig hensiktsmessig å bruke perioder på 5 til 10 minutter til aktiviteter av denne typen. Hensikten er at elevene skal få erfaring med å uttrykke sammenhenger mellom tall før en setter søkelyset på å ikle slike sammenhenger en algebraisk språkdrakt. Aktiviteten passer best i grupper med to eller tre elever. Såpass små grupper er lette å organisere. Dette er viktig med tanke på at alle elevene bør involveres aktivt og få trening i å formulere seg. I større grupper vil ofte noen ta rollen som aktive, mens andre bare hører på. Å sette ord på en slik regel er god trening i å uttrykke seg matematisk.

Elevene må bytte på rollene. Når den ene setter ord på noe, må den andre være aktivt lyttende. Å være aktivt lyttende innebærer å stille spørsmål og også noen ganger å gi noe hjelp. Det er viktig at læreren passer på at en ikke overtar for den som har ordet. Begge parter må gis mulighet til selv å reflektere over det som sies, og eventuelt revurdere dette. Elevene vil trolig trenge noe opplæring i forhold til dette.

Klassediskusjoner kan bidra til at elevene får oversikt over det de arbeider med. Dette gir læreren anledning til å rette oppmerksomheten mot sentrale kunnskapselementer i det elevene har arbeidet med i gruppene. Læreren bør legge vekt på å klargjøre eventuelle motsetninger og problemer i det som kommer fram i gruppediskusjonene, noe som ytterligere bidrar til refleksjon rundt læringsinnholdet.

Under arbeidet i gruppene vil trolig elevene ha opplevd et behov for å systematisere dataene. Dette gir læreren anledning til å introdusere tabeller som et nyttig verktøy for slik systematisering.

AKTIVITET 2 Systematisere, gjette, sjekke og forbedre

En datamaskin kan programmeres til å bruke bestemte regler når den får et tall. Den kan ha et stort antall slike regler. De tallene som gis til datamaskinen, kaller vi her *starttall,* og de tallene som maskinen gir tilbake etter å ha brukt en regel, kaller vi her *resultattall.* Det er viktig å holde oversikt over hvilke starttall som hører sammen med hvilke resultattall.

Oppgave 1
Vera har lekt med datamaskinen. Hun har gitt den starttall og bedt den bruke bestemte regler for å beregne de tilhørende resultattallene. Nedenfor har vi satt opp tabeller som viser Veras starttall og resultattall da hun bad maskinen bruke reglene A, B, C og D.

Starttall	3	5	0	2,7	27
Resultattall	2	4	–1	1,7	26

Starttall	4	11	0	–5	3,2
Resultattall	2	5,5	0	–2,5	1,6

Starttall	5	8	0	1,5	100
Resultattall	9	15	–1	2	199

Prøv å finne reglene A, B, C og D som maskinen har brukt.
Tenk over hvordan du vil forklare de reglene du har funnet, for partneren din.

Skriv ned reglene dine.

Du og partneren din skal så forklare for hverandre, annenhver gang, hva hver av reglene går ut på.

Snakk sammen om de utregningene dere har gjort, og hvordan dere forklarer reglene. Forklarte dere reglene på samme måte?

Aktivitet 2, oppgave 1

Når en skal finne en regel, er det ofte nyttig å arbeide på en systematisk måte. En kaller denne måten å arbeide på for å systematisere, gjette, sjekke og forbedre fordi en

- først systematiserer opplysningene for å skape en oversikt
- så gjetter en hva som kan være regelen
- deretter sjekker en om denne regelen passer for alle de tallene en har
- hvis denne regelen ikke stemmer for alle tallene, prøver en å forandre eller forbedre regelen slik at den skal passe for alle tallene

Ofte må en gjøre dette flere ganger før en finner en regel. Det vi her har kalt å gjette, er ikke tilfeldig gjetting, fordi en bruker den informasjonen en har samlet, for eksempel fra en tabell.

Oppgave 2

a) **Finn fram til regler ved å *systematisere, gjette, sjekke og forbedre* for hver av tabellene nedenfor.**
Når du mener du har funnet en regel som passer for alle tallene, skal du bruke den til å fylle ut resten av tabellen. **Skriv til slutt regelen din.**

Starttall	4	7	9	3	0	10
Resultattall	12	21	27	9	...	...

Starttall	5	6	3	10	2	0
Resultattall	12	14	8	22	...	...

Starttall	0	1	3	6	7	100
Resultattall	1	6	16	31	...	...

Starttall	1	3	5	8	12	100
Resultattall	2	8	14	23	...	...

b) **Diskuter og sammenlign dine resultater med partneren din.**
Har dere kommet fram til samme regel?

c) En regel kan ofte uttrykkes på ulike måter. Vi kan si at innholdet i regelen er det samme, selv om regelen kan uttrykkes ulikt.
Har dere funnet regler som dere har uttrykt ulikt?
Prøv i så fall å avgjøre om innholdet i reglene likevel er det samme.

Aktivitet 2, oppgave 2

Kommentarer til aktivitet 2

Denne aktiviteten er ganske styrt, og den er tenkt som en hjelp i forhold til diskusjoner som kan ha oppstått under arbeidet med *«Hva er regelen min?»*. Gjennom å gi elevene rom for refleksjoner over egne løsninger legger en forholdene til rette for læring. Et mål med aktivitet 2 er å bevisstgjøre elevene på hvordan de kan gå fram for å finne en regel. I en innledende fase bør læreren være forsiktig så han ikke for raskt kommer med de «gode tipsene» og de «rette svarene».

Aktivitet 2 tar sikte på å gi elevene erfaring med å systematisere opplysninger, bruke dem til å oppdage en regel og formulere denne regelen med ord. Det vil fortsatt være behov for både oppsummeringer og trening rundt viktige strategier hvor læreren styrer ganske mye. Det advares likevel mot at dette gjøres for tidlig i prosessen. Trening i å formulere seg skriftlig, sammenligne om en har funnet fram til samme regel, og ikke minst om en uttrykker den på samme måte som andre, vil utgjøre en viktig basis for neste trinn i prosessen mot en algebraisering. På neste trinn i prosessen er det å lære å uttrykke en regel ved hjelp av bokstavsymboler det sentrale.

AKTIVITET 3 «Hva er regelen min?», kortform og bokstavsymboler

Oppgave 1
Vivi og Peter lekte «Hva er regelen min?».

Vivi sa at hennes regel var slik at hun finner resultattallet ved å starte med 2 og så legge til tre ganger starttallet. Peter gjettet at hennes regel var at hvis du multipliserer starttallet med 3 og legger til 2, så får du resultattallet.

Vivi hadde skrevet regelen slik på *kortform:*
Resultattallet = 2 + 3 · starttallet

Peter hadde skrevet det han gjettet var regelen i *kortform,* slik:
Starttallet ·3 + 2 = resultattallet

a) **Hadde Peter funnet Vivis regel?**
Diskuter dette med partneren din.

Ofte blir regler ved bruk av vanlig tekst lange og uoversiktlige. Vi kan derfor skrive regelen på det vi har kalt *kortform.* Dette kan være en blanding av ord og matematiske symboler. I matematikk har en blitt enig om at *en bokstav* kan stå for en variabel tallstørrelse, slik som starttall og resultattall i vårt eksempel.

b) Velg en bokstav som skal stå for starttallet, og en som skal stå for resultattallet.
Skriv Vivis regel slik Vivi beskrev den, og slik Peter beskrev regelen ved å bruke de bokstavene du har valgt for starttall og resultattall.
Diskuter med partneren din.

Aktivitet 3, oppgave 1

Oppgave 2
Spill «Hva er regelen min?» med partneren din.

Skriv regelen din med bokstavsymboler og skjul så denne lappen.
(Skriv gjerne regelen i kortform først, før du «oversetter» til bokstavsymboler.)

Når dere tror at begge har samme regel (fordi den passer for en del forskjellige tall), skal den som har gjettet, også skrive regelen med bokstavsymboler.

Er regelen den samme? Har dere uttrykt regelen på samme måte?

Bytt roller og fortsett å spille på samme måte.

Aktivitet 3, oppgave 2

Oppgave 3
Kari og Nils spilte «Hva er regelen min?»

Har Nils funnet Karis regel?
Forklar hvorfor du mener at svaret til Nils er rett eller feil.
Diskuter det du har kommet fram til, med partneren din.

Aktivitet 3, oppgave 3

Oppgave 4
Under hver tabell nedenfor er det oppgitt to regler.
For hver tabell skal du avgjøre om ingen, en eller begge reglene er riktige for de tallene som står i tabellen. Du skal begrunne svarene dine.

A

a	1	2	5	10
b	6	9	18	33

$b = 3 \cdot a + 3 \quad b = 3 + 3 \cdot a$

B

q	1	2	3	10
p	7	11	15	43

$p = q + q + q + 4 \quad p = 4 \cdot q + 3$

C

s	4	7	9	12
t	28	49	63	84

$t = 3 \cdot s + 4 \cdot s \quad t = 7 \cdot s$

D

k	0	2	5	10
j	1	17	101	401

$j = 5 \cdot k^2 + 1 \quad j = 4 \cdot k \cdot k + 1$

Aktivitet 3, oppgave 4

Kommentarer til aktivitet 3
Siktemålet med aktivitet 3 er at elevene skal gå fra å beskrive en regel med ord til å bruke det vi har kalt kortform, og til slutt uttrykke regelen med bokstavsymboler. Elevene vil ganske fort få erfaring med at det ofte er komplisert å uttrykke en regel presist og kortfattet med dagligspråk. På den annen side vil det å bruke bokstaver som symboler for *ukjente* tall, *generaliserte* tall eller *variable* størrelser være et intellektuelt sprang for de fleste elever (se kapittel 1.8, side 10). Aktivitet 3 er *ett* eksempel på hvordan en slik prosess kan startes. Elevene bør få mange relativt enkle oppgaver som fokuserer på hva som utgjør det matematiske innholdet i en variabel. I kapittel 1.7, side 9, ble det pekt på at innholdet har flere sider, for eksempel er en side at en bokstav kan stå for et ukjent, men bestemt tall, mens en annen side er at den variable kan stå for et generalisert tall. Denne forståelsen er avgjørende for at algebra skal kunne bli meningsfull kunnskap og ikke bare regler for å omforme algebraiske uttrykk. I analysen av elevsvar i del 1 har en sett at det er langt flere elever som kan manipulere med symbolene, enn som er i stand til å gi et meningsinnhold til en variabel i et algebraisk uttrykk (se oppgave 7, side 47).

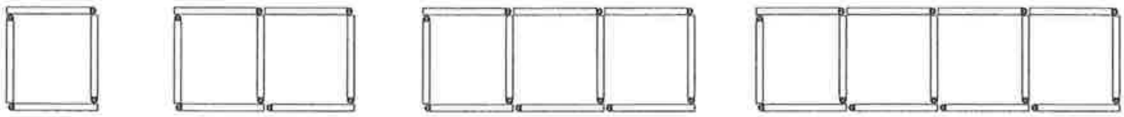
Utgangspunktet i de foregående aktivitetene antas å være kjent for mange elever. I aktivitetene nedenfor vil en ta et utgangspunkt som fokuserer på mønster og system som kan danne et grunnlag for å få kunnskap om bruk av bokstaver som generaliserte tall.

En måte å tilrettelegge for diskusjon og refleksjon på er å sette *ulike løsninger* opp mot hverandre. Det kan gjøres på mange måter. I aktivitet 3 skal elevene avgjøre om to regler har det samme innholdet selv om de uttrykkes med ord på ulike måter. Tegneserien som ble brukt i aktivitet 1 som introduksjon til «Hva er regelen min?», inneholdt også det elementet at samme regel kan uttrykkes verbalt forskjellig selv om innholdet er det samme. Omforming av eller manipulering med algebraiske uttrykk baserer seg på en grunnleggende forståelse av at samme regel eller sammenheng kan uttrykkes forskjellig og likevel innholdsmessig være ekvivalent. Det er bra om elevene har erfart at dette også er tilfellet i muntlige og skriftlige beskrivelser av mønstre og regler, før de lærer å omforme algebraiske uttrykk med bokstavsymboler.

4.3 Geometriske mønstre og tallfølger

I kapitlene 2.2 og 2.3, sidene 15–20, diskuterte vi elevenes svar på to diagnostiske oppgaver som er basert på geometriske følger med tilhørende tallfølger. Oppgaver av denne typen er etter hvert blitt vanlige i de fleste lærebøker på slutten av mellomtrinnet og de to første årene av ungdomstrinnet. Arbeid med slike oppgaver kan også være et startpunkt for de aktiviteter som er beskrevet i kapittel 4.2.

Hensikten med slike oppgaver er at elevene skal få erfaringer som kan brukes til å uttrykke *generelle* beskrivelser av mønstre og sammenhenger ved å bruke algebraisk symbolisering. Å introdusere algebra på denne måten, som et språk som uttrykker sammenhenger mellom to variable størrelser, er ikke det samme som å finne «verdien til en ukjent» og representerer et klart brudd med det å legge hovedvekten på prosedyreaspektet i skolealgebraen. Målet med slike aktiviteter er at elevene skal oppleve at den kortform en har lagt vekt på i aktivitet 3, er nyttig når slike sammenhenger skal beskrives. Analysen av oppgavene 2 og 6 (se sidene 16–23) viste at elevene har visse vansker med å finne et mønster, og at de hadde større vansker med å uttrykke mønsteret de har oppdaget, med ord. Det å kunne uttrykke sammenhenger i dette mønsteret generelt ved å bruke bokstaver for et generalisert tall viste seg å være enda vanskeligere. I oppgave 6 er det sammenhengen mellom ruter langs kortsiden i rektanglene og ruter totalt som skal uttrykkes. Til slutt skal dette gjøres for alle slike rektangler. Det en fant i analysen av disse oppgavene, er i tråd med undersøkelser som er gjort i flere land. En mønsterbasert tilnærming til algebra fører *ikke automatisk* til at elevene gjenkjenner en sammenheng, og heller ikke til at det er enkelt å sette seg inn i hvordan en kan skrive en slik sammenheng ved hjelp av generaliserte tall (bokstaver).



Figur 3: Mønster av fyrstikker

For eksempel kan en tenke at et mønster av fyrstikker som i figur 3 kan beskrives av noen elever som: *«Du starter med fire i den første firkanten og legger til tre nye for hver ekstra firkant.»* Andre kan kanskje si: *«Begynn med en fyrstikk, siden trenger du tre fyrstikker for hvert kvadrat du lager.»* Ved denne måten å arbeide på blir sammenheng oppfattet som handlinger *(«Bruk tre fyrstikker for hvert nytt kvadrat»)*. Slike beskrivelser av sammenhenger ønsker en så å utvikle til beskrivelser som: *«Antallet av fyrstikker er tre ganger antallet av kvadrater pluss en fyrstikk.»* En uttrykker her en *funksjonssammenheng.*

Å introdusere algebra på denne måten, som et språk til å beskrive sammenhenger mellom to variable størrelser, synes å gjøre arbeidet med mer komplekse formler og funksjoner lettere. Arbeidet er estetisk tiltalende, for læreren og elevene kan gjøre god bruk av konkret materiell til å bygge mønstre. En annen fordel er at det er mulig for elevene å se *forskjellige* korrekte uttrykk for det *samme* generaliserte mønsteret. For eksempel kunne den første beskrivelsen som er gjengitt ovenfor, resultere i følgende algebraiske uttrykk: $F = 4 + 3 \cdot (K-1)$, der F er det antall fyrstikker en trenger for å bygge et mønster med K kvadrater, mens den andre beskrivelsen kunne uttrykkes ved: $F = 1 + 3 \cdot K$.

Ved å sammenligne de to uttrykkene har en også mulighet for å introdusere forestillingen om matematisk likeverdighet. Dette blir videre diskutert i kapittel 4.4.

En rekke studier påpeker at mange elever har betydelige vansker med å utvikle algebraiske regler fra tabeller. De har en tendens til å lete etter en fortsettelse i tabellen (rekursjon) der de lager det neste tallet med utgangspunkt i det forrige.

Antall kvadrater (K)	1	2	3	4
Antall fyrstikker (F)	4	7	10	13

Elevene ser hvordan antall fyrstikker øker med tre for hvert nytt kvadrat. Eller litt mer avansert, at når K øker med 1, så vil F øke med 3. Det er få elever som ser etter en *funksjonssammenheng* som knytter de to variablene sammen, de ser ikke «på tvers» i de tabellene de lager. Elevene lurer kanskje på hvorfor en funksjonssammenheng er viktig og nyttig siden det er så enkelt å oppdage mønsteret i en rad i tabellen. Blant de elever som ser en regel som forbinder de to variable størrelsene, er det få som er i stand til å skrive denne regelen på en algebraisk form. Veien fra å oppdage et mønster eller en sammenheng til å skrive en algebraisk regel er lang og kronglete. Elevene må ta mange kritiske skritt langs denne veien, og de kan mangle nødvendige ferdigheter og kunnskap eller ta andre gale beslutninger. Noen av disse kritiske skrittene fra tabell til algebraisk uttrykk er å

- vite hva som er irrelevant, og hva som er viktig
- gå videre fra bare å fortsette en rad i tabellen til å finne en sammenheng mellom to variable størrelser som er satt opp i tabellen
- sjekke at mønsteret en har oppdaget, gjelder for alle verdiene i tabellen
- være i stand til å uttrykke sammenhengen på en slik måte at den kan brukes til utregning av nye verdier og generalisering
- vite hvordan en algebraisk sammenheng uttrykkes (for eksempel uttrykker ikke $x + 2y$ en slik sammenheng)
- vite hvilke type sammenhenger som passer til et gitt problem
- vite hva som kan og ikke kan uttrykkes ved grunnleggende algebra
- kjenne den algebraiske syntaksen

Vi vil altså anbefale å bruke geometriske mønstre og tallfølger i arbeidet med å bygge opp kunnskap om funksjonssammenhenger. Siden det eksisterer mange ideer til aktiviteter som kan brukes til dette, i lærebøkene, gir vi ikke flere eksempler her, men vi vil heller reflektere litt videre over *hva* som kan være viktig å vektlegge i dette arbeidet.

Som det går fram av andre aktiviteter i veiledningsheftet, mener vi det er viktig at en først beskriver sammenhengene i et geometrisk mønster verbalt og deretter velger en passende beskrivelse som en uttrykker algebraisk. Det er mye som tyder på at en slik fase med verbal beskrivelse nesten er en nødvendig del av det å lære å uttrykke sammenhenger mellom to størrelser. Det kan være på sin plass å peke på at å fokusere for mye på konstante differanser i tabellene kan hindre en i å oppdage en funksjonssammenheng. For eksempel i eksemplet over: *når K øker med 1, vil F øke med 3. Derfor får vi* $F = 3 \cdot K$ *. . . .* Det kan bli et tankekors for noen elever hvorfor det å *addere* med 3 automatisk resulterer i *3 ganger noe.* Eller sagt på en annen måte: hvorfor den konstante forskjellen i tabellen blir en faktor som en multipliserer med. Kanskje elevene ikke forstår sammenhengen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon. Det viktige punktet er å oppdage at addisjonen refererer til den *ene* variable, mens multiplikasjonen knytter den ene variable størrelsen til den andre i dette tilfellet. Vi vil av denne grunn advare mot å lære elevene bare denne typen «prosedyrer».

På den andre siden er det lite trolig at formuleringer som *«Du trenger tre flere fyrstikker hver gang du bygger et nytt kvadrat»* er en god introduksjon til å oppleve nytten av algebra, siden den rekursive sammenhengen i tabellen er mye tydeligere enn funksjonssammenhengen. Det er derfor viktig å bruke situasjoner der tabellene ikke har tydelige konstante differanser, som for eksempel:

I et forsøk målte en følgende størrelser A og H

A	4	6	13	22		
H	28	42	91	154		

a Hva tror du H ville bli hvis A var 30?
b Hva ville A bli hvis H var 217?
c Forklar med ord hvordan du kan finne H hvis noen fortalte deg hva A var.
d Bruk algebra til å skrive en regel som knytter A og H sammen.

Oppgaver av denne typen kan lett settes i en reell kontekst og gir elevene erfaringer med å lete etter funksjonssammenhenger uten å gå veien om rekursjoner.

4.4 Likhetstegnets betydning

Språket en bruker i tallregning, fokuserer på de svar en får, mens språkbruken i algebra fokuserer på sammenhenger. Sammenlign for eksempel $234 + 432 = 666$ med et typisk algebraisk uttrykk som $2(x + 1) = 2x + 2$. I tallregningen gir likhetstegnet et signal om å finne et svar. Se også kapittel 1.5, side 8. Hvis elevene *bare* har denne erfaringen av likhetstegnet når de skal arbeide med algebra, vil de få store problemer med å knytte et meningsinnhold til algebraiske uttrykk.

AKTIVITET 4

Oppgave 1
Vegard og Eva skulle løse denne oppgaven:

Skriv rett tall i ruten

a) $3 \cdot \square = 21$ **b)** $\square \cdot 2 + 4 = 12$

c) $3 + 2 \cdot \square = 15$ **d)** $25 - 2 \cdot \square = 17$

$3 + 2 \cdot \boxed{6} = 15$

$25 - 2 \cdot \boxed{4} = 17$

Eva

$3 + 2 \cdot \boxed{3} = 15$

$25 - 2 \cdot \boxed{0{,}75} = 17$

Vegard

Hvilke svar mener du er riktige?
Hvordan tror du den tenker som har gjort feil?
Skriv hvorfor du mener det.

Etterpå skal du diskutere løsningen med partneren din.

Aktivitet 4, oppgave 1

Oppgave 2
Når det står et likhetstegn mellom to matematiske uttrykk, påstår vi at uttrykkene er likeverdige. På samme måte som i andre språk kan det en påstår, noen ganger være sant/rett, andre ganger usant/galt.

Nedenfor er det skrevet tre påstander i vanlig språk:

1 Oslo ligger nord for Trondheim. 2 Sola er varm. 3 Istapper er flytende.

Avgjør hvilke av påstandene som er sanne. De som ikke er sanne, skal du prøve å gjøre sanne ved å forandre litt på påstanden.

I oppgave 1 kan en si at både Vegard og Eva påstod at deres svar gjorde at høyre og venstre side av likhetstegnet var like store. I matematikk, som i andre språk, kan det en påstår, noen ganger stemme og andre ganger ikke.

Aktivitet 4, oppgave 2

Oppgave 3
Nedenfor har vi skrevet noen matematiske uttrykk som vi påstår er like, ved å bruke et likhetstegn. Du skal først avgjøre hvilke av disse påstandene som er riktige, og hvilke som er gale. De påstandene som er gale, skal du så prøve å gjøre riktige ved å foreta *en* forandring.

Kan du komme med flere løsninger til hver påstand hvor du ved å gjøre en forandring får noe som stemmer?

Til slutt skal du og partneren din diskutere de løsningene dere har kommet fram til.

Påstander:

a) $7 \cdot 3 = 19 + 9$	b) $6 \cdot 4 = 27 - 3$	c) $23 - 11 = 12 + 9$
d) $8 \cdot 6 = 21 + 24 - 3$	e) $7 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 2 + 1$	f) $10 - \frac{6}{2} = 14 - 12$

Aktivitet 4, oppgave 3

Oppgave 4
Du og partneren din lager flere oppgaver til hverandre av samme type som i oppgave 3. Skriv to matematiske talluttrykk som du påstår er like, ved å bruke et likhetstegn.

Dere bytter oppgaver og løser dem ved først å avgjøre hvilke påstander som er riktige, og hvilke som er gale.

Kom med så mange løsninger som mulig til hver oppgave på hvordan en enkelt endring kan gjøre at påstanden om likhet stemmer.

Aktivitet 4, oppgave 4

Oppgave 5
Tegn så mange rektangler med omkrets 24 cm som du kan, på et ruteark.

For hvert rektangel du har tegnet, skal du skrive en likhet for omkretsen.

For eksempel vil omkretsen av rektanglet nedenfor kunne gi denne likheten:
$24 = 2 + 10 + 2 + 10$

Aktivitet 4, oppgave 5

Kommentarer til aktivitet 4

I del 1 er det en rekke ganger pekt på det viktige i å knytte algebra nærmere til aritmetikken (se for eksempel kapittel 1.4, side 7) og likeledes at mange av de problemer som elevene viser seg å ha i algebra, kan tilbakeføres til sviktende kunnskaper i aritmetikk. I aktivitet 4 gir vi eksempler på hvordan elevene kan arbeide med oppgaver som kan bidra til refleksjon rundt det at likhetstegnet uttrykker en likeverdighet mellom uttrykk, i tillegg til at det også kan oppfattes som et resultat av en regneoperasjon. Elevenes svar på oppgave 1 (se sidene 13–15) viste at mange er usikre på hvordan en regner ut uttrykk som inneholder flere regneoperasjoner.

Konvensjonene om prioritering mellom regneartene er viktige i aritmetikken, men det er ikke sikkert at alle elever har gjort bevisste erfaringer med dette (se sidene 13–15). Oppgave 1 i aktivitet 4 er et eksempel på hvordan elevene kan få erfaring med dette, mens oppgavene 3 og 4 spesielt tar opp likhetstegnets betydning (se også side 8). I oppgave 2 kan elevene lett se hva som er sant og ikke i påstandene uttrykt med ord. Hensikten er at elevene skal erfare at små og gjerne litt varierte endringer kan gjøre påstandene sanne. Her vil det kanskje være naturlig å endre påstand 1 ved å bytte ut nord med syd, og i påstand 3 å legge til ordet ikke. Det er lett og lage flere slike eksempler, men ofte vil elevene raskt oppfatte poenget slik at en kan gå videre med matematiske påstander.

Forholdene ligger vel til rette for at elevene kan lage oppgaver for hverandre, slik som beskrevet i oppgave 4 i aktivitet 4. Det største problemet når elever skal gjøre det, er ofte at de lager for kompliserte oppgaver. En kan da eventuelt legge begrensninger på hvor mange ledd det er tillatt å ha på hver side av likhetstegnet, i alle fall i en innledningsfase.

Elevene trenger varierte erfaringer med bruk av likhetstegnet i ulike sammenhenger. De trenger å erfare at likhetstegnet ikke alltid betyr at de skal utføre en regneoperasjon. I oppgaver av typen $5{,}7 + 9{,}2 = \square$ og $4{,}2 - 2{,}6 = \square$ vil likhetstegnet, naturlig nok, oppfattes som en beskjed om å utføre en regneoperasjon for å finne et svar. Lar en elevene arbeide med oppgaver av typen $5{,}7 + 9{,}2 = 8{,}7 + \square$ og $\square = 5{,}7 + 9{,}2$, kan elevene utfordres til å reflektere rundt andre betydninger av likhetstegnet. Den siste typen oppgaver er også ganske vanlig i lærebøkene, men elevenes oppfatning vil avhenge av hvordan læreren bruker oppgavene.

En type oppgaver som er av lignende type som i eksemplet over, er at elevene blir bedt om å skrive så mange likheter som mulig med utgangspunkt i for eksempel $5 + 9 = \square$. De kan skrive likheter som $5 + 9 = 10 + 4$, $5 + 9 = 2 \cdot 7$, $5 + 9 = 19 - 2 - 3$ osv. Slike oppgaver kan også bli oppgaver som en løser mer eller mindre automatisk uten å reflektere over hva en gjør. Oppgave 4 vil kunne være en variant til de typer oppgaver som er skissert ovenfor.

I oppgave 5 skal elevene skrive så mange likheter som mulig. Å se begrunnelsene bak disse sammenhengene krever en generalisering av egenskaper til tall som i realiteten er dypt algebraisk. I tillegg til å observere at alle rektanglene har omkrets 24 cm, kan elevene oppdage at de ulike rektanglene vil ha forskjellige areal. For eldre elever kan denne oppgaven gjøres mer utfordrende ved å bruke andre enheter enn 1. Prøv for eksempel med 0,2 eller 1/2. Skal oppgaver av denne typen bidra til å styrke elevenes læring slik at de får et bedre utgangspunkt for algebra, må de følges opp med diskusjoner og refleksjon.

Det kan være hensiktsmessig eksplisitt å ta opp likhetstegnets ulike betydninger avhengig av i hvilken sammenheng det inngår. Men på samme måte som da vi diskuterte ulike måter å bruke bokstavsymboler på (aktivitet 3), bør en ikke starte med å forklare at likhetstegnet har ulike betydninger. Kunnskapen om og forståelsen av det vil sannsynligvis bli langt bedre om en starter med ulike aktiviteter der elevene blir utfordret til å reflektere over egne erfaringer og diskutere sine tanker med andre før oppsummeringer av viktige hovedpunkter blir gjort av læreren.

4.5 *Å forstå egenskaper til tall og regneoperasjoner*

En av de ting elevene bruker mesteparten av tiden sin til i algebra, er å omforme algebraiske uttrykk som for eksempel: $a - (b - c) = (a - b) + c$. Hvis elevene skal forstå hva som foregår her, må de vite hvordan subtraksjon fungerer. Skulle de glemme reglene for hvordan de omformer algebraiske uttrykk, kan de med kunnskaper om regneoperasjonene gå tilbake til aritmetikken i spesielle tilfeller for å se hva som hender med bestemte tall i stedet for bokstaver. For å kunne gjøre det trenger de å ha gjort erfaringer som «Hvis jeg trekker fra 1 *mindre,* så blir svaret 1 *større*». De må forstå dette så godt at de ikke trenger å sjekke det ved for eksempel å regne ut begge sider av $4032{,}17 - (137{,}7 - 1) = (4032{,}17 - 137{,}7) + 1$.

Oppgaver av den typen som det er gitt eksempler på i oppgave 1 nedenfor, tar sikte på å knytte denne viktige forbindelsen mellom aritmetikk og algebra.

AKTIVITET 5 Egenskaper til tall og regneoperasjoner

Oppgave 1

a) **Finn svaret på denne oppgaven:** 303,7 – 25,8 =
Bruk kalkulator om du vil.

b) **Skriv svarene på disse subtraksjonsoppgavene uten å trekke tallene fra hverandre. Forklar hvordan du vet at svarene er rette.**

$\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,25{,}9} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,25{,}7} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,26{,}8} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,35{,}8} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,15{,}8} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 303{,}7 \\ \underline{-\,28{,}8} \end{array}$

c) **Finn svaret på denne oppgaven:** 62,14 – 19,89 =

d) **Lag seks andre subtraksjonsoppgaver som har samme svar som i oppgave c. Forklar hvordan du endret tallene 62,14 og 19,89.**

Aktivitet 5, oppgave 1

Elever som har sviktende forståelse av tallenes egenskaper, er sjelden opptatt av hvordan en endring i rekkefølgen mellom tallene i et regnestykke påvirker svaret. Dette har stor betydning for rekkefølgen av de regneoperasjoner som må utføres i sammensatte uttrykk. Noe av dette har en tidligere behandlet i aktivitet 4. Den neste oppgaven tar utgangspunkt i et arbeid i en åttendeklasse.

Oppgave 2

a) Kari, Petter og Ella skulle finne hva svaret blir hvis de starter med 3, multipliserer med 5, deretter adderer 9 til dette svaret og så dividerer det siste svaret med 3. De skrev dette regnestykket: $3 \cdot 5 + 9 : 3$. De fikk forskjellige svar.

Kari sa: *«Jeg vet at 3 · 5 er 15, og jeg vet at 9 : 3 er 3, så svaret må bli 15 + 3, altså 18.»*
Petter sa: *«Nei, det er feil. Det er et tretall først og delt på 3 til slutt. Du kan forkorte disse treerne. Vi får altså 5 + 9, altså 14.»*
Ella sa: *«Jeg tror at svaret er 8, fordi du må regne ut fra venstre mot høyre. Tre ganger 5 er 15, og 15 + 9 er 24, og 24 delt på 3 er 8.»*

Har Kari rett? **Har Petter rett?** **Har Ella rett?**

b) **Kan du forandre svarene på noen av regnestykkene nedenfor ved å sette inn parenteser?**

(i) $6 \cdot 12 \cdot 3$ (ii) $6 \cdot 12 : 3$ (iii) $6 \cdot 12 - 3$ (iv) $6 \cdot 12 + 3$

c) **Velg tre andre tall. Hva ser du? Hva hender hvis du bruker brøker? Prøv for eksempel:** $6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3$ og $6 \cdot \frac{1}{3} + 3$

Aktivitet 5, oppgave 2

4.6 Bruk av bokstavsymboler

I kapittel 1.2, side 4, ble ulik bruk av matematikk diskutert. I denne sammenheng har det algebraiske symbolspråket en dobbelt funksjon, dels det å representere ulike størrelser og sammenhenger, dels det å bruke symbolspråket til å omforme de matematiske sammenhengene eller det symbolske uttrykket for dermed å få fram nye aspekter ved en gitt situasjon/kontekst. Når en skal arbeide algebraisk, er det nødvendig å beherske alle fasene som er diskutert i kapittel 1.2. I gjennomgangen av elevenes svar har vi flere ganger pekt på den tradisjon at relativt mye tid har vært brukt til å manipulere symboler på bekostning av det å representere og tolke størrelser og sammenhenger.

For å forstå at symboler kan representere variable størrelser, trenger elevene å få bred erfaring i å «oversette» fra en situasjon til et algebraisk uttrykk og fra et algebraisk uttrykk til en situasjon. I denne sammenheng vil en av lærerens oppgaver bli å fungere som en «hjelpetolk» for elevenes oversettelser mellom situasjonen beskrevet i et dagligspråk og den samme situasjonen beskrevet med matematiske bokstavsymboler.

Det viser seg at å «oversette» fra et algebraisk uttrykk til en situasjon er vanskeligere enn å gå den motsatte veien. I oppgave 7 i de diagnostiske oppgavene skulle en skrive en regnefortelling som passet til uttrykket $3a + 2a = 5a$. Denne oppgaven avslørte ulike typer av vansker. Se kapittel 3.6, side 47.

4.6.1 Fra situasjon til algebraisk uttrykk

AKTIVITET 6 Fra ord til symboler
Læreren introduserer for elevene at algebra er et nyttig redskap til å løse problemer. Det kan pekes på:

- Ofte er det nyttig å kunne gå fra en situasjon beskrevet med ord til å uttrykke det samme ved hjelp av bokstavsymboler.
- En kaller dette å oversette fra ord til bokstavsymboler. En kan sammenligne dette med å oversette fra ett språk til et annet.
- Nedenfor finnes forslag til noen oppgaver som kan hjelpe elevene med oversettelse fra ord til bokstavsymboler.
- Elevene bør i disse aktivitetene arbeide sammen med en partner som de diskuterer med.

Læreren bør passe på at begge elever deltar aktivt. De skal skifte på å være den som snakker, og den som lytter. Gangen i arbeidet bør så poengteres:

- Elevene leser nøye igjennom det som står skrevet i oppgaven. Den ene forteller den andre hva oppgaven går ut på.
- Elevene skal bli enige om hvilke størrelser som er ukjente i oppgaven. De skal så bli enige om hvilke symboler de vil bruke for de ukjente størrelsene. De bør skrive ned hvilke symboler som brukes, og hva de står for.
- Deretter skal de skrive et uttrykk hvor disse symbolene blir brukt til å uttrykke hva som er innholdet i den situasjonen som er beskrevet med ord i oppgaven.
- Til slutt skal en av elevene forklare for den andre hva symbolene og symboluttrykket betyr. Dette gjøres for å sjekke at de er enige om, og har en klar forståelse av, hva som ligger i symbolene og symboluttrykket.

Oppgave 1
Lena legger fliser på gulvet i baderommet. Mønsteret har dobbelt så mange blå fliser som hvite fliser.

a) **En av dere skal fortelle den andre hva som er innholdet i oppgaven. Bli enige om innholdet.**

b) **Hva er ukjente størrelser i den situasjonen som er beskrevet?**

c) **Hvilke symboler velger dere å bruke for de ukjente størrelsene?**

d) **Skriv et symboluttrykk for denne situasjonen ved å bruke de symboler dere har valgt i c.**
Vi kaller dette å oversette fra ord til symboler.

e) **Lag en tegning av gulvet med blå og hvite fliser.**

f) **Undersøk om det dere får når dere teller på tegningen, er det samme som det dere får når dere bruker tall, ved å bruke symboluttrykket i d.**

Aktivitet 6, oppgave 1

Oppgave 2
En fabrikk lager to forskjellige størrelser av poser med seigmenn. De har bestemt at det skal være fire ganger så mange røde som gule seigmenn i alle posene.

a) **Beskriv med egne ord hva som er innholdet i situasjonen over.**

b) **Hva er ukjente størrelser i denne situasjonen?**

c) **Hvilke symboler velger dere å bruke for de ukjente størrelsene?**

d) **Oversett denne situasjonen fra ord til matematiske symboler.**

e) **Velg noen verdier som dere bruker til å sjekke om det uttrykket dere har satt opp, stemmer.**

Aktivitet 6, oppgave 2

Oppgave 3
Jan har dobbelt så mange penner i pennalet som Nils har. Dette kan skrives i kortform på denne måten:

Jans antall penner = 2 · Nils' antall penner

Hvis vi velger følgende bokstaver som symbol for de ukjente størrelsene:
Nils' antall penner = a
Jans antall penner = b
kan vi skrive dette i *matematisk symbolspråk* på følgende måte: $b = 2 \cdot a$

Diskuter hver av situasjonene som er beskrevet i ord under, og skriv først hvordan det blir *i kortform*. Bestem deretter hvilke symboler dere vil bruke for de ukjente størrelsene. Til slutt skal dere oversette situasjonen til et matematisk symbolspråk.

a) Rita har tre ganger så mange penner som Nils

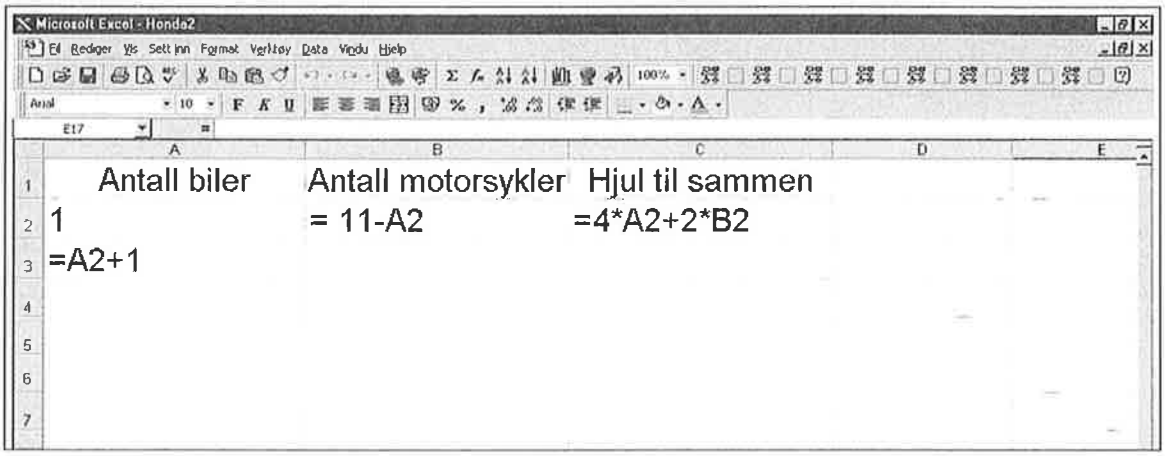
b) Anders har halvparten så mange penner som Nils

c) Sara har to penner mer enn Jan

d) Mai-Lin hadde like mange penner som Nils. Hun delte sine penner likt med sine to brødre. Hvor mange penner har hun nå?

Aktivitet 6, oppgave 3

Oppgave 4
Morten skryter av at han har 11 Hondaer hjemme på gården sin. De er enten motorsykler eller biler. Til sammen har kjøretøyene hans 36 hjul. Hvor mange Hondaer av hvert slag har Morten? Anne brukte et regneark for å løse dette problemet.



a) **Hvorfor skriver hun 11 – A2 for antall motorsykler?**
b) **Hvorfor skriver hun 4*A2 + 2*B2 for antall hjul til sammen?**
c) **Hvorfor skriver hun A2 + 1 for neste antall biler?**
d) **Bruk regnearket til Anne til å lage en tabell. (Kopier formlene nedover.)**
e) **Morten sier at av de 11 Hondaene er det et ukjent antall biler, x. Skriv et uttrykk med x som forteller oss hvor mange hjul han da har.**

Aktivitet 6, oppgave 4

Kommentarer til aktivitet 6

Det ble innledningsvis poengtert at en bør bestrebe seg på å bruke et språk som ligger nær opp til elevenes dagligspråk, i aktivitetene. En ønsker i starten å arbeide seg gradvis fra dagligspråk til algebraiske uttrykk med samme meningsinnhold.

I aktivitet 6 starter elevene med å diskutere innholdet i den teksten som beskriver situasjonen. Det at elevene i fellesskap diskuterer seg fram til enighet om hva en oppgave går ut på, før man begynner å «gjøre noe», er derfor en vesentlig del av prosessen. Dette er en tilnærming til en tekstoppgave som vil kunne gi elevene en bedre forståelse av teksten. Oppgavene tar videre sikte på å lære elevene til å reflektere rundt hvilke størrelser som er ukjente, og i samarbeid til å kunne oversette fra tekst til matematiske symboler. Det er viktig at læreren hele tiden oppmuntrer elevene til åpne diskusjoner seg imellom.

Språket i oppgave 1 er noe oppkonstruert i forhold til hvordan en oftest ville uttrykke dette i dagligspråk. *«Lena trenger dobbelt så mange blå fliser som hvite fliser til baderommet»* er nok en mer dagligdags måte å uttrykke seg på. En har valgt formuleringen for at situasjonen beskrevet i ord skal være nærmere det matematiske symbolspråket. En situasjon beskrevet med dagligspråk vil ofte kunne gi assosiasjoner til omvendte algebraiske sammenhenger av dem som er korrekte når en oversetter til bokstavsymboler. Ved å omforme oppgaven slik at en bruker *«er lik»*, vil den muntlige formuleringen ligge nærmere slik en uttrykker denne sammenhengen med symboler. Ulempen er at språket da vil kunne virke oppstyltet. I oppgavene 2 og 3 har en ikke gjort slike omforminger. Teksten i disse oppgavene er mer i samsvar med en dagligdags måte å uttrykke seg på. Elevene bør selv erfare hvor lett det er å sette opp slike sammenhenger motsatt, før en retter deres oppmerksomhet spesielt mot dette problemet.

Her gis bare noen få eksempler på oppgaver og hvordan de kan danne utgangspunkt for diskusjoner i klassene. Elevene bør trolig få arbeide med flere oppgaver av denne typen før de går videre. En kan gjerne ta utgangspunkt i oppgaver fra læreboka, det viktige er å legge hovedvekten på at elevene skal diskutere rundt det å gå fra tekst til bokstavsymboler.

Oppgave 4 kan løses ved å bruke tabeller der en systematisk varierer for eksempel antall biler og deretter regner ut antall hjul for hver situasjon. Algebra er altså *ikke* et *nødvendig* redskap for å løse dette problemet. Vi har her valgt å bruke regneark som et eksempel på et annet redskap som er effektivt til å finne løsninger på slike problemer. En fordel med regnearket i denne sammenheng er at det tydeliggjør visse deler av meningsinnholdet til variabler, og derfor er en god introduksjon til algebra.

I oppgave 4 kan en lete seg fram til løsningen siden den er et helt tall, i andre tilfeller vil det være vanskeligere. Et eksempel på det kan være en eksamensoppgave fra 1991 (her noe forkortet): *«Lise har 100 meter netting som hun skal bruke til å gjerde inn et rektangelformet jordstykke. Området ligger ved en elv. Lise vil at arealet av jordstykket skal bli så stort som mulig. Hun velger derfor å la elva være den ene siden av området fordi det ikke trengs noe gjerde mot elva. Lengden av den ene siden av området er parallell med elva.»* Også i denne situasjonen er regneark et godt redskap både til å finne en løsning på problemet og til å introdusere variabler som gir en eksakt løsning.

Når elevene har fått en del erfaring med dette, vil tiden være moden for å fokusere spesielt på problemet med å sette opp sammenhengen motsatt. I aktivitet 7 kommer det forslag på oppgaver som skal hjelpe elevene til å reflektere over hvorfor de gjør en slik feil, og hvordan de kan unngå å gjøre den. Igjen er det å tilrettelegge for diskusjon og refleksjon som er den viktige oppgaven for læreren. Å være rask med å fortelle elevene hva de skal gjøre, uten at de har fått den tilstrekkelige tiden til selv å diskutere, vil antakelig ikke gi den ønskede læringseffekten.

AKTIVITET 7 Problemet «omvendt sammenheng»
Læreren introduserer problemet ved å fokusere på at

- elevene kanskje allerede har lagt merke til at de må passe på når de oversetter fra tekst til bokstavsymboler. Det er fort gjort å skrive den algebraiske sammenhengen den motsatte veien. Understrek at den måten en sammenheng er beskrevet på i tekst, gjør at denne feilen lett kommer. Dagligspråket kan ikke da oversette det til et matematisk symbolspråk direkte
- dette kan sammenlignes med når en oversetter fra for eksempel norsk til engelsk. En kan da vanligvis heller ikke oversette ord for ord hvis oversettelsen skal bli god. En må ta hensyn til reglene for hvordan det enkelte språk er bygd opp, det vil si språkets innebygde logikk. På samme måte er logikken i det matematiske språket forskjellig fra vårt dagligspråk

- oppgavene i aktivitet 7 kan hjelpe elevene til å bli klar over problemet. Oppgavene har som siktemål å gi dem noen ideer om hva de kan gjøre for å unngå å sette opp en matematisk sammenheng den omvendte veien

Oppgave 1
Noen elever ble bedt om å oversette en sammenheng beskrevet i ord til bokstavsymboler. De skulle også skrive hva symbolene de brukte, stod for.

Her er sammenhengen beskrevet i vanlig tekst:
«I en klasse er det dobbelt så mange øyne som det er neser.»

Gruppe A	Gruppe B
ø står for øyne. *n* står for neser. Oversatt til symbolspråk får vi da $2 \cdot ø = n$	*ø* står for antall øyne *n* står for antall neser Oversatt til symbolspråk får vi da $ø = 2 \cdot n$

Studer disse to løsningene nøye.
Hvilken av de to løsningene mener du er den riktige?
Skriv hvorfor du mener at den er riktig.

Bruk tabeller med verdier for de to løsningene til hjelp for å avgjøre hvilken løsning som er riktig.

Hva er forskjellen på den måten de to gruppene skriver hva bokstavsymbolene står for?
Hvilken av disse måtene mener du er den riktige?

Skriv hvorfor du mener at den er riktig.
Diskuter hele oppgaven med partneren din og bli enige om et felles svar og en felles begrunnelse.

Aktivitet 7, oppgave 1

Oppgave 2
Noen elever ble bedt om å oversette følgende fra ord til symboler:

«Et rektangel er tre ganger så langt som det er bredt.»

Gruppe A skrev følgende uttrykk for denne sammenhengen mellom lengde og bredde:
$l = 3 \cdot b$

Gruppe B skrev følgende uttrykk for denne sammenhengen mellom lengde og bredde:
$3 \cdot l = b$

a) **Elevene lot *l* stå for lengden og *b* bredden. Diskuter hva hvert av uttrykkene betyr.**

b) **Hvilket uttrykk mener dere gir en riktig beskrivelse av denne sammenhengen?**

Aktivitet 7, oppgave 2

Etter at elevene har gjort disse oppgavene, kan det være nyttig med en klassediskusjon. Det gir læreren mulighet til å peke på hvordan en kan bruke tabeller over samsvarende verdier for å kontrollere de uttrykkene en har satt opp.

Det er også viktig at elevene blir vant til å omformulere en setning ved bruk av vanlig språk. En annen måte å beskrive situasjonen i oppgave 1 på kan være: *«Antall øyne er lik to ganger antall neser.»* Ved å beskrive denne sammenhengen på denne måten med *«er lik»* er det ofte lettere å oversette fra ord til matematisk symbolspråk. I klassediskusjonen kan dette bringes inn.

Oppgave 3
I alle de situasjonene som er beskrevet nedenfor, skal du først omforme måten situasjonen er beskrevet på, til en setning som inneholder *«er lik»*. Skriv denne setningen og bruk den som utgangspunkt til å uttrykke sammenhengen med symboler. Dere skal så sammenligne og diskutere det dere har skrevet ned. Til slutt skal dere lage tabell for å sjekke at det dere har satt opp, stemmer.

a) Det er seks ganger så mange høner som haner på mange bondegårder.
Omform setningen slik at den inneholder *«er lik»*. Oversett til et matematisk symboluttrykk.
Lag tabell med noen verdier for å kontrollere om det symboluttrykket dere har satt opp, stemmer.

b) I mange butikker er prisen på Flax sjokolade fem ganger prisen på Fix sjokolade.
Omform setningen, oversett til symboluttrykk og kontroller uttrykket ved hjelp av en tabell.

c) På mange typer arrangementer er prisen for barn halvparten av prisen for voksne.

d) I alle saueflokker er antallet sauer fjerdeparten av antallet bein i flokken.

Aktivitet 7, oppgave 3

Kommentarer til aktivitet 7
Problemet med at en setter opp en motsatt sammenheng når en bruker algebra, er knyttet til forskjell i struktur mellom dagligspråk og algebraisk språk. Det er her et helt nytt språk som elevene skal innføres i. Når elever så gjør feil, kan en ikke påstå at de har en misoppfatning. De må vinne erfaringer med den nye strukturen. Gjennom refleksjon og diskusjon, basert på omforming av ulike måter å uttrykke sammenhenger på gjennom vanlig språkbruk og i bokstavuttrykket, og ved å lære elevene å kontrollere resultatet etterpå tar disse oppgavene sikte på å øke forståelsen både av hva problemet gjelder, og av hvordan en kan hanskes med det.

I oppgave 1 i aktivitet 6 skulle elevene lage en tegning av et baderom. Det å lage en tegning, en illustrasjon eller et diagram kan ofte være til hjelp. Ved å sammenligne det en får når en setter inn verdier i uttrykket med bokstavsymboler, med det en får når en teller opp på tegningen, kan en kontrollere det en har gjort. Det er vår erfaring at det er få som gjør feil når de arbeider med tegningen, mens det er lett å gjøre feil når en setter opp sammenhengen ved hjelp av bokstavsymboler.

Når vi i denne aktiviteten starter med en oppgave med nese og øyne, er det fordi det er en kontekst hvor det er lett for elevene ved hjelp av et par verdier å avgjøre om det symboluttrykket de har satt opp, stemmer eller ikke. Oppgave 3 er et eksempel på oppgaver som bør brukes etter at en har vært igjennom en del stoff, og der elevene trenger trening i forhold til det nye de har lært seg. På samme måte som en trener på andre ferdigheter i matematikk, bør også slike råd som mer går på å bli klar over språklige problemer med å oversette fra ord til bokstavsymboler, trenes inn. På lengre sikt kan kanskje også slike ting bli mer automatisert. Hvis elevene har fått forståelse av dette, vil en automatisering være en fordel. Det er når den grunnleggende forståelsen mangler, at nytten av en automatisering er tvilsom.

4.6.2 Fra algebraisk uttrykk til en konkret situasjon

AKTIVITET 8 Fra bokstavsymboler til ord
Lærerens introduksjon kan ta utgangspunkt i å lage regnefortellinger som passer til algebraiske uttrykk. Å oversette fra algebraiske uttrykk til vanlig språk er ofte vanskeligere enn å gå den motsatte veien. Lærerens introduksjon bør også omfatte at for å få en idé om en situasjon som passer, lønner det seg å tenke grundig over hva de enkelte bokstavsymbolene kan stå for. En kan for eksempel bruke følgende eksempel: Sammenhengen $u = 3 \cdot v$ er gitt. Hvis jeg vet at u står for antallet sjokolader som Unni har, og v står for antallet sjokolader som Vera har, kan jeg beskrive denne sammenhengen slik med ord: *Det antallet sjokolader som Unni har, er lik tre ganger det antallet sjokolader som Vera har.*

En har da uttrykt sammenhengen i en setning som inneholder *«er lik»*. I dagligspråk ville en kanskje heller si det på denne måten: *Unni har tre ganger så mange sjokolader som Vera.*

Oppgave 1
s står for antall sjokolader som Siri har, og t står for antall sjokolader som Tore har.
Forklar med ord hva hvert av uttrykkene under betyr.
Lag en setning som forklarer hvert uttrykk, og hvor du bruker *«er lik»*.
Skriv disse setningene og diskuter dem med din partner.

a) $s = t + 1$ **b)** $s = 2 \cdot t$

c) $s = 2 \cdot t + 1$ **d)** $t = s + 3$

Aktivitet 8, oppgave 1

Oppgave 2
Marit og Kjell diskuterte hvordan de ville forklare uttrykket nedenfor:

$n = 3 \cdot b$

n står for det totale antallet boller
b står for antallet boller i hver pose.

De ble enige om at uttrykket fortalte dem det totale antallet boller i tre bager.

a) **Er du enig i deres forklaring? Hvis du ikke er enig, hva mener du at uttrykket forteller?**

b) **Kan du beskrive en situasjon som passer til uttrykket $n = (3 \cdot b) + 3$?**

c) **Kan du beskrive en situasjon som passer til uttrykket $n = 3 \cdot (b + 1)$?**

d) **Beskriver uttrykkene i b og c forskjellige situasjoner?**
Forklar hva du mener.

Hele oppgaven skal diskuteres med din partner.

Aktivitet 8, oppgave 2

Oppgave 3
For hvert bokstavuttrykk nedenfor skal du tenke deg en mulig situasjon som uttrykket kan beskrive. Bestem selv hva bokstavsymbolene skal stå for.

Skriv hva du vil at bokstavsymbolene skal stå for.
Lag en regnefortelling som beskriver en situasjon som passer med uttrykket.
Skriv regnefortellingen.

a) $s = 2 \cdot t + 1$ **b)** $m - 2 = d$

c) $n = m - 8$ **d)** $p = 3 \cdot r + 4$

Dere skal lese hverandres regnefortellinger og diskutere dem. Har dere greid å beskrive situasjoner som uttrykkene kan stå for? Bli også enige om en måte for å sette opp hva bokstavsymbolene står for.

Aktivitet 8, oppgave 3

Kommentarer til aktivitet 8

I kapittel 3.6, side 47, ble svar på å skrive en matematikkfortelling til uttrykket $3a + 2a = 5a$ analysert. Vanlige feiltolkninger i denne oppgaven var at

- bokstaven a ble oppfattet som et konkret objekt, eller en merkelapp for dette konkrete objektet (se elevsvar 13, side 48)
- bokstaven a ble oppfattet som et udefinert objekt (se elevsvar 14, side 48)
- $3a$ og $2a$ ble oppfattet som helhetlige objekter (se elevsvar 15, side 48)

I algebraiske uttrykk står bokstavene for variable størrelser. Elevene må derfor få anledning til å vinne erfaring med i hvilke sammenhenger bokstaver brukes i algebra. Fokus må rettes mot å bruke bokstavene som symboler for variable størrelser.

AKTIVITET 9 Regler fra dagliglivet

Vi bruker mange regler i hverdagslivet for å beregne sammenhengen mellom størrelser. Ofte gjør en det nesten automatisk og uten å tenke over at en bruker en form for matematikk. Noen ganger er reglene skrevet med bokstavsymboler, andre ganger er de skrevet med ord.

I de følgende oppgavene skal vi arbeide med noen slike regler fra dagliglivet og med å oversette dem fra ord til symboler eller omvendt.

Oppgave 1
Steketiden for lammestek er avhengig av vekten på steken. I kokeboka står det at vi skal la steken stå i ovnen i 25 minutter for hver kilo den veier, pluss 20 minutter ekstra.

a) Hva er de variable størrelsene i denne situasjonen?

b) Bestem hvilke bokstavsymboler du vil bruke for de variable størrelsene, og skriv et symboluttrykk som viser regelen for steking av lammestek.

c) Hvor lang tid vil det ta å steke en lammestek på $2\frac{1}{2}$ kg?

Aktivitet 9, oppgave 1

Oppgave 2
Ofte beregner en hvor mye medisin et barn skal ha, ved å ta utgangspunkt i det som er en normal mengde for en voksen person. Regelen for å beregne mengde med medisin som et barn skal ha, er i en brosjyre beskrevet på følgende måte:

$$\text{Barnets mengde med medisin} = \text{voksen mengde} \cdot \frac{\text{barnets alder i år}}{\text{barnets alder i år} + 12}$$

Her er regelen satt opp med en blanding av ord og matematiske symboler (pluss, likhetstegn, brøkstrek). Vi kaller dette å beskrive en sammenheng i *kortform*. Det lønner seg ofte å bruke en kortform fordi en beskrivelse med bare i ord kan bli lang, og en beskrivelse med bare symboler kan være vanskeligere å forstå. En kortform kan ofte være en god mellomstasjon på veien.

a) Lag en regnefortelling som beskriver bare med ord, det som kortformen over forteller om hvordan en beregner mengden av medisin for et barn.

Velg bokstavsymboler for barnets alder, for mengden av medisin som et barn skal ha, og for mengden av medisin som en voksen skal ha.

b) Skriv regelen for å beregne et barns medisinmengde med bokstavsymboler.

c) En voksen dose av en medisin er 50 ml. Hvor mye skal et tre år gammelt barn ha av samme medisin?

d) Hvorfor tror du vi tar hensyn til barnets alder når vi skal beregne mengden av medisin? Hvorfor skal ikke voksne ha ulike mengder medisin avhengig av alder?

e) Hvordan tror du man kom fram til en slik regel for å beregne hvor mye medisin et barn skal ha?

Aktivitet 9, oppgave 2

Kommentarer til aktivitet 9

Aktivitet 9 tar sikte på å vise elevene at sammenhenger mellom variable størrelser er noe vi ofte støter på i dagliglivet. Dette kan brukes som et utgangspunkt for å diskutere nytten av algebra. Det er viktig at elevene erfarer at matematikk ligger implisitt i mye av det de gjør, uten at de tenker over det. Spesielt gjelder det å finne slike tilknytningspunkter for lærestoffet i algebra, som ellers lett kan bli begrenset til en meningsløs manipulering med symboler.

Det finnes utallige eksempler på slike regler som kan brukes som utgangspunkt for diskusjoner i klasserommet. Hvor mye garn som trengs for å strikke gensere i ulike størrelser, og hvor mye bensin en bil trenger for å kjøre ulike strekninger, er to slike eksempler. Vi mener at det er viktig å dvele ved eksempler av denne typen som finnes i lærebøkene. Arbeidet med slike eksempler bør organiseres på en måte som gjør at alle elever blir aktivt involvert, se innledningen til del 2. Dette arbeidet gir ikke samme læringsutbytte om oppgavene bare skal løses individuelt og eventuelt forklares ved en klassediskusjon. I store klasser kan ikke alle elever få tilstrekkelig tid til å sette ord på sine tanker i en klassediskusjon.

Referanser

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). Algebra för alla. *Nämnaren TEMA*. Göteborgs universitet. Göteborg.

Breiteig, T. & Venheim, R. (1999). *Matematikk for lærere 2*. Tano Aschehoug. Oslo.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Nasjonalt læremiddelsenter. Oslo.

Gjone, G. (1997). *Veiledning til funksjoner*. Nasjonalt læremiddelsenter. Oslo.

Kieran, C. (1984). Constructing meaning for equations and equations - solving. I: A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (ed.). *Theory, research and practice in mathematics education* (s. 243–248). Nottingham, U.K.: Shell Centre for Mathematical Education.

Küchemann, D. (1981). Algebra. I: K. Hart (red.) *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*. s. 102–119. London: John Murray.