Bokmål

Kartlegging av matematikkforståelse

Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk

Utdanningsdirektoratet

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Gard Brekke

Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk

Trykk: GAN Grafisk AS

ISBN 82-7726-145-4

Senter for lærerutdanning og skoletjeneste ved Universitetet i Oslo og Telemarksforsking-Notodden har etter oppdrag fra Utdannings- og forskningsdepartementet utarbeidet de diagnostiske prøvene med veiledningsmateriell.

Forord

Dette introduksjonsheftet er skrevet av høgskoledosent Gard Brekke ved Telemarksforsking-Notodden som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden (TFN) og Senter for lærerutdanning og skoletjeneste (SLS) ved Universitetet i Oslo. Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen og har flere formål:

- Utvikle en integrert prøve- og etterutdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.

- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan danne utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor ulike deler av faget.

- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og undervisningen i faget.

- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimum kompetanse.

I tillegg til dette generelle introduksjonsheftet er det til nå utarbeidet diagnostiske prøver og et veiledningshefte for områdene tall og tallregning.

Det blir arbeidet med å utvikle prøver og veiledningsmateriell for flere områder av matematikken.

Innhold

Innledning

Når du velger å gi dine elever en diagnostisk undervisning, innebærer dette en del bevisste valg i tilretteleggelsen av elevenes arbeid. Dette introduksjonsheftet danner et grunnlag for å bruke veiledningshefter knyttet til diagnostiske prøver som er under utarbeidelse.

Del 1 i disse veiledningsheftene tar for seg hver sine områder i skolematematikken og gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse.

Veiledningsheftene inneholder også en samling undervisningsaktiviteter – del 2 – med kommentarer og rettledninger, som retter seg mot de vansker som de diagnostiske oppgavene avdekker.

I del 2 i veiledningsheftene blir det lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg til de vanskene elevene har.

Veiledningsheftene skal kunne brukes uavhengig av hverandre, men alle vil bygge på dette introduksjonsheftet til diagnostisk undervisning i matematikk som inneholder en generell diskusjon omkring matematisk kompetanse, læring i matematikk, arbeidsmåter i faget og bruk av diagnostiske prøver.

Det er mulig å gjøre seg nytte av de diagnostiske oppgavene i undervisningen uten først å lese introduksjonsheftet. Vi vil likevel tilrå at det blir brukt noe tid på dette. En klargjøring av følgende spørsmål har en sentral plass:

- Hva er misoppfatninger?
- Hva er diagnostiske oppgaver?
- Når fungerer oppgaver diagnostisk?
- Hvordan bruke de diagnostiske prøvene i klasserommet?
- Hvilke pedagogiske konsekvenser får våre kunnskaper om misoppfatninger?
- Hvordan undervise med basis i kunnskap om den enkelte elevs misoppfatninger?

Kompetanse i matematikk

Hva er kunnskap, og hvordan utvikler elevenes ideer og begreper seg? Svaret på slike spørsmål er en viktig bakgrunn for å diskutere og vurdere ulike arbeidsmåter i matematikkfaget.

Dette heftet tar utgangspunkt i at det er de handlinger eller erfaringer den enkelte person gjør, som danner grunnlaget for læring. Refleksjonene eller tankene en gjør seg rundt erfaringene, er avgjørende for utviklingen av den aktuelle kunnskapen. Et slikt syn på læring er sentralt i teorier som går under benevnelsen *konstruktivisme*. Dette er teorier som i den senere tid har fått stor oppmerksomhet[1,2,3]. En konsekvens av dette synet på læring er at de viktigste siktemålene ved valg av en bestemt arbeidsmåte er:

- å legge til rette aktiviteter der elevene kan vinne erfaringer som de kan bygge kunnskapen på,
- å gi elevene anledning til å stoppe opp underveis i arbeidet sitt for å reflektere over det de har utført, og det de har lært/funnet ut gjennom dette arbeidet.

HANDLING
↘
REFLEKSJON ➜ LÆRING
↗
ERFARING

Figur 1: Konstruktivisme

En av arbeidsmåtene som bygger på disse tankene, har fått navnet *diagnostisk undervisning*. Denne arbeidsmåten blir presentert i kapittel 3. De aktivitetene som blir presentert med tanke på undervisning om tall og tallregning, er laget slik at de skal kunne være egnet for refleksjon omkring sentrale ideer knyttet til tallbegrepet og de fire regneoperasjonene.

Kapittel 1 Hva vil det si å kunne matematikk?

En kan legge ulike meninger i hva det vil si å *kunne* matematikk. Nedenfor blir det pekt på fem komponenter som utgjør det en kan kalle *matematisk kompetanse*. Disse komponentene vil være velkjente for mange og danner et godt utgangspunkt for tenkningen rundt hva som må være med når det er tale om å utvikle grunnleggende kunnskaper hos elevene.

1.1 Faktakunnskap

Med fakta mener en deler av informasjon som *kan* være usammenhengende eller tilfeldig. Eksempler på fakta i matematikk er at *1000 kg* er definert som et *tonn*, og at *omkretsen* av en figur er definert som *lengden av randen til figuren.* Faktakunnskap kan altså være navn knyttet til et begrep. De to eksemplene er *definisjoner* eller *konvensjoner* som en har funnet det tjenlig å lage. De følger ikke av noe annet.

Hevdvundne *notasjoner* er også fakta. De er eksempler på at menneskene har blitt enige om å symbolisere et bestemt meningsinnhold på en entydig måte. Det er ikke naturgitt eller selvinnlysende at meningsinnholdet til det sammensatte tallsymbolet 32 er verdien 3 multiplisert med 10 og addert til 2. Det er verdt å merke seg at det har tatt svært lang tid å utvikle denne konvensjonen. På den andre siden eksisterer det flere andre konvensjoner for å sette sammen to symboler. Dette kan virke forvirrende, spesielt i innlæringsfasen av symboliseringen. Mens 32 er det samme som $3 \cdot 10 + 2$, så er 3a definert som $3 \cdot a$ (og ikke $3 \cdot 10 + a$) og $3\frac{1}{2}$ betyr $3 + \frac{1}{2}$ (og verken $3 \cdot 10 + \frac{1}{2}$ eller $3 \cdot \frac{1}{2}$).

Å undervise fakta er en relativt enkel oppgave for læreren. Det går på å overlevere konvensjoner, navn og notasjoner. Likevel kan en ikke trekke den konklusjonen at fakta er lett å lære eller å huske for eleven.

1.2 Ferdigheter

Ferdigheter definerer en som *veletablerte prosedyrer* i flere steg. Et eksempel på en ferdighet kan være å vite hvordan en skal gå fram når en skal finne svaret på det oppstilte regnestykket $27 \cdot 37$. Personlig ville jeg med blyant og papir utføre dette arbeidet slik:

$$\begin{array}{rr} & 27 \cdot 37 \\ \hline & 189 \\ + & 81 \\ \hline = & 999 \\ \hline \end{array}$$

Jeg tenker slik:
$7 \cdot 7 = 49$, skriv ned 9 og 4 i minne,
$7 \cdot 2 = 14 + 4$ i minne er 18, skriv ned 18 foran 9,
$3 \cdot 7 = 21$, skriv ned 1 under 8 og ha 2 i minne,
$3 \cdot 2 = 6$ og 2 i minne er 8, skriv ned dette foran 1.
Adder kolonne for kolonne. Dette gir svaret 999.

Figur 2: Eksempel på multiplikasjonsprosedyre

Det er viktig å ha gode ferdigheter på en rekke områder i faget dersom en skal få nytte av matematikken. Det er også viktig å *automatisere* prosedyrer som i eksemplet ovenfor, for å kunne rette oppmerksomheten mot andre sider i en praktisk situasjon der et problem skal løses. Løsning av oppstilte regnestykker hviler i første rekke på gode ferdigheter, og de fleste av disse ferdighetene lar seg utføre med lommeregnere.

Legg merke til at ferdighetene har tydelige avgrensninger. De er ofte lite fleksible, idet de er utviklet innenfor en viss klasse av oppgaver og blir husket som regler for denne spesielle klassen. Innenfor tallregning er det i noen tilfeller tale om *å flytte komma*, i andre tilfeller *å henge på nuller bak tallet*. Det er velkjent at denne regelfokuseringen ofte fører til en sammenblanding av regler fordi en ikke husker den klassen regelen ble utviklet innenfor. En bruker regelen i sammenhenger der den ikke gjelder, dvs at en *blander regler*.

Det er viktig for lærere å tenke gjennom hvordan arbeidet med matematikk i klasserommet påvirker elevenes tanker om *hva* matematikk er. Hva er det for eksempel som gjør at mange elever først og fremst ser på matematikken som en samling av regler, oppskrifter og formler? *Når* er det slike tanker tar til å forme seg? Det er på sin plass å stille spørsmålet om det er dette som *virkelig* er de viktigste sidene ved matematikken. Vi underviser i:

- *en* regel for multiplikasjon med tosifrede tall,
- *en* regel for å multiplisere hele tall med 10 eller 100 (henger på en eller to nuller bak på tallet),
- *en* regel for å multiplisere et desimaltall med 10 eller 100 (flytter komma en eller to plasser mot høyre),
- *en* regel for å multiplisere to desimaltall (ignorerer først komma, multipliserer som om det var hele tall, og teller plasser bak komma for å kunne sette det inn igjen på riktig plass i svaret).

Hvilket syn på matematikk formidler vi dersom vi lar slike aktiviteter dominere store deler av undervisningen i faget?

1.3 Begrepsstrukturer

Et karakteristisk trekk ved matematiske begreper er at de ikke har vokst fram isolert, men eksisterer i et nettverk av enkelte ideer. Vi kaller slike nettverk av ideer for *begrepsstrukturer*. Strukturene gjør matematikken meningsfull og støtter opp under ferdighetene. Det at slike strukturer eksisterer, viser seg blant annet ved at en har evne til å rette noe når en har husket feil, og å overføre eller tilpasse prosedyrer en har lært i *en* sammenheng, til nye situasjoner. I det følgende blir det skissert et eksempel på hvordan *en* begrepsstruktur av multiplikasjon (og divisjon) kan tenkes å vokse fram, og vi vil peke på noen problemer en kan vente å møte på veien fram mot en rik begrepsstruktur.

Utvikling av begrepet multiplikasjon
I den første tiden i skolen teller en med små naturlige tall og arbeider med oppgaver som faglig

sett handler om addisjon og subtraksjon. Oppgavene kan ofte løses ved hjelp av telling, uten at addisjon og subtraksjon trenger å være formalisert som kunnskaper. Telling, på ulike avanserte nivåer, er hovedaktiviteten på dette trinnet i utviklingen. Senere blir begrepene multiplikasjon og divisjon introdusert, vanligvis med utgangspunkt i kunnskaper om addisjon og subtraksjon av hele tall.

Studier av hvordan yngre barn løser oppgaver som vi ville kalt multiplikasjonsoppgaver, viser store variasjoner i løsningsstrategier. Det kan være en utvikling fra å telle alle elementene i en mengde, enten med eller uten hjelp av konkreter, eller de kan ha utviklet det en kaller *rytmisk telling*, for eksempel: «1, 2, 3, – 4, 5, 6, – 7, 8, 9 – ...» der hvert tredje tallord blir framhevet på et eller annet vis. Rytmisk telling utvikler seg ofte videre til *rekke-telling*, «3, 6, 9...», når rekken av tallord blir familiær. Mange barn må ofte følge rekke-tellingen med en markering, gjerne ved hjelp av finger, for å holde styr på antall grupper som er talt opp. Et neste skritt i utviklingen kan være å benytte ett eller flere addisjons- eller multiplikasjonsfakta til å løse en oppgave. En slik utvikling *kan* foregå gjennom et bevisst arbeid med tallsystemets egenskaper.

Tradisjonelt har undervisningen innenfor dette området fokusert på at elevene skal bli i stand til å huske tallfakta for addisjon og multiplikasjon og å kunne den skriftlige algoritmen til disse regneoperasjonene. Vi setter her fram påstanden at en konsentrerer seg *for mye* om det tallmessige aspektet av begrepet multiplikasjon. Når dette blir fokusert så mye, fører det ofte til at elevene ikke vinner tilstrekkelig varierte erfaringer om hva multiplikasjon er. Slike kunnskaper kan bygges opp ved å arbeide med problemer fra ulike sammenhenger der en bruker multiplikasjon. Dette trenger ikke *bare* å være gjentatt addisjon med like store addender, slik som i følgende eksempel: «5 poser med 7 epler i hver. Hvor mange epler har jeg til sammen?»

Når tallsystemet blir utvidet fra naturlige tall til også å omfatte brøk og desimaltall, møter barna en kritisk fase når det gjelder å forstå hva som ligger i begrepet multiplikasjon. Det er her tale om å *utvide* det begrepet de alt har dannet seg gjennom erfaringer med de naturlige tallene. I tillegg til at de skal utvide tallområdet sitt, må også deres tanker om multiplikasjon utvides. Nye *tankemodeller* for multiplikasjon må bygges opp. Før de går inn i denne fasen er det viktig at erfaringene *ikke bare* knytter seg til at multiplikasjon er gjentatt addisjon av like store addender. Det er da viktig at barna har fått anledning til å vinne erfaringer med multiplikasjon knyttet til problemløsning fra en vid variasjon av situasjoner. Det er således tale om en utvikling av to ulike sider fram mot et funksjonelt begrep for de fire regneartene. Cockcroft-rapporten[4] formulerer dette slik:

> *The ability to carry out a particular numerical operation and the ability to know when to make use of it are not the same; both are needed.*
>
> *The mathematics of employment and of everyday life is always mathematics in context and is based largely on measurements of many kinds and made in many different situations.*

En kan med rette stille spørsmålet om en har vært så opptatt av den tallmessige siden av utviklingen ved regneoperasjonene at en har «glemt» at elevene også trenger hjelp til å forstå hva som ligger i hver regneoperasjon. Skal de få erfaring med å bruke regneoperasjonene funksjonelt, må vi la dem vinne erfaringer med operasjonene fra situasjoner der en bruker regneoperasjonene på ulik måte.

Ulike strukturer av multiplikative problem

For å gjøre nøyaktig greie for hva et matematisk begrep inneholder, og hvilke implikasjoner kunnskapen fra en begrepsanalyse kan få for undervisning, må en først avdekke begrepets struktur. Det vil si: Hvordan dette begrepet er knyttet til andre begreper, og hvordan det blir brukt på ulike måter i praktiske situasjoner. En slik analyse blir kalt klassifisering av struktur. Det er flere måter å klassifisere multiplikative strukturer på. Nedenfor følger et eksempel på en slik klassifikasjon der hver *klasse* av problemer er illustrert med en oppgave.

Klasser	Eksempler på oppgaver
1. Like grupper	6 bord, 4 stoler ved hvert bord. Hvor mange stoler?
2. «Rater»	Hvor mye for 2,6 kg epler til 11,50 kroner per kg?
3. Omregning	55 kroner for 5 pund. Hvor mye for 8 pund?
4. Forstørring	Et bilde er 6 cm langt og 4 cm høyt. Dette blir forstørret slik at det blir 15 cm langt. Hvor høyt blir det?
5. Forhold mellom tall	3 blå perler for 5 røde. Hvor mange blå perler for 60 røde?
6. Likt forhold, samme enhet	3 liter blå maling er blandet med 5 liter rød maling. Hvor mange liter blå maling må blandes med 15 liter rød for å få den samme fargen?
7. Likt forhold, ulike enheter	30 g sukker til 1 liter melk. Hvor mye til 2,5 liter?
8. Multiple proporsjoner	6 g kaffe per person hver dag. Hvor mye for 40 personer i 7 dager?
9. Rekker	4 rekker av biler, 12 i hver på en rektangelformet parkeringsplass. Hvor mange biler i alt?
10. Kartesisk produkt	3 sorter brød og 5 sorter pålegg. Hvor mange ulike typer smørbrød kan lages?
11. Permutasjoner	På hvor mange ulike måter kan 4 personer stilles opp i en kø?
12. Areal/Volum	Hvor mange kasser som er 1 m lange, 50 cm brede og 50 cm høye, er det mulig å pakke i et rom som er 5 m langt, 4 m bredt og 3 m høyt?

Tabell 1: Klassifikasjon av multiplikative strukturer

Den dominerende tradisjonen når det gjelder undervisning i matematikk, synes å være basert på troen på at gjentatte øvelser av fakta og ferdigheter fører til bedre forståelse av et begrep. (En forstår begrepet desimaltall bedre dersom en lærer å addere tallene, eller en forstår grafisk framstilling bedre dersom en øver på å tegne punkter på grafer i et koordinatsystem.) Det foreligger nå en stor mengde forskningsresultater som svekker et slikt syn på læring. For eksempel kan en slutte fra forskning at 15-åringer generelt sett *ikke* fullt ut forstår hva et desimaltall betyr, selv om de får riktig svar når de adderer eller multipliserer slike tall. Like ens er mange 15-åringer *ikke* i stand til å tolke en grafisk framstilling, selv om de er i stand til å plotte punktmengder i et koordinatsystem.

Et vidt og funksjonelt multiplikasjonsbegrep krever at alle klassene av problemstrukturer får sin plass i undervisningen, og at en fokuserer på likheter og ulikheter mellom disse klassene. Bell, Fischbein og Greer[5] uttrykker dette slik:

> *It is clear now that we need to teach the different kinds of multiplicative structures – partition, quotation, rate (including price and speed), measure conversion, enlargement and so on. Each of these should be taught in a range of common context. Within each context particular attention needs to be paid to the invariance of operational structure across change in size and number.*

En rekke studier er gjort om barns forståelse av multiplikative problemer[6,7,8,9,10]. De indikerer alle at barn har en heller vag oppfatning av det underliggende begrepet. Dette fører naturlig til at en har reist spørsmålet om hvordan matematikkundervisningen på en bedre måte kan bygge opp et videre og mer funksjonelt multiplikasjonsbegrep enn det som tradisjonelt har vært gjort.

1.4 Generelle strategier

Med generelle strategier mener en evnen til å velge passende ferdigheter for å løse et problem fra en ukjent situasjon, både i matematikken og i dagliglivet. Generelle strategier spiller en vesentlig rolle når en skal utføre problemløsning i matematikk. I noen land, for eksempel USA, omtaler en ofte generelle strategier som *Higher Order Thinking Skills*. Dette omfatter blant annet å kunne

- representere, abstrahere og generalisere,
- teste hypoteser og bevise,
- kontrollere,
- stille spørsmål,
- bruke matematisk språk (formelt og uformelt) som er passende for å løse et problem,
- tolke matematiske resultater i den konteksten der problemet har sitt utspring.

1.5 Holdninger

Vårt syn (både som lærer og elev) på hva matematikk er, vil bestemme hvorledes læreren underviser i faget, og hvorledes eleven møter lærestoffet. Lærere som ser det som sin oppgave å formidle fakta og ferdigheter, tenderer ofte til en forklarende undervisning med vekt på en eksempel-regel-metode. De som ser det som viktigst å oppmuntre til – og legge til rette for – en utvikling av begrepsmessige strukturer, vil inkludere mer praktisk arbeid og reflekterende diskusjoner. Tilegnelse av slike strategier omfatter blant annet at en lar elevene reflektere over egne angrepsmåter og prosesser når problemer blir løst.

Når det gjelder holdninger, skiller en i den engelsk-språklige litteraturen mellom *beliefs* (meninger om matematikk, *om* seg selv i forhold til faget, *om* matematikkundervisning, *om* sosial kontekst) og *attitudes*[11,12].

Både kapittel 1.4 og 1.5 kunne fortjent en mer omfattende plass i diskusjonen av matematisk kompetanse. Men siden dette rettledningsmaterialet i hovedsak handler om arbeid med problemer en møter i undervisningen når elevene skal utvikle begrepsstrukturer, har kapittel 1.3 fått størst plass. For mer informasjon om generelle strategier kan en vise til:[13,14,15,16,17].

Kapittel 2 Diagnostiske oppgaver

I dette kapitlet vil vi på generelt grunnlag diskutere diagnostiske oppgaver i sammenheng med begrepsdannelse. Hvordan kan en bruke slike oppgaver til å undersøke hvilke begreper den enkelte elev har utviklet? Hvilke problemer står han eller hun overfor i prosessen fram mot et solid begrep? Vi vil se nærmere på *misoppfatninger* og *delvise begreper*.

2.1 Hva er misoppfatninger?

Det er velkjent at det er en kritisk fase i læringen av matematikk når tallområdet blir utvidet fra hele tall til å omfatte brøk og desimaltall. Arbeidet med de utfordringene elevene møter i forbindelse med dette, blir drøftet i kapittel 3 og står sentralt i veiledningsheftene. Før vi ser nærmere på dette, tar vi opp noen spørsmål omkring det en i fagdidaktikken i matematikk kaller *misoppfatninger*.

Barn møter desimaltall i forbindelse med penger eller målinger før dette emnet blir aktuelt i undervisningen. Det sentrale i disse erfaringene er at det er et *helt antall kroner* på den ene siden av komma og et *helt antall øre* på den andre siden av komma. Tilsvarande er det for meter og centimeter når en har gjort en måling. Det kan synes som den undervisningen en gir om at et desimaltall er *ett tall* som kan inneholde *tideler, hundredeler, tusendeler* osv, ikke fortrenger denne oppfatningen fra erfaringer fra arbeid med penger og målinger.

Vi berører her et sentralt problem i matematikkundervisningen: å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke alltid gjelder i alle nye situasjoner. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for *misoppfatninger*.

Det er viktig å forstå forskjellen på de *feil* elevene gjør, og de *misoppfatninger* de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, fordi en ikke er oppmerksom nok eller ikke leser oppgaven godt nok osv. Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning – en idé – som en bruker nokså konsekvent. Ofte er dette et resultat av en overgeneralisering av tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut. En kan gjerne se på dette som forsøk på å skape mening og sammenheng i det en lærer. Vi har tidligere hatt eksempler knyttet til multiplikasjonsbegrepet. Nedenfor skal vi se nærmere på hvordan elevene bygger opp forståelse av dette begrepet. Dette har også en parallell til barns språkinnlæring, for eksempel når det gjelder svak bøyning av verb.

Barn bygger vanligvis sin første forståelse av de fire regneartene på erfaringer med små hele tall. Disse regneoperasjonene er vanligvis introdusert ved hjelp av enkle tankemodeller som ikke direkte lar seg generalisere til arbeid med desimaltall, og som derfor ofte fører til at misoppfatninger oppstår. Dersom en bare får oppleve multiplikasjon som gjentatt addisjon med like store addender, vil en utvikle en snever tankemodell for hva multiplikasjon egentlig er. En kan snakke om at en har et *delvis begrep* om multiplikasjon. Med bakgrunn i denne tankemodellen vil det være vanskelig å gjøre et overslag av svaret på $0{,}62 \cdot 0{,}37$. Mange elever vil tro fast på at multiplikasjon alltid gir et større svar enn utgangspunktet, fordi all deres erfaring med gjentatt addisjon tilsier dette. Tilsvarende vil elever som bare møter *delingsdivisjon* være ute av stand til å knytte en praktisk mening til regneuttrykket 12 : 0,4. Her må en bruke *målingsdivisjon*. Elevene trenger å bli gjort klar over at de har med målingsdivisjon å gjøre. Et konkret eksempel kan være: 12 m gardinstoff blir målt opp i lengder på 0,4 m. Hvor mange slike lengder får vi? Her er det ikke snakk om at noe skal deles «rettferdig».

En annen viktig årsak til misoppfatninger er at mange elever ikke skiller mellom begrepet multiplikasjon – hvilke ideer som er knyttet til multiplikasjon og utregningsmåten – og *multiplikasjonsalgoritmen*. Erfaringene til elevene med multiplikasjon har for det meste vært knyttet til det å utføre multiplikasjonen, altså algoritmen. Å *kunne* multiplikasjon er å kunne algoritmen eller å huske multiplikasjonstabellen.

Det er trolig ikke mulig å unngå at misoppfatninger og delvise begreper blir dannet. De er en del av barnas normale utvikling. Nye ideer blir tolket ut fra eksisterende erfaring. Ugyldige slutninger blir ofte trukket – og generaliseringer blir gjort – på sviktende grunnlag. Oppfatninger av dette slaget finner en innenfor alle felt av matematikken. Nedenfor nevnes noen vanlige misoppfatninger innenfor tall og tallregning:

- Det lengste tallet har alltid størst verdi.
- En kan ikke dele et lite tall med et stort.
- Multiplikasjon gjør alltid svaret større.
- En kan bare dividere med hele tall.
- 3 : 6 og 6 : 3 gir samme svar.
- Divisjon gjør alltid svaret mindre.

Slike misoppfatninger, som gjerne kan gi eleven riktige svar også i andre tilfeller enn for hele tall, følger ofte eleven gjennom hele skoletiden og senere i livet. De viser seg å være så grunnfestet at de tjener som rettesnor framfor det logiske i en situasjon, for eksempel når det gjelder å velge riktig regneoperasjon i denne oppgaven:

Kjøttdeig koster 69,50 kroner per kg, hvor mye koster 0,86 kg?

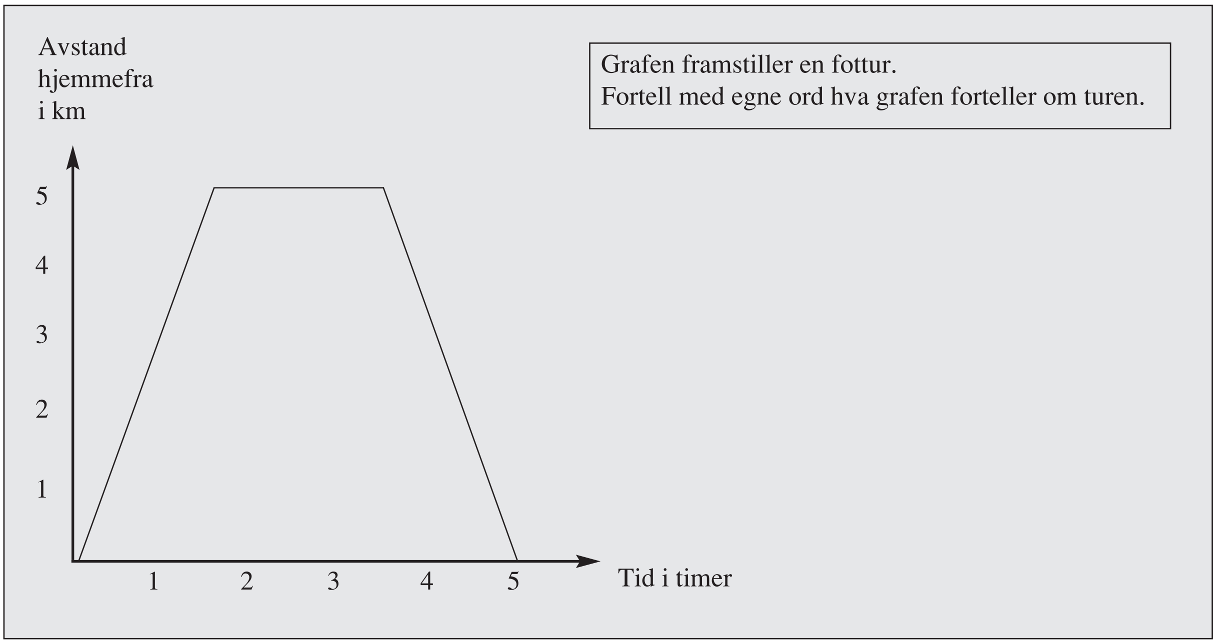
Oppgaveeksempel 1: Regneoppgave med divisjons-/multiplikasjonsproblem

Mange velger divisjon som operasjon fordi de vet at svaret skal bli mindre enn 69,50 kroner. En ser også at elever ofte tror at om en forandrer tallene i en oppgave, så er det ikke sikkert at regneoperasjonen en må bruke i løsningen, forblir den samme. Vanlige undervisningsmetoder har vist seg å være ineffektive når det gjelder å få bukt med slike problemer. Dette gjelder både metoder hvor en ignorerer misoppfatningene, og metoder hvor en forsøker å unngå misoppfatninger ved å definere begrepene nøyaktig og fullstendig ved den første innføringen.

Eksempler på misoppfatninger om grafer

Misoppfatninger finner en innenfor alle områder i skolematematikken. Nedenfor er det gitt noen eksempler på misoppfatninger knyttet til grafer i matematikken.

En vanske som ofte dukker opp, er knyttet til forestillingen om at en graf er et bilde av en situasjon. Å kunne overvinne denne forestillingen er delvis avhengig av å vinne erfaring med å representere sammenhengen mellom to variable størrelser ved hjelp av en graf. Problemet kommer ofte fram når en skal tolke det en graf framstiller i en gitt kontekst. Oppgaveeksempel 2 retter seg mot dette.

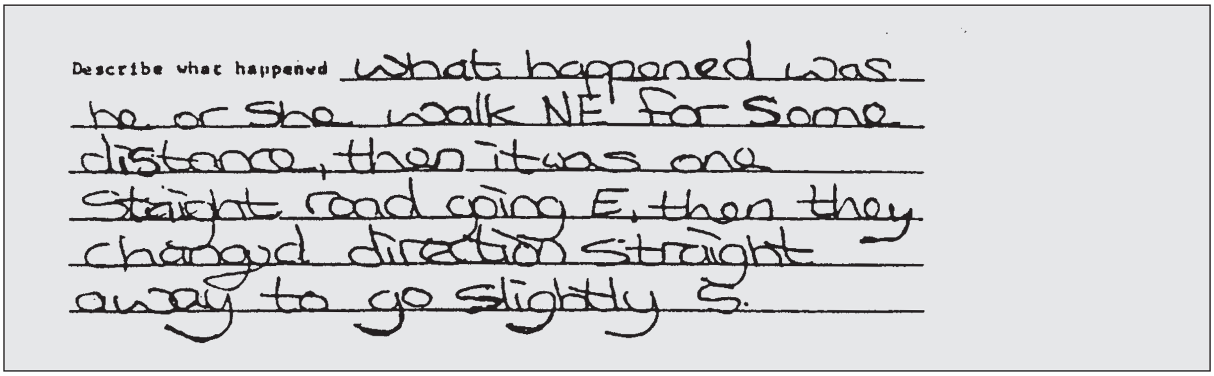


Oppgaveeksempel 2: Oppgave med tolkning av graf

Av 192 elever i 8. klasse ved en skole fordelte svarene seg slik[18]:

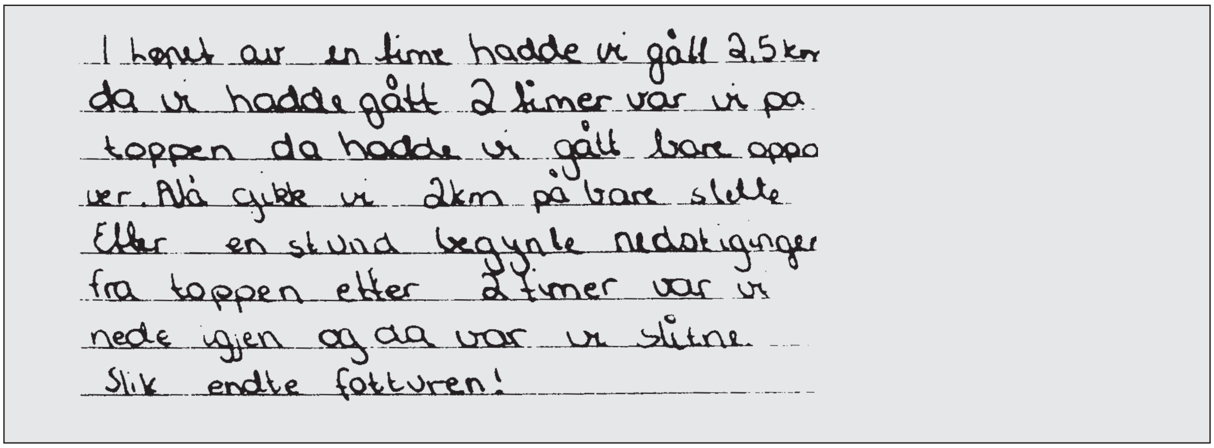
- 25 % gav korrekt svar.
- 21 % gav svar som involverte fart. (Først er farten økende, så jevn og så minkende.)
- 18 % hadde en billedmessig tolkning. (Går først oppover, så rett bortover og så nedover.)
- 6 % tolket grafen som et kart. (Rett fram, snu til høyre – snu til høyre igjen.)
- 2 % hadde geometriske forklaringer.
- 14 % hadde nevnt avstand og tid uten at sammenhengen mellom disse kom fram.

Nedenfor følger tre elevsvar som illustrerer noen av disse misoppfatningene.



Elevsvar 1: Mandys svar til oppgaveeksempel 2, tolkning av graf

Mandy tolker grafen som et kart.

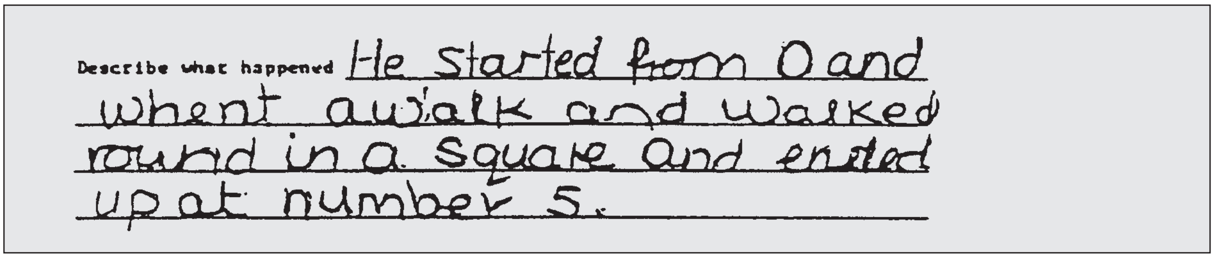


I løpet av en time hadde vi gått 2,5 km
da vi hadde gått 2 timer var vi på
toppen da hadde vi gått bare oppo
ver. Nå gikk vi 2km på bare slette
Etter en stund begynte nedstigningen
fra toppen etter 2 timer var vi
nede igjen og da var vi slitne.
Slik endte fotturen!

Elevsvar 2: Lenes svar til oppgaveeksempel 2, tolkning av graf

Lene viser den rent billedmessige tolkningen som var den mest vanlige feilen i denne undersøkelsen.

Teresa i elevsvar 3 gir en geometrisk tolkning:

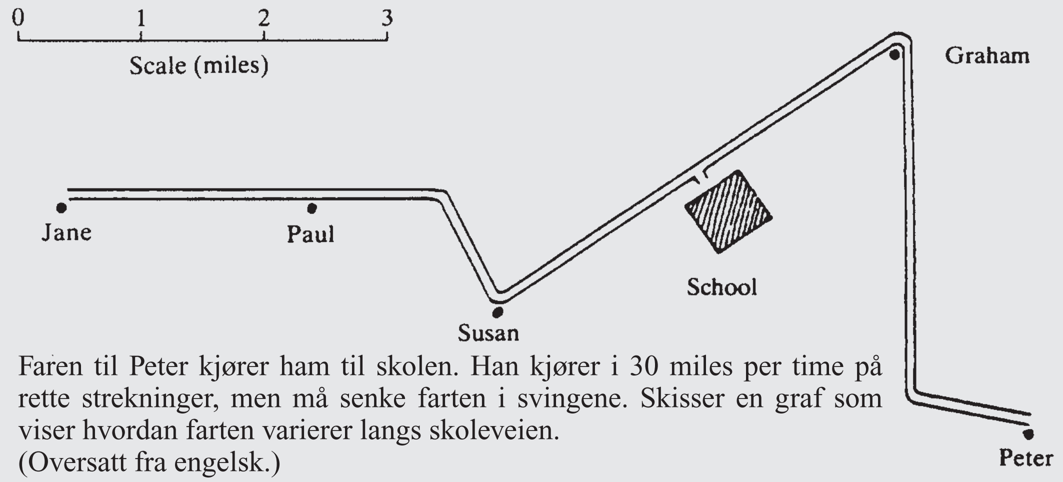


Describe what happened He started from 0 and whent a walk and walked round in a square and ended up at number 5.

Elevsvar 3: Teresas svar til oppgaveeksempel 2, tolkning av graf

Også i oppgaven «Skoleveien» (oppgaveeksempel 3) spiller denne misoppfatningen en viktig rolle.

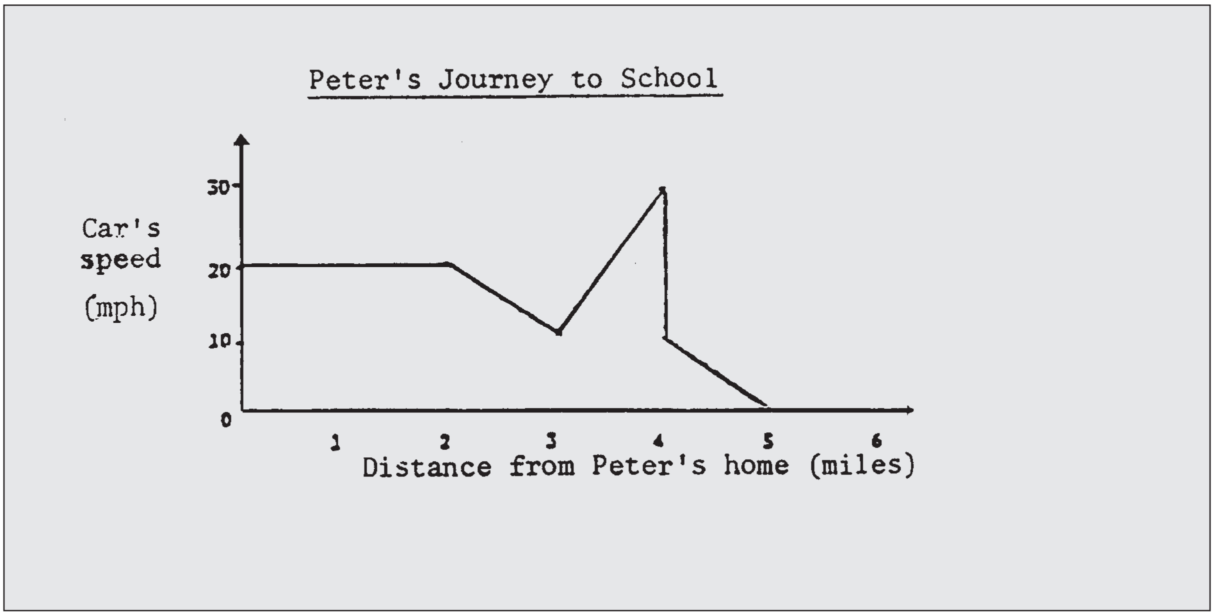
GOING TO SCHOOL



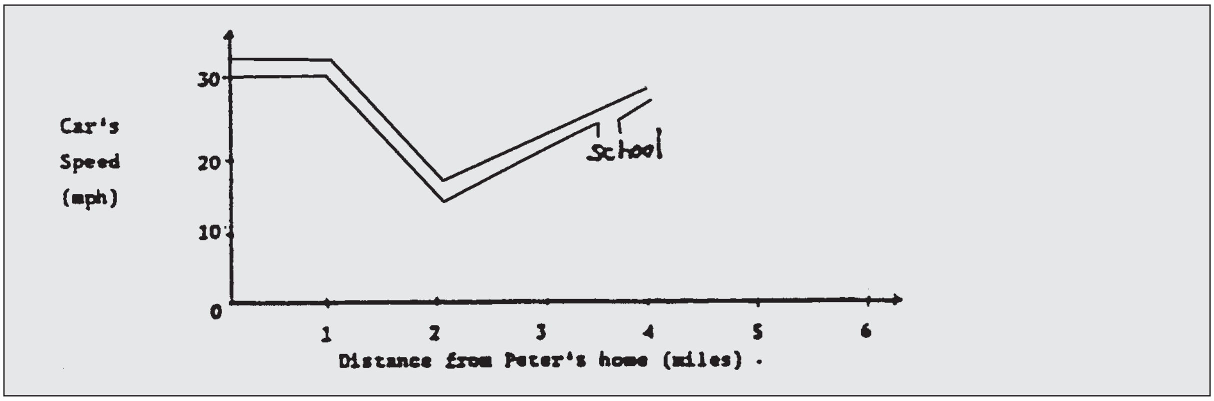
Faren til Peter kjører ham til skolen. Han kjører i 30 miles per time på rette strekninger, men må senke farten i svingene. Skisser en graf som viser hvordan farten varierer langs skoleveien.
(Oversatt fra engelsk.)

Oppgaveeksempel 3: Oppgave med grafisk framstilling

I de to eksemplene på elevsvar nedenfor viser Mandy og Sean at de har misoppfatninger om hva grafer gir informasjon om. De tolker en graf som et bilde av en situasjon.



Elevsvar 4: Mandys svar til oppgaveeksempel 3, grafisk framstilling



Elevsvar 5: Seans svar til oppgaveeksempel 3, grafisk framstilling

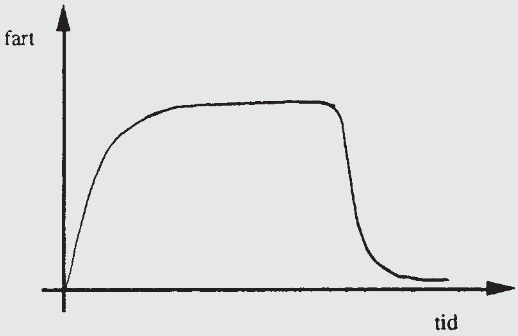
I oppgaven som er presentert i Elevsvar 6, viser disse vanskene seg i andre sammenhenger. I denne oppgaven skal en finne en situasjon som passer til en gitt graf. Dette elevsvaret er hentet fra Breiteig og Brekke[19]. Oppgaven var med i en diagnostisk prøve for elever i 7. klasse. Svarene fordelte seg slik blant de åtte alternativene:

- Stup 5 %
- Sprint 29 %
- Orientering 17 %
- Sprangridning 7 %
- Turn 0 %
- Fallskjermhopping 9 %
- Spydkast 16 %
- Høydehopp 12 %
- 5 % svarte ikke på oppgaven

26 % av elevene ga en akseptabel forklaring, mens hele 32 % gav en forklaring ut fra ideen om at grafen er et bilde av situasjonen.

Videre drøfting av misoppfatninger knyttet til grafer vil komme i et rettledningshefte som utvikles til diagnostiske oppgaver om funksjoner.

4 Hvilken idrett vil gi en slik graf ?



Figur 4

Sett ring rundt det du tror er *mest riktig*. Velg mellom:

Stup

Sprint

Orientering

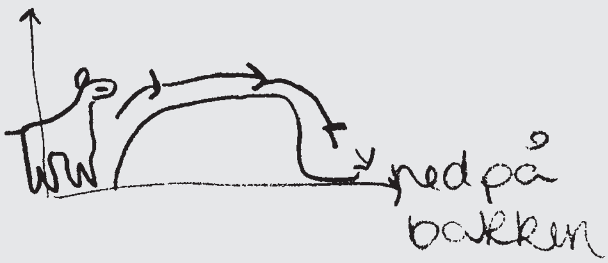
Sprangridning

Turn

Fallskjermhopping

Spydkast

Høydehopp



Hvorfor mener du at det er mest riktig?

....

... .

Elevsvar 6: Oppgaveeksempel og elevsvar, tolkning av graf

2.2 Hva er diagnostiske oppgaver?

Prøver i matematikk blir vanligvis holdt etter en undervisningsperiode. Hovedmålet med prøven er vanligvis å finne ut hvor godt elevene har fått tak på visse fakta, ferdigheter og/eller begreper. Målet med det vi kaller *diagnostiske oppgaver,* er noe ulikt dette. Diagnostiske oppgaver kan gjerne komme *før* en undervisningssekvens og blir brukt til

- å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også *uten* at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke,

- å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver,

- å rette undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for på den måten å overvinne dem og de delvise begrepene,

- å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier,

- å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.

Diagnostiske prøver kan gjerne inneholde noen typer oppgaver som elevene ikke tidligere har arbeidet mye med. Elevene vil likevel oftest ha ideer om hvordan de skal angripe oppgavene for å finne et svar. Det er vår erfaring at lærere blir mer sensitive og effektive i undervisningen når de oppdager disse ideene hos elevene og tar hensyn til dem i undervisningen.

Enkelte lærere kan føle at det er feil eller «urettferdig» å prøve elevene i lærestoff som ikke er «gjennomgått». Det bør gjøres klart for elevene at oppgavene blir brukt på en annen måte enn det elevene er vant med. Hovedmålet er

- å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper,

- å bli kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene,

- å hjelpe læreren med å planlegge undervisningen.

Oppgavene har ikke til hensikt å vurdere eleven med tanke på rangering.

Prøver til unge elever bør presenteres både muntlig og skriftlig. I noen av oppgavene må elevene oppfordres til å vise hvordan de kom fram til svarene sine. Utregninger og diagrammer sammen med forklaringer knyttet til løsningen gir oss verdifull informasjon om hvordan elevene tenker. Jo mer skriftlig materiale vi får, desto mer informasjon kan vi få om strategiene deres og ideene knyttet til begrepene og misoppfatningene.

2.3 Når fungerer en oppgave diagnostisk?

Av grunner som er nevnt ovenfor, vil en diagnostisk prøve inneholde spørsmål som vanlige elever ofte har problemer med å gi riktig svar på. En vil prøve å unngå å stille spørsmål der elevene kan få riktig svar selv om de har feilaktige ideer knyttet til begrepet. Det er således mulig å skille mellom oppgaver ut fra den diagnostiske informasjon de gir om hvilke tanker elevene gjør seg om et bestemt begrep. For eksempel vil 0,24 : 2 være en oppgave som gir liten diagnostisk informasjon, siden elever kan få riktig svar selv om de har den misoppfatningen at desimaltall er et par av hele tall. På den andre siden vil 0,12 : 2 være en god diagnostisk oppgave, fordi den «avslører» disse elevene siden de trolig vil svare 0,6. På samme måte vil det å finne hvilket tall som er størst av 0,23, 0,62 og 0,42, være en oppgave som gir liten diagnostisk informasjon. Stiller en derimot samme spørsmål om tallene 0,62, 0,236 og 0,4, så vil en ha en god diagnostisk oppgave.

2.4 Hvordan bruke diagnostiske prøver i klasserommet?

En diagnostisk prøve vil inneholde relativt mange oppgaver der elevene gir feil svar. Det er således viktig at elevene vet noe om hovedsiktemålet med prøvene, og at disse skiller seg fra vanlige prøver. Prøvene i denne samlingen kan brukes på flere måter. De må oppfattes som en samling av diagnostiske oppgaver som kan være et godt redskap til å vinne kunnskap om tenkningen hos den enkelte elev og om hvor utbredt de ulike ideene er i klassen. Prøvene trenger derfor ikke å tas som hele prøver, men kan også sees på som en samling av oppgaver som har vist seg å gi rik informasjon til undervisningen, både når de blir løst i samtale mellom lærer og elev, og når de er en del av en skriftlig prøve. Det må understrekes at hver diagnostisk oppgave er knyttet til et bestemt problemområde innenfor det aktuelle begrepet.

Kapittel 3 Diagnostisk undervisning

Dette kapitlet handler om en arbeidsmåte i matematikkundervisningen som tar hensyn til forskningsresultater når det gjelder å lære ulike begreper i matematikk. Et viktig krav til arbeidsmåten er at den skal sikte mot å bygge opp solide begreper som kan gi et godt grunnlag for langtidslæring. Det må understrekes at andre arbeidsmåter er mer tjenlige når det gjelder undervisning av *faktakunnskaper* og *ferdigheter*.

I veiledningsheftene knyttet til prøvene i de ulike områdene av faget vises det resultater som illustrerer hvor komplisert det er å hjelpe elevene til å utvikle solide begreper. Disse resultatene reiser også spørsmål om prioriteringer når det gjelder undervisning i matematikk. Det er tradisjon at undervisningen legger mer opp til å utstyre elevene med fakta og ferdigheter enn til å hjelpe dem til å bygge opp begrepsmessige strukturer. Arbeid med for eksempel desimaltall eller grafisk framstilling involverer for det meste elevene i å utføre rekker av rutineoppgaver. Det blir ikke nok tid til å stoppe og diskutere eller reflektere over meningen med det de utfører. Dette er en tradisjon som det synes å være vanskelig å endre. En slik måte å arbeide på kan være egnet for læring av fakta og ferdigheter, men det er tydelig at denne metoden kommer til kort når det er tale om innlæring av begreper.

Lærebøker har tradisjonelt lagt hovedvekten på eksempel-regel-metoden knyttet til fakta og ferdigheter, med øving på disse som det viktigste. Lærebøker er utformet slik blant annet med tanke på å lette arbeidet for en travelt opptatt lærer. Av samme grunn er språket gjort så enkelt som mulig. Oppgavene er svært ofte fragmentert til små isolerte steg, der målet er å øve seg slik at en kan mestre disse stegene – ett om gangen. På den måten blir elevenes aktiviteter i første rekke rettet mot dette, mens aktiviteter som retter seg mot begrepsmessige diskusjoner og refleksjoner, kommer i andre rekke. For å lage bøker som passer til individuelt arbeid, har en ofte tidligere lagt vekt på å velge teksten på oppgavene så nær opp til selve regneprosedyren som mulig. På den måten blir den matematiske oppgaven nærmest en slags stenografi av teksten. Et eksempel på dette er at en i et tekststykke om divisjon «alltid» lar divisoren komme etter dividenden, som i oppgaven: 15 epler skal deles på 5 personer, hvor mange til hver? Et annet eksempel innenfor divisjon kan være at en i teksten «alltid» lar det største tallet komme først. Dette kan være med på utvikle to av de misoppfatningene om divisjon som er nevnt i kapittel 2.

Det kan også stilles spørsmål ved hvilken rolle tekstoppgaver (eller såkalte praktiske oppgaver) i første rekke skal ha i matematikken. Skal de være der for å vise at det vi lærer i matematikken, er praktisk nyttig, er de der for at vi skal bruke dem til å øve på bestemte regneprosedyrer, eller bør vi legge vekt på tekstoppgaver fordi de er et viktig element i å utvikle solide matematiske begreper? Det kan virke som om en i mange lærebøker – tidligere i alle fall – har vært så opptatt av i første rekke å undervise i regneteknikker og -prosedyrer at også tekstoppgavene har hatt dette som sitt hovedmål. Da vil for eksempel flertallet av oppgavene i et kapittel om divisjon handle om divisjon. Det elevene har å gjøre i løsningen av oppgavene, vil være å dividere tallene som finnes i teksten. Elevene blir sjeldnere stilt overfor problemet med å velge riktig regneoperasjon. Veiledningsheftet knyttet til prøvene i områdene Tall og Tallregning presenterer resultater som viser at det å velge regneoperasjon er problematisk for mange elever. Det er en velkjent sak at elevene etter hvert utvikler strategier for valg av regneoperasjon i slike oppgaver ut fra erfaringer som har lite å gjøre med forståelsen av selve strukturen i oppgaven, for eksempel:

- Er det mer enn to tall, så adder dem.
- Er de to tallene omtrent like store, så subtraher det minste fra det største.
- Er det ene tallet relativt stort i forhold til det andre, så divider det store med det lille.
- Går ikke divisjonen opp, så er det kanskje multiplikasjon.

Det eksisterer nå en stor mengde forskningsresultater om undervisning og læring av matematikk som viser at for å forstå et matematisk begrep er det *bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å gjennomføre en lang rekke øvelser*[20,21,22,23,10]. Aktivitetene må på en naturlig måte inneholde noen av de sentrale ideene et begrep er satt sammen av, og må være slik at disse ideene kan diskuteres og takles i dybden. Dette blir gjort for at elevenes alternative strategier og tanker rundt begrepet skal komme fram i lyset og på den måten knyttes til det faglige innholdet i begrepet.

En arbeidsmåte der vi bevisst setter søkelyset på – og arbeider med – vanlige feil og misoppfatninger som elever har, er kalt *diagnostisk-responsiv undervisning*, eller bare *diagnostisk undervisning*. I denne arbeidsmåten er det tale så vel om en diagnostisering av tanker som enkelte elever har utviklet rundt et bestemt begrep, som det *matematiske innholdet av lærestoffet*. Formålet med diagnostiseringen er å finne fram til hvilke erfaringer elevene trenger å gjøre gjennom undervisningen for å bygge opp det aktuelle begrepet. Diagnostisk undervisning baserer seg således på at det i prinsippet er mulig å identifisere hvilke tanker elevene har gjort seg om det kommende lærestoffet, og hvilke misoppfatninger og hindringer elevene vanligvis møter når de utvikler ulike begreper i matematikken.

Skjematisk kan en trekke fram følgende faser i diagnostisk undervisning:

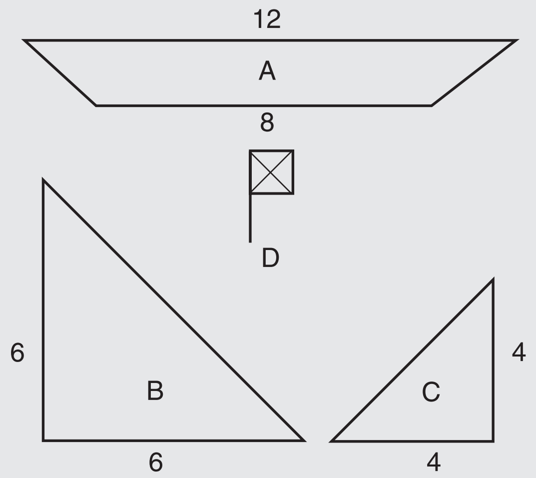
1 Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.

2 Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en *kognitiv konflikt*.

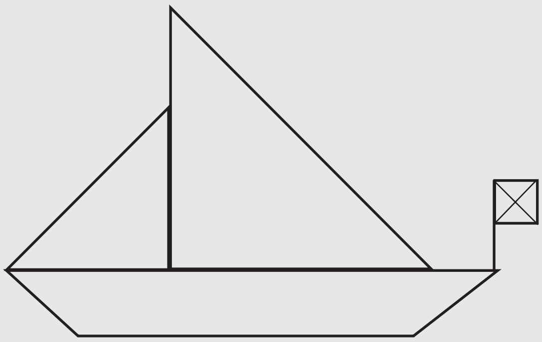
3 Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.

4 Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger.

Grunnlaget for det første punktet er de diagnostiske oppgavene som er utviklet, og som blir grundig gjennomgått i veiledningsheftenes del 1. Der vil vi vise strategier som elevene bruker, og de misoppfatninger og delvise begreper som viser seg å ha stor utbredelse. De neste punktene er hovedtema for del 2 i veiledningsheftene. Det er et hovedpoeng i denne arbeidsmåten at en spesiell aktivitet i undervisningen skal være *intensiv*. Det vil si at aktiviteten er rettet mot å framheve misoppfatninger og begrepsmessige hindringer. Målet med denne intensiteten er å skape en reflekterende tenkning på et høyt nivå rundt det som ved hver anledning er det sentrale ved et begrep. *Konfliktdiskusjoner* kan for eksempel hjelpe til med å rydde misoppfatninger av veien. En lar bevisst eleven møte problemstillinger som er slik at dersom eleven har en bestemt misoppfatning, så skal aktiviteten bringe denne misoppfatningen fram i dagen ved å skape en kognitiv konflikt. Diskusjoner eller refleksjoner rundt det motsetningsfylte i denne konflikten skal så være med på å rydde misoppfatningen av veien. På tilsvarende måte er refleksjon over hvordan nye ideer eller en utvidelse av et begrep er bundet sammen med de erfaringer en har på feltet fra før, et sentralt punkt i denne delen av arbeidet. Et typisk eksempel på dette er hvordan multiplikasjon og divisjon endrer innhold når en går over fra å arbeide med naturlige tall til også å arbeide med desimaltall og brøker. Nedenfor er det gitt et eksempel på en aktivitet som er tenkt å kunne skape en konfliktdiskusjon[10].



Disse fire bitene av et puslespill kan settes sammen til å se ut som en seilbåt.



Bitene i puslespillet skal forstørres slik at bit C blir 6 cm etter forstørrelsen.

a Ta en bit hver og forstørr den på samme måte.
b Klipp ut bitene og kom sammen igjen og lag båten.
c Skriv ned det du gjorde, og vis dette og den forstørrede båten til læreren din.
d Dersom noe ikke ble som du hadde tenkt, diskuter med læreren din.
Prøv igjen og skriv ned det du gjorde denne gangen.

Oppgaveeksempel 4: Eksempel på aktivitet som skal skape kognitiv konflikt

Erfaringer fra undersøkelser om hvordan elever tenker omkring begrepet proporsjonalitet, sier oss at mange elever vil addere 2 cm til alle sidene i alle figurene i denne oppgaven. Vi sier at de bruker en *ukorrekt addisjonsstrategi*. Denne oppgaven er den første oppgaven i et undervisningsopplegg om forstørrelse (som er en del av begrepet proporsjonalitet). Poenget med at denne oppgaven kommer først i en samling av aktiviteter om forstørring, er at den er passende for å få elevene til tenke gjennom sine eksisterende ideer, ved å sette dem i en situasjon der de blir oppmerksomme på at det er noe som ikke stemmer med det de har tenkt om dette temaet. Vi kan gjerne uttrykke dette slik: Misoppfatningen er kommet til overflaten, slik at elevene kan diskutere eller reflektere omkring den.

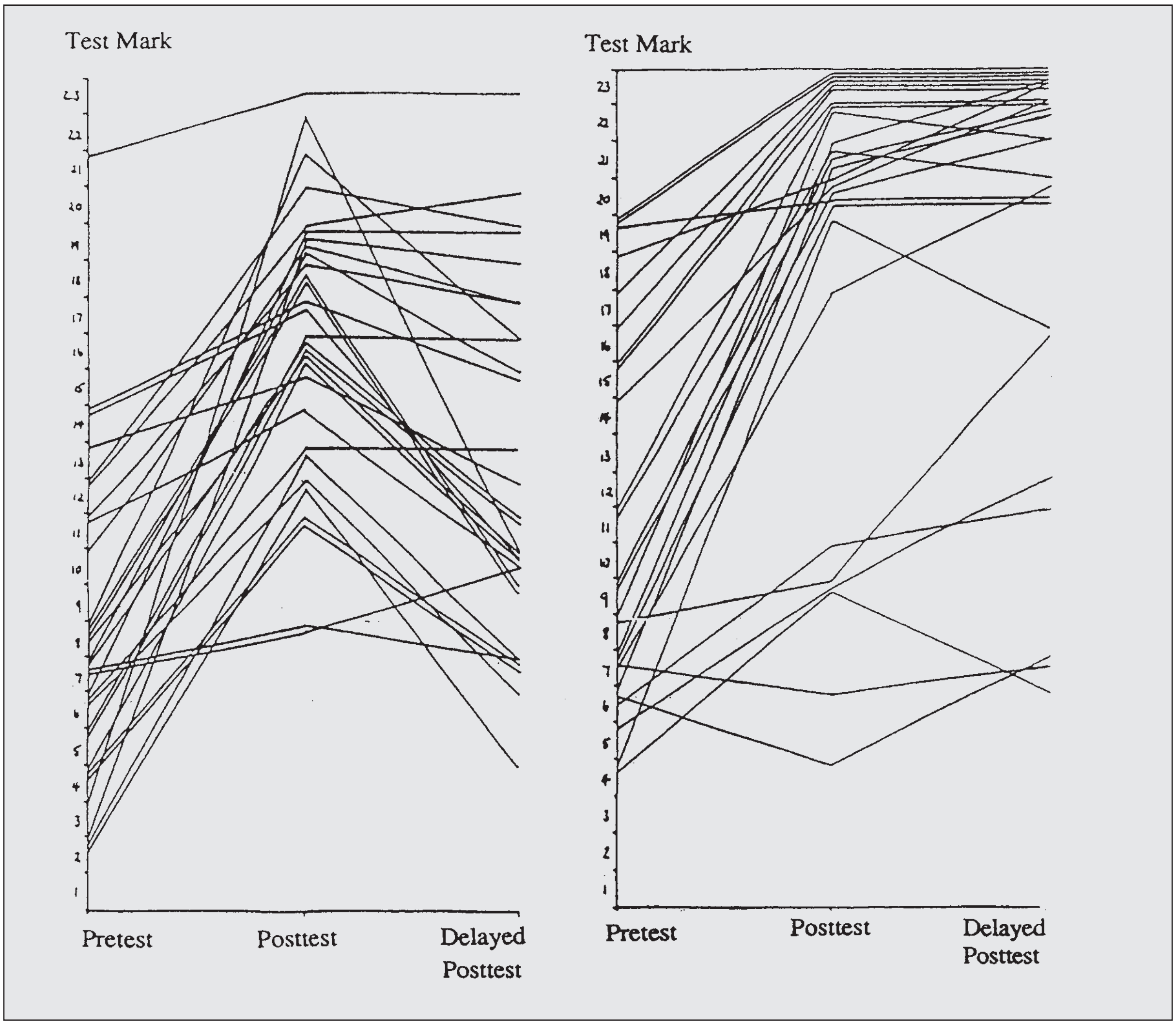
Et pedagogisk problem er at elevene i *spørsmål d* ofte ikke kommer på andre ting de kan gjøre enn å addere 2 til alle mål, selv om de ser at den nye båten ikke ligner på den de startet med. Mange elever tror også at ved å lage hver bit større så har vi fått en forstørring. De har ikke gjort nok erfaringer med at det sentrale i den matematiske ideen knyttet til forstørring er at formen skal være den samme etter forstørringen. Målet må være at eleven forstår at dette ikke skjer ved å addere en fast størrelse til alle målene. På dette punktet i undervisningen vil læreren ha flere valg for det videre arbeidet. Det har vist seg gjennom en rekke studier *at bare å forklare* ikke er en effektiv metode i dannelsen av begreper. Derimot har konfliktdiskusjoner vist seg å ha denne effektiviteten. Dette er trolig slik fordi en får satt søkelys på misoppfatningen, og en inviterer elevene til selv å innse det utilstrekkelige i egen tenkning.

I tilknytning til oppgaven i eksempel 4 har vi observert noen lærere som har arbeidet med denne vansken på en annen måte. De har bedt elevene om å lage en ny båt der sidene i bit C skal være 8 cm etter forstørringen. Mange av elevene vil nå vanligvis doble alle mål og får en båt som er en korrekt forstørring av den gitte båten. Disse to aktivitetene til sammen danner en basis for diskusjon/refleksjon som setter misoppfatningen i et relieff for elevene – gjør det mulig å vurdere sin egen tenkning. Det er dette vi kaller en *kognitiv konflikt*. Metoden har altså en «*destruktiv*» fase, med det siktemål å gjøre det tydelig at gamle ideer er unøyaktige eller utilstrekkelige, og en *løsningsfase*, hvor diskusjoner og refleksjoner omkring det en har funnet, er det sentrale.

Det har blitt utført en rekke undersøkelser for å teste effektiviteten av undervisning som legger vekt på konfliktdiskusjoner. Nedenfor trekker vi fram resultatene fra tre slike undersøkelser. Felles for disse er at den samme læreren underviste to klasser etter ulike metoder. Elevene ble testet med den samme prøven før undervisningen, rett etter undervisningen og deretter da de kom tilbake til skolen etter sommerferien.

Det første eksemplet er hentet fra Birks[23] og handler om speiling i geometrien i 5. klasse. I den ene klassen brukte han et populært læreverk. Det er i høy grad individualisert og bygd opp av elevaktiviteter som i små steg tar eleven fram mot et bestemt begrep, gjennom det læreverket kaller *guided discovery*. I den andre klassen arbeidet elevene i grupper på tre eller fire med utfordrende oppgaver som var knyttet til kjente misoppfatninger innenfor dette emnet. Diskusjonene med læreren ble holdt innenfor disse gruppene. I figur 3 er de tre prøveresultatene til hver enkelt elev tegnet inn i et diagram for hver klasse.

Det kommer tydelig fram at de elevene som har blitt engasjert i diskusjoner av begrepsmessig karakter, i første rekke har tjent på dette når det gjelder langtidslæring.



Figur 3: Birks undersøkelse. Elevprestasjoner i to klasser med ulike undervisningsmetoder

Det andre eksemplet er hentet fra Bassford[22], som har utført en tilsvarende sammenligning med det samme læreverket som Birks i emnet brøk i 5. klasse. Gjennomsnittet i hver klasse på de tre prøvene er framstilt i tabell 2:

	Før-prøve	Etter-prøve	Etter sommerferien
Lærebokgruppen	18,3	20,1	15,0
Konfliktgruppen	17,7	21,2	21,4

Tabell 2: Bassfords undersøkelse. Gjennomsnittlig poengsum i klassen. (Maksimum 40 poeng)

Vi legger merke til at lærebokgruppen i Bassfords undersøkelse presterer lavere etter sommerferien enn før undervisningen. Dette blir forklart med at begge gruppene også hadde hatt undervisning om brøk tidligere i skoleåret. Bassford gjorde følgende observasjoner:

Lærebokgruppen

- Få vansker, lite stress, stille og godt arbeid.
- En forandring fra entusiasme i starten til kjedsomhet mot slutten.
- Mindre samarbeid blant elevene enn vanlig, få anledninger til klassediskusjoner, men flere lærer-elev-diskusjoner enn vanlig.
- Svake elever fant trygghet i å bruke klare regler og metoder som læreboka satte opp.

Konfliktgruppen

- Læreren var viktigere enn i lærebokgruppen. Metoden krevde kompetanse i å utvikle diskusjoner og å oppmuntre elevene til å delta.
- Elevene hadde behov for å skrive svar før diskusjonen.
- Elevene trengte rettledning i å diskutere faglige spørsmål.
- Økende interesse og engasjement hos elevene gjennom undervisningsperioden.
- Mer støy enn vanlig, og mer stressende for læreren enn i lærebokgruppen.

Det tredje eksemplet er fra Swan[20]. Han sammenlignet konfliktmetoden med det han kalte *Positive Only-metoden*. I denne metoden ble ikke feil framhevet og diskutert, men læreren prøvde å hjelpe elevene til å bygge en korrekt forståelse av begrepet desimaltall ved å demonstrere korrekte metoder fulgt av intensive øvelser.

	Før-prøve	Etter-prøve	Utsatt prøve tre måneder senere	Framgang fra før-prøve til utsatt prøve
Konfliktgruppen (22 elever)	44	78	80	36
Positive Only-gruppen (25 elever)	52	75	76	24

Tabell 3: Swans undersøkelse. Gjennomsnitt i klassen regnet i prosent

Av tabell 3 kan en lese at begge gruppene hadde god framgang gjennom undervisningsperioden. Det en hadde lært, var fremdeles aktivt tre måneder senere for begge grupper. Framgangen for konfliktgruppen var signifikant større, noe som er spesielt oppmuntrende fordi det var blitt uttrykt frykt for at elever som alt hadde korrekte ideer, kunne bli forvirret når de fikk oppleve misoppfatninger som de selv ikke hadde. At framgangen også gjelder flinke elever, blir også illustrert i Birks undersøkelse, se figur 3.

Faglige diskusjoner rettet mot misoppfatninger og utvikling av begreper har vært det sentrale i de eksperimentene som er referert ovenfor. Ideer til hvordan en kan organisere slike diskusjoner på ulike måter, finner en knyttet til undervisningsaktivitetene i veiledningsheftene.

Litteratur

1 Kind, P. M., (1989). *Naturfagenes pedagogikk i et konstruktivistisk perspektiv*. Hovudfagsoppgåve i realfagsdidaktikk. Universitetet i Oslo.

2 Sjøberg, S., (1992). *Naturfagenes didaktikk*. (2. utgave). Oslo: Gyldendal.

3 Nilssen, T. I., (1993). *Konstruktivisme i klasserommet. Teoretiske betraktninger og en empirisk undersøkelse av naturfagundervisning*. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk. Universitetet i Oslo.

4 Cockcroft, W. H., (1982). *Mathematics Counts-Report of the Committee of Enquiry into theTeaching of Mathematics in Schools*. London:HMSO.

5 Bell, A. W., Fischbein, E., & Greer, B., (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effect of number size, problem structure and context. *Educational studies in Mathematics*. 15: 129-47.

6 Bell, A. W., Swan, M. & Taylor, G., (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*. 12: 399-420.

7 Bell, A. W., Fischbein, E., & Greer, B., (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effect of number size, problem structure and context. *Educational studies in Mathematics*. 15: 129-47.

8 Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S.& Marino M. S. (1985). The role in imlicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 16: 3-17.

9 Mangan, C., (1986). *Choice of operation in multiplication and division word problems*. Doctoral thesis, Queen's University, Belfast.

10 Brekke, G., (1991). *Multiplicative problems in primary schools: A study of children's understanding and experiences from teaching experiments*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

11 Mellin-Olsen, S., (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. En undervisningslære. Oslo: NKI-forlaget

12 McLeod, D. B., & Adams, V. M., (Eds.) (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlag.

13 Breiteig, T. & Venheim, R. (1993). Matematikk som prosess. *I Matematikk for lærere*. Bind I. Oslo: TANO.

14 Burton, L. (1984). Thinking Things Through. *Problem Solving in Mathematics*. Oxford: Blackwell.

15 Bell, A.W., Burkhardt, H. & Swan, M. (1992). Balanced Assessment of Mathematical Performance. I Lesh, R. & Lamon, S: *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics.*

16 Schoenfeld, A., (1992). Learning to think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I Grouwes, D. A.: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

17 Mason, J., Burton L. & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. New York: Addison Wesley.

18 Brekke, G., (1987). *Graphical interpretation: a study of pupils' understanding and some teaching comparisons*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

19 Breiteig, T. & Brekke, G. (1993). *Ansvar for egen læring i matematikk*. Rapport til Program for utdanningsforskning.

20 Swan, M., (1983). *Teaching Decimal Place Value: A comparative Study of «Conflict» and «Positive Only» Approaches*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

21 Onslow, B. (1986). *Overcoming Conceptual Obstacles concerning Rates: Design and implementation of a Diagnostic Teaching Unit*. Doctoral thesis. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham; England

22 Bassford, D., (1988). *Fractions, A comparison of Teaching Methods*. Master of Education thesis. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

23 Birks, D., (1987). Reflection: *A Diagnostic Teaching Experiment*. Master of Education thesis. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

KAR-MAT-007

Utdanningsdirektoratet

Postboks 2924 Tøyen
0608 Oslo

Internett: http://www.utdanningsdirektoratet.no/

Bestillingstorget: http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/
E-post: bestilling@utdanningsdirektoratet.no
Telefaks: 23 30 13 89

Grafisk produksjon: GAN Grafisk AS, Oslo