Bokmål

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Veiledning til funksjoner

E, G og I

Nasjonalt læremiddelsenter
1997

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Gunnar Gjone

Veiledning til funksjoner

E, G og I

Forord

Dette veiledningsheftet er skrevet av professor Gunnar Gjone ved Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling ved Universitetet i Oslo, som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden (TFN) og Institutt for lærerutdanning og skoletjeneste (ILS) ved Universitetet i Oslo.

Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen og har flere formål:

- Utvikle en integrert prøve- og utdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.
- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan danne utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor ulike deler av faget.
- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og undervisningen i faget.
- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimumskompetanse.

I tillegg til dette veiledningsheftet og de diagnostiske prøvene for funksjoner er det utarbeidet diagnostiske prøver og veiledningshefte for områdene tall og tallregning. Videre er det utarbeidet et generelt introduksjonshefte: *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.*

Det blir arbeidet med å utvikle prøver og veiledningsmateriell for flere områder av matematikken.

Innhold

Innledning

Dette veiledningsheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til diagnostiske oppgaver rettet mot funksjonsbegrepet. Spesielt retter disse oppgavene seg mot forståelse av grafisk framstilling av funksjoner. Oppgavene er samlet i prøver kalt *Funksjoner*. Oppgavene er prøvd ut i 5., 7. og 9. klasse og er samlet i egne hefter. Oppgavene kan brukes fra 4. til 9. klasse.

Veiledningsheftet bygger på heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*, som inneholder en generell diskusjon av matematisk kompetanse, læring i matematikk, arbeidsmåter i faget og bruk av diagnostiske prøver. Det er mulig å gjøre seg nytte av de diagnostiske oppgavene i undervisningen uten å lese introduksjonsheftet først. Vi vil likevel tilrå at det blir brukt noe tid på å lese heftet. En klargjøring av følgende spørsmål har en sentral plass:

- Hva er misoppfatninger?
- Hva er diagnostiske oppgaver?
- Når fungerer oppgaver diagnostisk?
- Hvordan skal en bruke de diagnostiske prøvene i klasserommet?
- Hvilke pedagogiske konsekvenser får våre kunnskaper om misoppfatninger?
- Hvordan undervise med basis i kunnskap om de enkelte elevenes misoppfatninger?

Del 1 i dette veiledningsheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for dem. Til hver av oppgavene er det gitt svarfordelinger fra en nasjonal standardisering.

Prøvene og analysen av resultatet har rettet søkelyset mot noen sider ved funksjonsbegrepet. Analysen har pekt på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisning, slik at elevene kan utvikle så solide begreper som mulig.

Analysen er på ingen måte uttømmende. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdannelse innenfor temaet funksjoner. Dette er et arbeid som er påbegynt gjennom hovedfagsoppgaver i realfagdidaktikk, Pedersen (1996), Rasch-Halvorsen (1997).

Del 2 inneholder en samling undervisningsaktiviteter med kommentarer og rettledninger, som retter seg mot de vanskene som de diagnostiske oppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Det gjøres trolig best dersom læreren ved siden av å ha god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver kan lages, og hvordan en kan tilpasse undervisningsopplegg til de vanskene elevene har.

I denne delen er det lagt vekt på bruk av lommeregner og datamaskin. I arbeidet med funksjoner kan disse hjelpemidlene gi innsikt i ulike sider ved funksjonsbegrepet. I eksemplene med regneark er programmet *Excel* brukt for å framstille tabeller og grafer. Lommeregnergrafene er skrevet på en CASIO CFX-9850G og skrevet ut ved hjelp av programmet Pocket-Link 121.

Del 1
Analyse av diagnostiske oppgaver

Funksjoner

I denne delen blir ulike sider av funksjonsbegrepet analysert og diskutert med bakgrunn i en nasjonal standardisering. Hovedvekten er lagt på den grafiske siden ved funksjonsbegrepet, men andre sider ved funksjonsbegrepet er også trukket inn. Noen få av oppgavene er endret på et par punkter etter standardiseringen.

Det deltok 106 femteklasser, 88 sjuendeklasser og 87 niendeklasser med omtrent 1900 elever på hvert klassetrinn i denne standardiseringen. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulike størrelser. Prøvene ble gjennomført tidlig på høsten 1995.

Av de ca. 1900 elevene på hvert klassetrinn som svarte på prøvene, har vi trukket ut ca 500, etter fødselsdato i måneden. Antall svar som danner grunnlaget for analysen, er:

488 i 5. klasse, 486 i 7. klasse og 471 i 9. klasse

Kapittel 1 Koordinatsystemet og funksjoner

Innledning

Hvilke ideer har elever om koordinatsystemet og funksjoner i grunnskolen? Fra å være et begrep som tidligere har vært innført først på høyere klassetrinn, kom funksjonsbegrepet inn på barnetrinnet med Mønsterplanen av 1974. Siden har området fått en styrket stilling innenfor grunnskolematematikken.

Koordinatsystemet brukes i en rekke sammenhenger i matematikk. For eksempel brukes det ofte i statistiske framstillinger. Det brukes videre i forbindelse med analytisk geometri til å framstille forskjellige typer kurver i planet, og det brukes til grafisk framstilling av funksjoner. De ulike bruksmåtene forekommer om hverandre i skolematematikken. Dette gjør det ofte vanskelig for elever å få en klar oppfatning av hva som er felles, og hvordan de ulike bruksmåtene skiller seg fra hverandre.

Som eksempel kan vi ta for oss uttrykket

$$y = -x + 1$$

Denne likningen kan illustreres ved en rett linje i planet. Det vil gå tydeligere fram hvis vi ber elevene løse likningssettet

$$\begin{array}{lcl} y = 2x + 3 & \text{eller ofte skrevet som} & y - 2x = 3 \\ y = -x + 1 & & y + x = 1 \end{array}$$

På den annen side kan uttrykket $y = -x + 1$ være en måte å gi y som *funksjon* av x. Uttrykket kan derfor være flertydig for elevene. I denne framstillingen vil vi kartlegge de begrepene elevene har om koordinatsystemet og funksjoner.

Funksjonsbegrepet står sentralt i matematikk og har en lang historie. Det har utviklet seg ulike måter å definere funksjonsbegrepet på.

Vi kan se på funksjonen som en regel som setter oss i stand til å finne verdien av en størrelse som er avhengig av en annen:

Prisen på varer som har 25 % avslag, finner vi ved å multiplisere prisen med 0,75 (= 1– 0,25). Alternativt kan vi velge å skrive prisen med avslag som y og den opprinnelige prisen som x. $y = 0{,}75\,x$.

Vi vil kalle dette den *operasjonelle* måten å betrakte funksjoner på.

Vi kan også definere funksjoner på en annen måte, som en mengde av par, som er slik at ett førsteelement i et par ikke kan høre sammen med ulike andreelementer. I overensstemmelse med vanlig praksis betegner vi funksjonen med f. Hvis vi skulle skrive funksjonen i eksemplet ovenfor på denne måten, ville den se slik ut:

$$f = \{(x, y) : y = 0{,}75\,x\}$$

Her vil vi si at vi har en *strukturell* betraktningsmåte. Den strukturelle måten å betrakte funksjoner på er ofte ikke den første måten elever møter i skolematematikken, men senere er de to betraktningsmåtene ofte blandet sammen. En strukturell betraktningsmåte ligger nærmere bruk av framstilling i koordinatsystem.

Funksjoner opptrer i en rekke ulike former i skolens matematikkundervisning. Kanadieren Claude Janvier har identifisert fire slike:

- graf
- situasjon (verbal beskrivelse)
- formel (algebraisk)
- tabell

Vi møter alle disse sammenhengene både i skolen og utenfor. Angivelse av sammenhenger mellom to variable størrelser ved grafer har blitt mer og mer vanlig, ettersom dataverktøy tas i bruk i stadig større utstrekning.

I verbale beskrivelser finner vi også funksjonstenkingen representert, men ofte lite eksplisitt uttrykt.

Funksjoner uttrykt som formler er kanskje ikke så vanlige utenfor matematikken, men i forbindelse med økonomi finner vi også bruk av formler. Som eksempel kan vi trekke fram beregningsmåter for innføring av bil til Norge, utgitt av Toll og avgiftsdirektoratet.

Tabeller finner vi i en rekke daglige situasjoner, som portotabeller og rutetabeller. Vi tenker ikke på dette som funksjoner, men med en matematisk betraktningsmåte vil vi se klare funksjonssammenhenger: Porto for et innenlandsbrev er en funksjon av vekt.

For å systematisere de ulike formene for å beskrive funksjoner i skolematematikken har Claude Janvier satt opp følgende tabell over sammenhenger mellom dem (Janvier, 1978):

Fra \ Til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	--------------	måling	skisse	modellering
Tabell	avlesing	--------------	plotting	tilpassing
Graf	tolking	avlesing	--------------	kurvetilpassing
Formel	gjenkjenning	beregning	plotting	--------------

Vi har brukt denne systematiseringen ved vår gjennomgåelse av funksjonsoppgavene. I tabellen s. 5 har vi tatt utgangspunkt i Janviers tabell.

Tallene i de enkelte feltene viser hvilke avsnitt som har oppgaveeksempler og drøftelser knyttet til de forskjellige problemstillingene. For eksempel finner vi informasjon om oversettelse fra situasjon til graf i avsnittene 1.3, 2.1, 4.1, 4.2 og 4.3.

Fra \ Til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	--------------	1.8	1.3 2.1 4.1, 4.2, 4.3	1.4
Tabell	1.8	--------------	1.7 2.1 3.1.4	1.9 2.1
Graf	1.1 4.1, 4.2	1.7 3.1.1 4.4	--------------	1.2
Formel	1.6	1.9 3.1.3	1.5 3.1.2 3.2	--------------

I dette veiledningsheftet og i utvalget av oppgaver som det knytter seg til, spiller den grafiske framstillingen en framtredende rolle. Tabeller er ikke på samme måte i fokus for framstillingen.

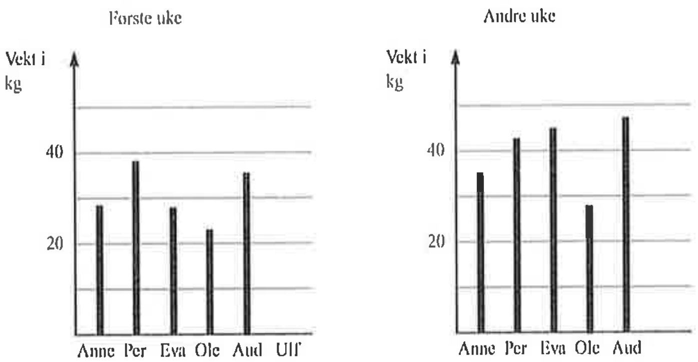
1.1 Fra graf til situasjon

1.1.1 Fra graf til situasjon, koordinatsystemet

I den første delen er det presentert et koordinasjonssystem

Oppgave 1 a, b, c (Kl. 5, 7, 9)

1 Fem elever plukket jordbær i to uker. Her ser du et diagram som viser hvor mye de plukket hver uke.



a) Ulf plukket bare første uke. Han plukket mindre enn Eva og mer enn Ole.
Tegn inn i diagrammet ovenfor hvor mye Ulf kan ha plukket første uke.

b) **Hvem plukket minst i første uke?** ....

c) **Hvem økte mest fra første til andre uke?** ....

I oppgaven får vi presentert et stolpediagram over bærplukking. Hensikten med å ta med slike oppgaver her, under overskriften funksjoner, er at de gir oss informasjon om hvordan elever behersker koordinatsystemet. Framstillingsformen er valgt fordi elevene ofte støter på denne måten å representere en tilsvarende situasjon på.

I oppgaven skal elevene arbeide innenfor rammen av koordinatsystemet, slik at dette er et eksempel som tester *operasjonell forståelse* av koordinatsystemet.

Få elever har problemer med å finne at det er Ole som har plukket minst første uke. Rundt 95 % har denne oppgaven korrekt for alle trinn. Det en kan merke seg, er at noen få prosent svarer Ulf.

I spørsmål c er problemet å se på økningen fra første til annen uke. Misoppfatningen som oppgaven skal avsløre, er at høyeste søyle er den som har størst økning, og at en altså ikke i første rekke ser på differansen som kommer fram, mellom de to koordinatsystemene.

Misoppfatning: *I en sammenlikning er høyest på grafen også størst økning.*

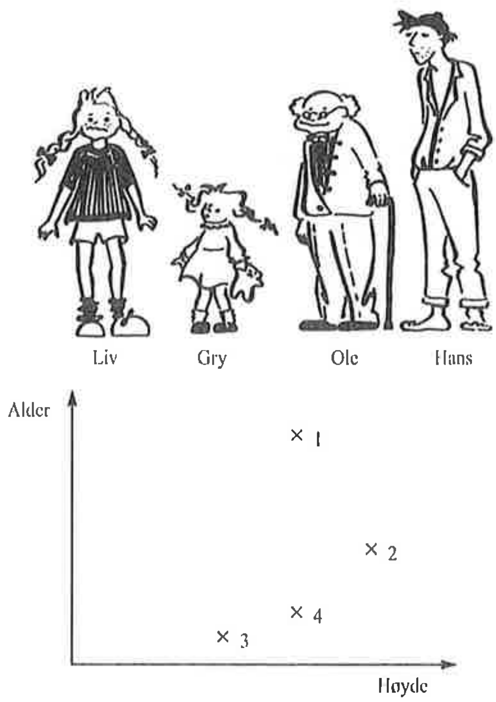
Oppgave 1 c, koordinatsystemet	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Eva (riktig svar)	52	69	82
Aud	41	26	16

Vi legger merke til at denne misoppfatningen blir merkbart redusert med økende klassetrinn.

Det bør imidlertid bemerkes at figuren kunne ha vært bedre; det er liten forsjell på økningen til Eva og Aud.

Oppgave 2 (Kl. 5, 7, 9)

2



Skriv nedenfor hvilken person som svarer til hvert av punktene i koordinatsystemet.

Liv svarer til punktet ....

Gry svarer til punktet ....

Ole svarer til punktet ....

Hans svarer til punktet ....

Oppgave 2 er den samme for alle tre klassetrinn. For å gi riktig svar må en vurdere *både* alder og høyde. I oppgaven er høyden avsatt langs førsteaksen og alderen langs andreaksen. Dette er det motsatte av det en vanligvis ville bruke. (En svakhet ved oppgaveformuleringen er at spørsmålene ikke er uavhengige.)

Et felles inntrykk for alle spørsmålene er den relativt høye prosenten av elever som ikke har svart. Det viser at dette er en oppgave som faller vanskelig for mange. Det er også et fellestrekk at andelen av riktige svar stiger med økende klassetrinn.

For hvert spørsmål er det tatt med det vanligste feilsvaret.

Oppgave 2 a (Liv)	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	10	7	3
Liv svarer til punkt 4 (rett svar)	52	61	81
Liv svarer til punkt 2	21	19	10

At mange krysser av for Liv som punkt 2, kan komme av at hun kan se litt høyere ut enn Ole på tegningen, og derfor blir hun krysset av som den nest høyeste. Vi kan se dette svaret som en indikasjon på at elevene tolker grafen som et bilde.

Oppgave 2 b (Gry)	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	10	7	3
Gry svarer til punkt 3 (riktig svar)	67	79	89
Gry svarer til punkt 1	14	7	5

Flere svarer riktig på dette spørsmålet enn på de andre. Det kan forklares ut fra at Gry både er lavest og yngst. At såpass mange krysser av punkt 1 for Gry, er derimot vanskeligere å forklare. *En* mulighet kan være at hun er i en ytterkant av personene – yngst og lavest. På den måten skiller hun seg ut fra de andre, slik at en for eksempel bytter retning på andreaksen. En annen mulighet kan være at en krysser av punkt 1 fordi Gry er yngst.

Oppgave 2 c (Ole)	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	10	7	3
Ole svarer til punkt 1 (riktig svar)	43	49	67
Ole svarer til punkt 4	21	22	11
Ole svarer til punkt 2	17	18	17

Avkryssingen for Ole gir et interessant bilde. At Ole svarer til punkt 2, holder seg ganske konstant gjennom alle klassetrinnene. Det kan tas som et uttrykk for en bildemessig tolkning. At en del krysser av at Ole svarer til punkt 4, kan komme av at en velger mellom to alternativer – to som har lik høyde – og så gjør en et noe tilfeldig valg. Men det kan også komme av at Ole er eldst og dermed nummer 4.

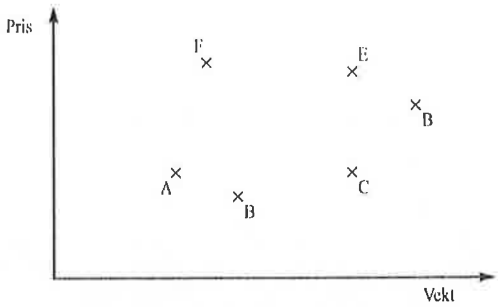
Oppgave 2 d (Hans)	5. klasse	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	10	7	3
Hans svarer til punkt 2 (riktig svar)	46	53	68
Hans svarer til punkt 1	26	30	23

Vi ser her et klart uttrykk for en bildemessig tolkning; høyt opp på grafen antyder stor fysisk høyde.

Oppgaven viser at mange forsøker å knytte den bildemessige framstillingen til koordinatsystemet, og det er noe som gir seg uttrykk i alle oppgavene. Det bør også pekes på, som nevnt innledningsvis, at aksene er byttet om i forhold til det vi kan kalle en naturlig framstilling: Alderen på førsteaksen vil uttrykke et tidsforløp, mens høyden kan oppfattes som en funksjon av alderen.

Oppgave 6 a, b, c, d (Kl. 5, 7, 9) **e, f** (Kl. 7, 9)

6 Hvert punkt i dette diagrammet står for en pose sukker.



a) **Hvilke poser har samme vekt?** ....

b) **Hvilke poser koster like mye?** ....

c) **Hvilken av posene B eller C er det mest lønnsomt å kjøpe?** ....

d) **Hvorfor er denne mest lønnsom av B og C?** ....

....

e) **Hvilke to poser vil være like lønnsomme å kjøpe?** ....

f) **Hvorfor er disse to like lønnsomme?** ....

....

De første spørsmålene i oppgave 6 gjelder igjen å gjøre vurderinger ut fra to variable størrelser, gitt i et koordinatsystem. De fire første spørsmålene er felles for alle tre klassetrinn, mens de to siste er felles for 7. og 9. klasse. Vi kan bemerke at orienteringen på aksene er den naturlige. Framstillingen viser pris som en funksjon av vekt. Selv om det ikke kommer inn et operasjonelt funksjonsbegrep i denne oppgaven, vil elevene rimeligvis føle seg mer hjemme i denne orienteringen av aksene.

Spørsmålene retter seg mot å forstå betydningen av likhet i forhold til koordinataksene.

Oppgave 6 a Koordinatsystemet	5. klasse	7. klasse	9. klasse
C og E (riktig svar)	43	54	71
A og C	42	34	23

Vi ser at svært mange knytter «samme vekt» til at de er like langt fra førsteaksen (Vekt).

Oppgave 6 b Koordinatsystemet	5. klasse	7. klasse	9. klasse
A og C (riktig svar)	57	68	80
C og E	23	18	14

Resultatene på dette spørsmålet er klart bedre enn på det foregående. Ved sammenlikning av svarene i 6 a og 6 b finner en at de som svarer *C og E* i oppgave b, oftest også har svart *A og C* i oppgave a.

I den siste delen av oppgaven (c – f) spørres det om forhold. Lønnsomhet knytter seg til forholdet mellom pris og vekt. I denne delen av oppgave 6 er det også spurt etter begrunnelser. Hensikten med opgaven er å se om sammenlikningene i hovedsak knyttes til *en* av dimensjonene, for eksempel til andreaksen (Pris).

Oppgave 6 c, Koordinatsystem - forhold	5. klasse	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	13	9	3
C (rett svar)	49	65	79
B	37	25	17

Forklaringene som ble gitt, hadde følgende svarfordeling når vi kategoriserer feilsvarene etter om vi tar to eller en dimensjon i betraktning:

Oppgave 6 d, Koordinatsystem - begrunnelse	5. klasse	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	18	13	7
Akseptabel forklaring	24	45	62
En dimensjon på C	11	14	9
En dimensjon på B	20	15	9

Vi ser at en ganske stor del av elevene sammenlikner bare langs en dimensjon. En velger *B* «fordi den er billigst» og *C* «fordi den veier mest». Fordelingene er omtrent like i 7. og 9. klasse, mens forholdsvis langt flere elever i 5. klasse sammenlignet etter bare *en* dimensjon.

De to siste spørsmålene, e og f, ble bare gitt i 7. og 9. klasse. Uttrykket «like lønnsomme» knytter seg til forhold, slik at forholdet mellom pris og vekt skal være det samme for de to posene. I dette spørsmålet er det heller ikke sagt noe om hvilke alternativer som det er aktuelt å trekke inn i sammenlikningen.

Oppgave 6 e, Koordinatsystem - likt forhold	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	21	18
B og D (riktig svar)	5	13
A og C	29	17
C og D	18	20
A og B	5	4

I tabellen har vi tatt med de alternativene som har fått en høyere svarprosent enn det riktige svaret på spørsmålet. To andre svaralternativer for 7. klasse (*A og C*, og *C og E*) hadde også en svarprosent på 5. Resultatene viser en stor spredning.

Skal vi tolke disse svarene, kan vi trekke inn flere momener.

Det er rimelig å tolke svaralternativene *A og C* som at elevene bare har sett på pris. De har samme pris, altså er de like lønnsomme. Dette passer med oppfatningen om at elever bare ser på den ene dimensjonen.

De som velger *C og D,* har trolig vurdert både pris og vekt. At *C og D* føres opp som like lønnsomme, kan komme av at differansen målt på førsteaksen er omtrent like stor som differansen målt på andreaksen. Prisen øker like mye som vekten. Det er imidlertid bemerkelsesverdig at denne misoppfatningen øker fra 7. klasse til 9. klasse.

Elevene skal også begrunne svaret som de gir på spørsmål 6 e. Svært mange unnlater å svare, særlig i 9. klasse.

Oppgave 6 f, Koordinatsystem - begrunnelse likt forhold	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	27	27
Gyldig begrunnelse	3	10
Proporsjonalitetstenking *	10	16
Samme pris	12	7

* Med proporsjonalitet menes at det er sett på forholdet mellom pris og vekt. *C* og *D* er det vanligste alternativet, men også andre par er tatt med.

Når vi sammenlikner 7. og 9. klasse, ser vi at det er en utvikling. Andelen i 9. klasse med gyldig begrunnelse er større, og flere viser også proporsjonalitetstenking. Det prosentvise antallet av dem som har tenkt langs *en* dimensjon (pris), har gått noe tilbake.

Den siste oppgaven som gjelder koordinatsystemet, er oppgave 8, som bare ble gitt til 5. og 7. klasse. Det er det operasjonelle begrepet som blir prøvd i de to første spørsmålene. I de to siste spørsmålene har framstillingen i koordinatsystemet blitt gjort til et objekt (en ting) som en skal forholde seg til. Vi sier derfor at spørsmålene prøver de strukturelle sidene ved koordinatsystemet.

Oppgave 8 a, b (Kl. 5, 7) **c, d** (Kl. 7)

8 Kari målte temperaturen kl. 12 hver dag i en uke. Diagrammene A og B nedenfor viser resultatene.

DIAGRAM A

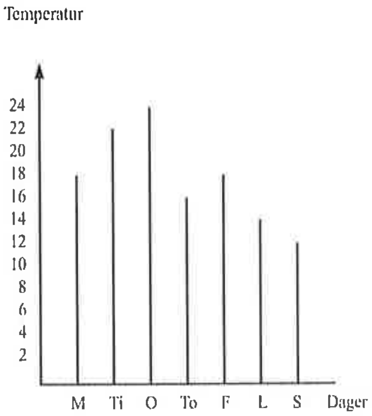
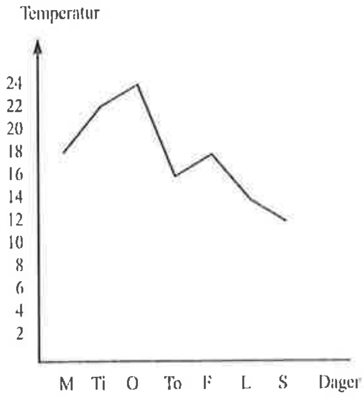


DIAGRAM B



a) **Hvor mange grader ble det målt torsdag?** ....

b) **Hvilken dag ble det målt 12 grader?** ....

c) **Hvilket av diagrammene, A eller B, mener du er best å bruke for å vise målingene?** ....

d) **Begrunn svaret ditt i c..** ....

....

På spørsmålene a og b var det mange riktige svar, slik følgende tabell viser:

Oppgave 8 a, Koordinatsystem - avlesing	**5. klasse**	**7. klasse**
16 (riktig svar)	89	92
Oppgave 8 b, Koordinatsystem - avlesing		
Søndag (riktig svar)	93	97

I spørsmålene c og d, som bare ble gitt til 7. klasse, skal elevene forholde seg til hvilken graf som de synes er best for å vise målingene.

Mot dette kan det innvendes at diagrammene viser to ulike sider ved målingene. Diagram A kan være bedre egnet til å lese av enkeltmålinger, mens diagram B mer tydelig viser en utvikling gjennom uken. Det kan også innvendes at en mangler formålet med målingene.

Oppgave 8 c, Koordinatsystemet - type diagram for avlesing	**7. klasse**
Diagram A	80
Diagram B	17

Når det gjelder forklaring, er det flere ulike varianter, som alle bygger på resonnement omkring diagrammene.

Spørsmålene her er eksempel på at koordinatsystemet (med diagrammene) behandles som objekter. Derfor kaller vi dette strukturelle spørsmål.

Oppgave 8 d, Koordinatsystem - begrunnelse, type diagram for avlesing	7. klasse
Ubesvart	10
Foretrukket svar *	3
Velger diagram A fordi det er lett å lese	53
Velger diagram A fordi det har tydeligere markering	14
Velger diagram B fordi vi ser utviklingen	11

* Som foretrukket svar har vi diagram A, begrunnet med at det bare ble foretatt *en* måling per dag. Det er underforstått at det ikke gir mening å forbinde disse med linjestykker eller en annen kurve.

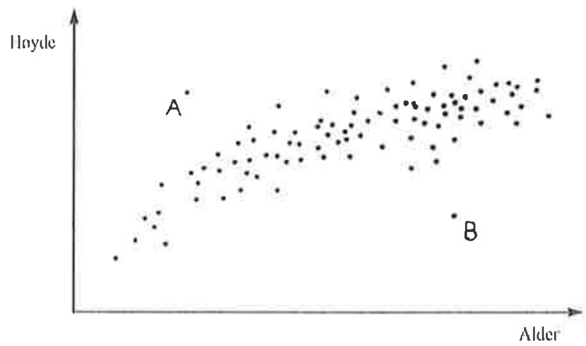
Det er likevel grunn til å nevne at de ulike svaralternativene som har A som foretrukket diagram, ikke er helt klart atskilte.

Konklusjonen må likevel være at de fleste argumenterer ut fra leseligheten til diagrammet, ikke ut fra hvordan det viste målingene i punkter. Det kan imidlertid være grunn til å peke på uklarheten i spørsmålsformuleringen på dette punktet.

Oppgave 9 knytter seg også til koordinatsystemet:

Oppgave 9 (Kl. 5, 7) = **Oppgave 8** (Kl. 9)

9 I en undersøkelse noterte en vitenskapsmann høyden og alderen på 100 bjørketrær. Han tegnet resultatene inn i et diagram. Hvert tre er en prikk i diagrammet.



To av trærne er her markert med en A og en B. **Hva kan du si om dem?**

....

....

I denne oppgaven skal elevene forholde seg til objekter i koordinatsystemet. Oppgaven er gitt på alle tre klassetrinn.

To forhold skal testes i denne oppgaven:
- Gir elevene en billedmessig forklaring, «står alene», «vokser i utkanten av skogen» e.l.?
- I hvilken grad ser elevene på bare en av aksene eller fester seg ved ett trekk ved hvert tre?

Skjemaet viser hvordan svarene fordelte seg:

Oppgave 9 (5. og 7. klasse), **8** (9. klasse) **Koordinatsystem - tolking av diagram**	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	17	12	9
Akseptabel forklaring	36	53	63
Bildemessig forklaring	15	13	8
Refererer bare til en av aksene	2	3	2

Skjemaet viser en ventet utvikling over de tre årene. At relativt mange ikke har svart, viser at denne oppgavetypen framstår som uvant for mange elever.

Som en oppsummering for flere av disse oppgavene om koordinatsystem vil vi si at det er en utbredt misoppfatning at en grafisk framstilling gir et direkte (eller mer konkret) bilde av en situasjon. Her bør oppmerksomheten rettes mot en del læreverk og framstillinger i mediene, som bevisst bruker diagrammer til å vise bilder som passer med aksene på diagrammet.

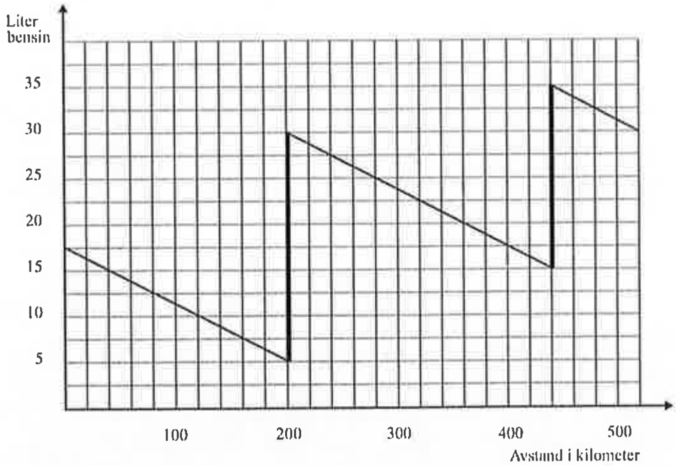
1.1.2 Fra graf til situasjon, funksjoner

Flere av oppgavene innenfor denne kategorien – *fra graf til situasjon* – tar for seg grafer til funksjoner. Oppgavene er i hovedsak operasjonelle. Funksjonsgrafen blir ikke behandlet som et objekt/en ting som en skal forholde seg til.

En slik oppgave som gjelder det operasjonelle aspektet til funksjoner, er:

Oppgave 5 a, b, c, d, e, f (Kl. 9) = **Oppgave 10 a, b, c, d, e, f** (Kl. 7)

10 Helga er på en lang biltur og må stanse noen ganger for å fylle bensin. Diagrammet nedenfor viser hvor mye bensin hun hadde i tanken.



a) **Hvor mange liter bensin hadde Helga i tanken etter 120 km?** ....

b) **På hvilken strekning hadde Helga mindre enn 10 liter i tanken?** ....

c) **Hvor mange bensinstasjoner stoppet Helga på?** ....

d) **Begrunn svaret i c.** ....

....

e) **Hvor langt var Helga kommet da hun kjøpte mest bensin?** ....

f) **Begrunn svaret i e.** ....

Diagrammet viser et forløp illustrert ved en graf. Vi kan si at det er en funksjonsforskrift, at antall liter på tanken er avhengig av avstanden (eller av antall kilometer som er kjørt). Det er imidlertid tegnet inn noen loddrette linjer slik at dette ikke egentlig blir en funksjonsforskrift i matematisk forstand i disse punktene. Oppgavens hensikt er å undersøke elevenes evne til å tolke grafer.

Oppgaven blir bare gitt for 7. og 9. klasse.

I spørsmål a er det ingen klare alternativer til riktig svar (10 liter). Dette svaret hadde en svarfrekvens på 77 % i 7. klasse og 89 % i 9. klasse.

Det vanligste feilsvaret er tall mellom 7 og 8,5 som framkommer ved at en leser av ved 140 km i stedet for 120 km. En teller to streker etter 100.

Oppgave 10 b (7. klasse), **5 b** (9. klasse) **Funksjoner**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	10	3
120-200 km (riktig svar)	28	50
200 km	36	20

(Ingen andre frekvenser var over 7 %)

Tallene i tabellen bør vurderes med bakgrunn i usikkerheten i tolkningen av elevenes formuleringer. Elever som har svart «den første strekningen», kan ha den riktige oppfatningen av hva diagrammet formidler.

Svaret «200 km» kan forklares ved at den loddrette streken i diagrammet også oppfattes som en strekning, det vil si at det blir oppfattet som om alle strekene i diagrammet gjengir kjørestrekninger.

I oppgave 10 c har 10 % unnlatt å svare. En del av elevene svarer at Helga stoppet på tre stasjoner. Her ble det også bedt om at det skulle være en begrunnelse (oppgave 10 d). Bakgrunnen for at det ble spurt om begrunnelse, var at en ønsket å se hvordan elevene som gav ulike svar, tenkte.

Oppgave 10 c (7. klasse), **5 c** (9. klasse) **Funksjoner**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	10	2
2 stasjonar (riktig svar)	58	81
3 stasjoner	17	12

Svarfrekvensene for begrunnelser er som følger. Akseptabel begrunnelse gjelder for riktig antall stasjoner. Begrunnelse for tre spisser (eller strekninger) er ofte knyttet til avlesing av 3 spesifikke karakteristiske trekk på grafen.

Oppgave 10 d (7. klasse), **5 d** (9. klasse) **Funksjoner**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	26	9
Akseptabel begrunnelse	47	68
Gjentar bare svaret	8	6
Begrunnelse som går på tre spisser eller strekninger	6	5

Som en kommentar til oppgaven vil vi peke på at kurven kan gi inntrykk av at Helga stoppet på tre stasjoner, og at den første var ved starten av kjøreturen. Dette passer sammen med begrunnelsen at det var tre spisser. Det er ellers noe vanskeligere å tolke at de tre skråstrekene angir antallet av bensinstasjoner.

Den kategorien som hadde den nest høyeste svarfrekvensen, utenom riktig svar, var begrunnelse som bare gjentar svaret. Dette gir grunn til å rette søkelyset mot elevers oppfatning av hva som menes med begrunnelse.

Oppgave 10 e tester om elevene vurderer differanse eller høyeste punkt på kurven. Det var også bedt om begrunnelse av svaret (oppgave 10 f).

Oppgave 10 e (7. klasse), **5 e** (9. klasse) **Funksjoner**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	11	3
200 km (riktig svar)	52	74
440 km (har mest bensin i tanken)	16	15

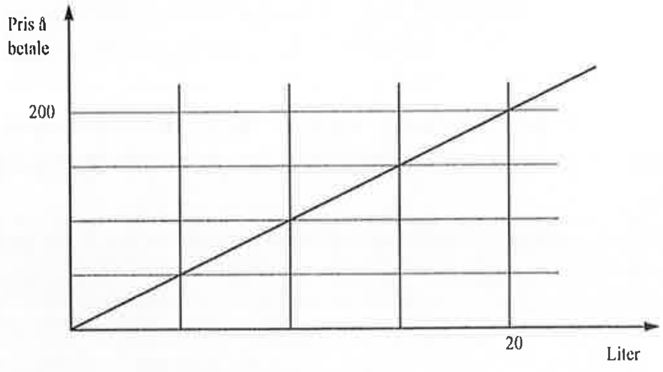
Vi bemerker her at noen flere elever i 9. klasse enn i 7. klasse svarer 1440 km. Begrunnelsene viser at mange elever fester seg ved det høyeste punktet på kurven.

Oppgave 10 f (7. klasse), **5 f** (9. klasse) **Funksjoner**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	30	12
Akseptabel begrunnelse	36	57
Refererer til det høyeste punktet	13	12

Innenfor denne kategorien er det også gitt en mer tradisjonell oppgave med en funksjonsgraf.

Oppgave 7 a, b (Kl. 5, 7)

7 Diagrammet viser hvor mye vi må betale for bensin.



a) **Hva må vi betale for 10 liter bensin?** ....

b) **Hvor mye bensin får vi for 150 kr?** ....

I spørsmål 7 a prøves elevene i å finne fram på førsteaksen og foreta en avlesing på kurven.

Oppgave 7 a Funksjoner - avlesing av verdier fra graf	5. klasse	7. klasse
Ubesvart	11	7
100 kroner (riktig svar)	65	81
150 kroner	6	5
50 kroner	5	3

Svarene, 150 kroner og 50 kroner, var de to alternativene med frekvens som kom nærmest frekvensen for riktig svar. Det kan tolkes slik at elevene leser av etter første eller tredje loddrette linje.

I spørsmål b tar vi utgangspunkt i andreaksen. Spørsmålet er tilsvarende spørsmålet i a.

Oppgave 7 b Funksjoner - avlesing av verdier fra graf	5. klasse	7. klasse
Ubesvart	12	8
15 liter (riktig svar)	62	79
10 (10,5) liter	7	6
50 liter	3	0,7
150 liter	0,2	2

Vi legger merke til at forholdsvis mange ikke svarer på spørsmålet. Utviklingen av frekvensen for riktig svar fra 5. til 7. klasse er ventet, ettersom elevene får trening i å arbeide med grafer. At svaret *10 liter* var det som kom nærmest riktig svar i svarprosent, er ikke merkelig. Det støtter det synet at elevene har vanskelig for å orientere seg når ikke alle koordinatene på aksene er gitt.

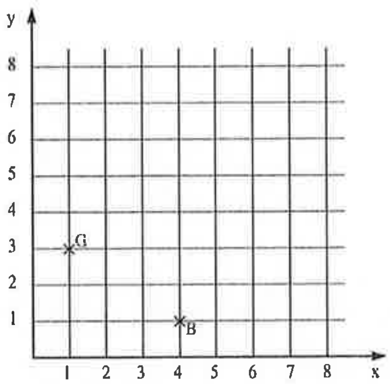
Svarene *50 liter* og *150 liter* viser et interessant trekk som det er vanskelig å gi en god forklaring på. At noen svarer *150 liter*, kan komme av at de går tilbake på samme akse. Ellers må vi bemerke at en usikkerhet i svarene kan ha kommet til syne her.

1.2 Fra graf til formel

Med formel forstår vi ikke bare et eksplisitt uttrykk, men også de mer formelle sidene ved funksjonsbegrepet og koordinatsystemet, for eksempel avmerking av punkter og tegning av bestemte objekter i et koordinatsystem.

Oppgave 4 a, b, c, d (Kl. 5, 7)

4



Punktet G har koordinatene (1, 3).

a) **Hvilke koordinater har punktet B?**

b) **Skriv A ved punktet (7, 4).**

c) **Trekk en rett linje gjennom punktene (7, 4) og (1, 1).**

d) Velg et punkt til som ligger på linja du har tegnet.
Skriv koordinatene til dette punktet.

....

Elevene skal i denne oppgaven orientere seg i koordinatsystemet. Hensikten var blant annet å teste hvordan de oppfattet punktangivelser i koordinatsystemet, og å tegne en linje gjennom to oppgitte punkter. Som en hjelp ble koordinatene til punktet G oppgitt.

Oppgave 4 a Koordinatsystemet - koordinat til punkt	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	9	11
(4, 1) (riktig svar)	62	75
(1, 4)	21	10

Resultatet viser usikkerhet i å angi koordinatene til et punkt. Vi bemerker også at andelen som ikke svarer, øker noe fra 5. til 7. klasse.

Spørsmål b var å avmerke et punkt ut fra oppgitte koordinater. Den samme usikkerheten gjorde seg gjeldende her:

Oppgave 4 b Koordinatsystemet - merking av punkt	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	7	7
Korrekt avmerking	63	77
Avmerker A ved (4, 7)	21	12

Ellers kan en bemerke at svarfrekvensene på spørsmål b var svært like dem for spørsmål a. I spørsmål c ble det spurt om å trekke en linje gjennom to oppgitte punkter.

Oppgave 4 c Koordinatsystemet - trekke linje	5. klasse	7. klasse
Ubesvart	11	8
Trekker korrekt linje gjennom to punkter*	64	76
Trekker linje eller kurve gjennom A og origo	5	4
Trekker linjer fra aksene til A og/eller (1, 1)	6	3
Trekker en kurve gjennom A, (1, 1) og origo	1	1

* I denne kategorien er det også tatt med besvarelser hvor punktet A er avmerket feil, og det er tegnet en korrekt linje ut fra den forutsetningen.

Vi merker oss at en del elever mener at linja må gå gjennom origo. En del har tydeligvis også den (mis)oppfatningen at linjer må være parallelle med koordinataksene.

I det siste spørsmålet ble elevene stilt fritt til å avmerke et vilkårlig punkt på den linja som de hadde tegnet. Dette gav mange mulige kombinasjoner. Punktet kan være avmerket på eller utenfor linja, koordinatene kan være riktig angitt eller byttet om.

Oppgave 4 d Koordinatsystemet - punkt på linje	5. klasse	7. klasse
Ubesvart	14	12
Heltallige koordinater*	47	64
Ikke heltallige koordinater (også riktig svar)	0,2	0,4
Punkt med ombyttede koordinater ligger på linja	12	6
Punkt ikke på linja, bytter om koordinater	13	2
Punkt ikke på linja, korrekte koordinater	1	6

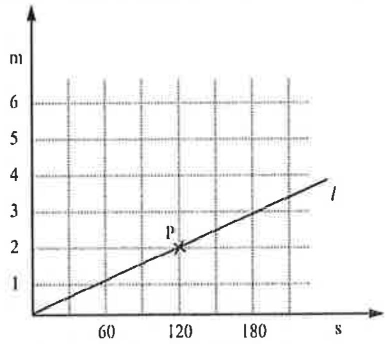
* I denne kategorien er det også tatt med besvarelser hvor linja er tegnet feil og det er angitt et korrekt punkt ut fra den forutsetningen.

Elever har også i 7. klasse problemer med å bytte om koordinater. Vi kan tolke de siste linjene i tabellen som at elevene viser et bedre samsvar mellom punkter avmerket i planet og skrevne koordinater.

Oppgave 12 for 9. klasse tar opp disse problemene på en tilsvarende måte.

Oppgave 12 (Kl. 9)

12 Linja *l* viser en sammenheng mellom m og s. Punktet P ligger på linja *l*.



a) **Hva er koordinatene til punktet P? Sett ring rundt riktig svar.**

(120, 60)   (120, 2)   (4, 2)   (60, 120)

b) Nedenfor ser du fem uttrykk. **Hvilket av dem passer til linja *l* ?**

Sett ring rundt riktig svar.

$m = \frac{s}{60}$ $m = \frac{s}{2}$ $m = s$ $m = 60s$ $4m = 180s$

Spørsmål a er tilsvarende spørsmålene i oppgave 4. Spørsmålet er av flervalgstypen, og hensikten er å teste bruk av enheter på koordinataksene. Tallene på aksene er oppgitt på en noe uvanlig måte. Det vanlige er at de små tallene er på førsteaksen og de store tallene på andreaksen.

Oppgave 12 a Koordinatsystemet - koordinater til punkt	**9. klasse**
Ubesvart	9
(120, 2) (riktig svar)	85
(60, 120) *	4

* Alle andre kategorier hadde svarprosent mindre enn 1.

Til tross for at mange ikke har svart, har spørsmålet en rimelig høy andel riktige svar. At alternativet (60, 120) var det som fikk høyest svarprosent av dem som var feil, kan virke noe underlig. En del forhold kan imidlertid trekkes fram:

- Alternativet var det siste, slik at dersom en ikke hadde funnet noe tidligere alternativ, kunne dette være et valg.
- Et annet forhold er at de tallene som inngår, er 2 og 120, slik at 60 kommer fram som en kombinasjon, og at andrekoordinaten er større enn første.

Her vil det være interessant å be om begrunnelse for valg.

Spørsmål 12 b er et tilsvarende spørsmål, men elevene skal finne likningen for ei linje (gitt som et funksjonsuttrykk – m som funksjon av s). Enhetene på koordinataksene kan være uvant for noen elever – med de store tallene på førsteaksen.

Oppgave 12 b Funksjonsuttrykk for linje	9. klasse
Ubesvart	17
$m = \frac{s}{60}$ (riktig svar)	20
m = s/2	13
m = s	10
m = 60s	22
4m = 180s	13

Som vi ser, fordeler svaralternativene seg forholdsvis jevnt, med et høyt antall ubesvart.

Det kan være flere forklaringer for valget av alternativ m = 60s. *En* kan være at 1 m svarer til 60s, altså at m = 60s. En slik tenkemåte er en velkjent misoppfatning i forbindelse med bruk av bokstaver for å betegne variable størrelser. En bruker bokstavene som merkelapper (forveksles med benevning), som for eksempel at 1 minutt (m) = 60 sekunder (s).

En annen forklaring kan være at elevene har liten erfaring med funksjoner der koeffisienten er nevner i en brøk (mindre enn 1). Alternativet 4 m = 180s kan også ha blitt valgt av noen fordi det var det siste alternativet (og ingen av de tidligere passet for disse elevene). m = s/2 kan også komme av at punktet P er avmerket ved (120, 2).

Vi ser at elever i 9. klasse er usikre på betydningen av uttrykk i forhold til koordinatsystem. De blir ofte presentert for uttrykk på en mer eller mindre standardform.

$y = ax$

der a som regel er et tall mindre enn 10.

1.3 Fra situasjon til graf

Oppgave 1 a (Kl. 5, 7, 9)

> a Ulf plukket bare første uke. Han plukket mindre enn Eva og mer enn Ole. **Tegn inn i diagrammet ovenfor hvor mye Ulf kan ha plukket første uke.**

Oppgaven tar for seg koordinatsystemet

Oppgave 1 a, koordinatsystemet	5. klasse	7. klasse	9. klasse
Ubesvart	9	9	7
Riktig svar	81	86	90
Kortere enn Ole	1	2	2
Lengre enn Eva	3	1	1
Likt med Eva eller Ole	1	1	1

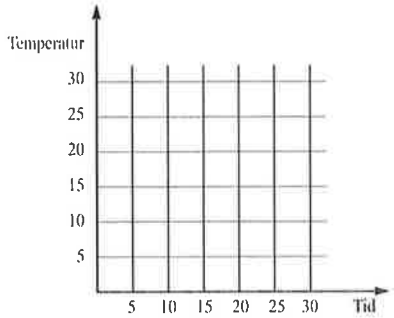
Spørsmål c er gjennomgående godt besvart. Svarprosenten øker fra 81 % (5. klasse) til 90 % (9. klasse). Det bør imidlertid bemerkes at forholdsvis mange ikke svarte på spørsmålet, fra 9 % i 5. klasse til 7 % i 9. klasse. Siden spørsmålet kommer tidlig i oppgavesettet, ligger rimeligvis årsaken til at spørsmålet er ubesvart, i at dette er en oppgavetype som er mindre kjent blant elevene.

Oppgave 11 b (Kl. 7)

11 En vifteovn ble testet. Da den ble slått på, var temperaturen i rommet 5 grader celsius. Tabellen viser temperaturen i rommet.

Tid (minutter)	5	10	15	20
Temperatur (grader)	10	16	20	22

a) **Tegn inn i diagrammet hvordan temperaturen i rommet forandrer seg etter at testen startet.**



b) Vi målte temperaturen også etter 25 minutter og etter 30 minutter. **Hvordan tror du kurven vil fortsette? Tegn dette i diagrammet.**

Oppgave 11 a diskuteres side 26.

Oppgave 11 b Funksjoner - fortsettelse av graf	**7. klasse**
Ubesvart	20
Viser gradvis mindre temperaturøking	19
Viser jevn temperatur	3
Viser økende temperatur, ikke gradvis mindre øking	51

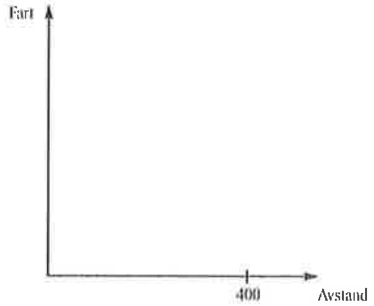
Forholdsvis mange har unnlatt å svare.

I denne delen av oppgave 11 er det beskrevet en situasjon, men elevene må gjøre noen antakelser. De har videre som utgangspunkt den kurven som de tegnet i spørsmål a, der de ser et visst forløp (dersom de har tegnet kurven riktig). Over halvparten av elevene viser videre øking av temperaturen uten at kurven flater ut. Dette tyder på at de ser mer på enkeltverdiene i tabellen enn formen på kurven. Vi kan si at de er mer opptatt av prosessen fra punkt til punkt enn den totale utviklingen.

En svakhet ved oppgaven er at den bygger på forutsetninger som ikke er formulert i oppgaven: Elevene bør ha kjennskap til oppvarming av rom.

Oppgave 9 (Kl. 9)

9 Ola løper 400 meter. Han åpner raskt, etter 200 meter blir han sliten og farten blir mindre. Når han nærmer seg mål, spurter han. **Tegn en graf som viser hvordan farten varierer under løpet.**



I denne oppgaven er det forholdsvis detaljert beskrevet en situasjon som ikke burde være så ukjent for elevene. Hensikten med oppgaven var å prøve elevene i å framstille i koordinatsystem hvordan farten varierer. Tre forhold ved kurven ble spesielt sett på:

- Starten på grafen, at den starter i origo
- Formen på grafen, etter de opplysningene som er gitt i teksten
- Avslutningen på grafen, at farten avtar etter målpassering

Oppgave 9 - Funksjoner, tegne graf til 400 meter løp	**9. klasse**
Ubesvart	5
Riktig form, avslutter med synkende graf	3
Riktig form på grafen, men noe forskjellige avslutninger*	48
Riktig form, men starter ikke i origo	12
Riktig form, men ikke hastighetsendring på 200 meter	7
Riktig form, men starter ikke i origo og ikke hastighetsendring på 200 meter	5

* For eksempel at den slutter brått eller med stigende kurve

Det var ellers en rekke ulike svar på oppgaven.

Nærmere 20% har ikke start i origo. Vi må gå ut fra at elevene ikke tenker bevisst på det forholdet at løperen har hastighet lik 0 ved start. Svært mange elever får riktig form på kurven. Det er endepunktene som er det problematiske – start og avslutning. Det er grunn til å tro at elevene ikke tenker lenger enn til 400 meter og ikke er bevisst på forløpet av kurven etter målpassering.

1.4 Fra situasjon til formel

Oppgave 4 (Kl. 9)

Klasse 8a skal ha fest. Den kjøper inn duker, lys og servietter for 350 kroner. Til mat og drikke regner klassen med 45 kroner per elev. **Skriv et uttrykk for hva festen koster (y kroner) når x elever kommer på festen.**

y = ...

I denne oppgaven presenteres elevene for en situasjon som ikke burde være helt ukjent. Ut fra situasjonen skal de lage et funksjonsuttrykk. Den avhengige variabelen er kalt y, og den uavhengige, som er antall elever, x.

Forholdsvis mange har unnlatt å svare. De alternativene som fikk høyest svarprosent, er gjengitt i tabellen nedenfor.

Oppgave 4 Funksjoner - finne funsjonsuttrykk	**9. klasse**
Ubesvart	20
45x + 350 eller liknende (riktig svar)	45
45x	13
Feilaktige uttrykk med x, 45 og/eller 350	11
Tallsvar (riktige eller uriktige)	3

En del elever ser bort fra konstantleddet. Det er i kodingen åpnet noe for mulige misforståelser i teksten, for eksempel at en regner med at de 350 kronene kan bli dekket av prisen per elev. I svarene som var feil, var det stor variasjon i de uttrykkene som ble oppgitt. Det tyder på en viss usikkerhet blant elevene i å oversette fra en konkret situasjon til et funksjonsuttrykk.

Selv om få elever har oppgitt tallsvar, ser vi altså at det er noen som fortsatt ikke vil ha variabelen x inn i svaret. Vi kan her fornemme en misoppfatning som går ut på at svar alltid skal uttrykkes med tall.

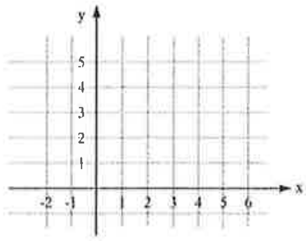
1.5 Fra formel til graf

Oppgavene 7 a, b, c (Kl. 9)

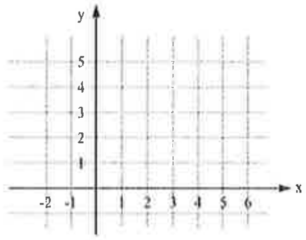
7 Her er tre funksjoner. Tegn grafene.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 3$ c) $y + x - 4 = 0$

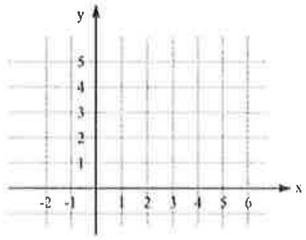
a)



b)



c)



I denne oppgaven er det gitt tre funksjoner på noe ulik form. Grafene til disse funksjonene skal så tegnes. Det er underforstått i oppgaven at y er å betrakte som en funksjon av x. Fra et formelt synspunkt kan det innvendes at det siste uttrykket implisitt også gir x som en funksjon av y. Den første oppgaven er den som inneholder den mest vanlige formen for et funksjonsuttrykk.

Oppgave 7 a Koordinatsystem - tegn graf til funksjon y = 2x + 1	**9. klasse**
Ubesvart	14
Tegn grafen korrekt*	30
Avmerker punkter, trekker ikke opp linje **	22
Angir punktet (2,1) som svar	16
Tegner linje gjennom origo	10

* Det er her tatt med både dem som tegner en rett linje uten å avmerke punkter på den, og dem som tegner en rett linje med avmerkede punkter.

** Dette omfatter også dem som gir punktet (2,1). I tillegg er det 3 % som avmerker punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Forholdsvis mange har unnlatt å svare. Svarprosenten av dem som tegner inn punkter, tyder på at de antar at sammenhengen mellom x og y bare gjelder *en* verdi. De som angir (2,1), tolker trolig variablene som merkelapper, «2 x-er og 1 y».

Den neste oppgaven er av samme slag, men her er et funksjonsuttrykk som elevene har mindre erfaring med.

Oppgave 7 b Koordinatsystem - tegn graf til funksjon y = 3	**9. klasse**
Ubesvart	21
Tegner grafen korrekt *	12
Avmerker punkter, trekker ikke opp linje **	5
Angir punktet (0,3) som svar	31
Tegner linje gjennom origo	12

* Det er her tatt med både dem som tegner en rett linje uten å avmerke punkter på den, og dem som tegner en rett linje med avmerkede punkter.

** Dette omfatter også dem som gir punktet (0,3). I tillegg er det 3 % som avmerker punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Svarene her har mange fellestrekk med svarene på oppgave 7 a. Vi kan si at det er en utbredt misoppfatning at grafen til «funksjonen» y = 3 blir oppfattet som et punkt, det vil si at det bare er en x-verdi. Vi legger merke til at svaret (0,3) igjen kommer av ukorrekt bruk av variabel-begrepet.

Oppgave 7 c Koordinatsystem - tegn graf til funksjon x + y – 4 = 0	**9. klasse**
Ubesvart	47
Tegner grafen korrekt *	12
Avmerker punkter, trekker ikke opp linje **	20
Angir punktet (0,0) som svar	12
Tegner linje gjennom origo	7

* Det er her tatt med både dem som tegner en rett linje uten å avmerke punkter på den, og dem som tegner en rett linje med avmerkede punkter.

** Dette omfatter også dem som gir punktet (0,0). I tillegg er det 3 % som avmerker punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Funksjonsbegrepet er tydelig utradisjonelt, og nærmere halvparten av elevene har unnlatt å svare. På samme måte som i oppgavene foran ser vi at mange også her tegner punkter som svar, noe som vi vil tolke som at elevene tenker punkter når funksjoner blir oppgitt som likning, det vil si at både x og y går inn i et uttrykk. Elevene har jo vært vant til å finne *en* løsning til en lik-ning.

Et annet forhold er at en del elever tegner grafen til funksjonen gjennom origo. Det tyder på en misoppfatning om at alle lineære funksjonsgrafer går gjennom origo.

Sett under ett viser disse spørsmålene at elever har problemer med å tegne grafer til lineære funksjoner. Vi kan identifisere noen misoppfatninger. *En* misoppfatning er å tegne punkter i stedet for linjer. Det er imidlertid noe usikkert i hvilken grad dette kan komme av måten som funksjonene er gitt på i oppgaven.

En annen misoppfatning er at alle lineære funksjonsgrafer går gjennom origo. Bakgrunnen for det kan være hvordan lineære funksjoner først ble innført med grafer som gikk gjennom origo. Elevene har ikke utvidet begrepet lineær funksjon til å omfatte også konstantleddet.

1.6 Fra formel til situasjon

Oppgave 11 (Kl. 9)

Eksempel

Funksjonssammenhengen

$y = 4x$

passer til denne fortellingen:

y kroner er det du må betale
for x kg poteter som koster
4 kr per kg.

Lag en fortelling som passer til funksjonssammenhengen

$y = 25x + 20$

Her er hensikten å se på et funksjonsuttrykk som et objekt som gir informajson. Elevene blir bedt om å skrive en fortelling som passer til «funksjonssammenhengen». En rekke kontekster er mulige, og *en* hensikt er å se hvilken kontekst elevene velger. En kan si at eksemplet i innledningen gir en mulig kontekst også for denne oppgaven.

Oppgaven vil være uvanlig for de aller fleste elevene.

Oppgave 11 Funksjon - fortelling til y = 25x + 20	**9. klasse**
Ubesvart	27
Akseptabel forklaring	39
Akseptabel forklaring med penger som kontekst *	35
Ufullstendig forklaring til riktig uttrykk (stor variasjon)	12
Fortellinger til andre formler	5

* Dette svaralternativet er også tatt med blant kategorien «Akseptabel forklaring» i linja ovenfor.

Tabellen viser at elevene nok har blitt ledet inn på penger som kontektst gjennom eksemplet. Ellers er det vanskelig å finne bestemte mønstre i de svarene som er feil, slik at ingen bestemte misoppfatninger er synlige.

1.7 Fra tabell til graf og fra graf til tabell

Oppgave 11 a (Kl. 7)

Oppgaven er gjengitt på side 21.

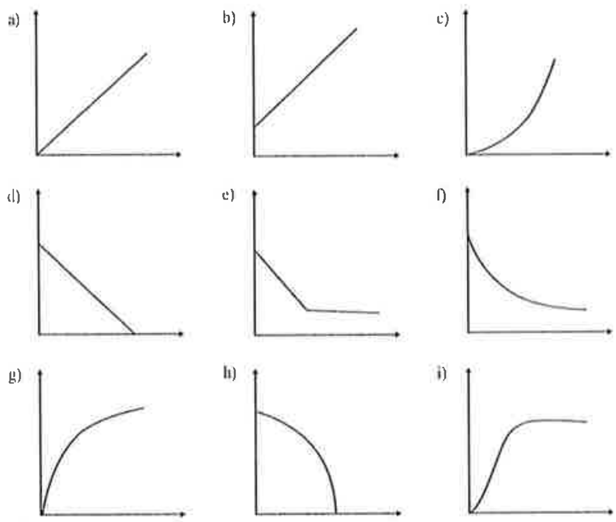
Hensikten med oppgaven er å se hvordan elever knytter sammen opplysninger gitt i tabell og en graf. I oppgaven er det en opplysning som gir et femte punkt, nemlig at da ovnen var slått på, var temperaturen i rommet 5 grader Celsius. Ut fra formuleringen i oppgaveteksten kan det nok diskuteres om dette punktet bør være med på grafen: «etter at testen startet» kan vise til tidspunkt etter «0», og dette punktet er heller ikke avmerket.

Oppgave 11 a Funksjoner - graf fra tabell	7. klasse
Ubesvart	10
Tegner 5 punkter riktig (eventuelt med søyler)	7
Tegner fire punkter riktig	64
Avmerker punkter der første- og andrekoordinat er byttet om, f.eks. (10,5)	4

Vi ser at noen elever bytter om første- og andrekoordinaten, selv om aksene har benevning og tabellen skulle være tydelig å lese.

Oppgavene 13 a, b (Kl. 9)

13 For hver av tabellene nedenfor skal du skrive hvilken graf som passer best.



a) Avkjøling av kaffe:

Tid, minutter (x)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatur, grader (y)	90	79	70	62	55	49	44

Her passer graf .... best.

b) Antall fugler på en vulkanøy:

År (x)	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
Antall fugler (y)	0	1	5	17	30	30	30

Her passer graf .... best.

I disse oppgavene er det gitt tabeller, og et visst antall grafer er tegnet opp. Hensikten er å undersøke om elevene kan gjenkjenne grafens form med bakgrunn i opplysningene i tabellen. Grafene som er gjengitt, faller i grupper:
(a), (b) og (c) er voksende, mens (d), (e), (f) og (h) er avtakende. Grafene (g) og (i) er voksende, men flater ut, selv om det bare er (i) som ser ut til å nærme seg en bestemt verdi.

Oppgave 13 a Funksjon - graf for avkjøling av kaffe	9. klasse
Ubesvart	17
f (riktig svar)	40
Andre avtakende grafer – e, d eller h	18
Voksende grafer – a, b, c, g eller i	20

At en del elever skriver opp en voksende graf som svar, kan komme av at de bytter om aksene på grafen eller leser tabellen med ombyttede argumenter. (Nå må det igjen bemerkes at det bare er underforstått at x angir førsteaksen og y angir andreaksen. Selv om det er grunn til å regne med at dette ikke har forvirret elevene, vil det være et punkt å merke seg.)

Oppgave 13 b Funksjon - graf for antall fugler på en vulkanøy	**9. klasse**
Ubesvart	18
i (riktig svar)	52
Andre voksende grafer - a, b, c eller g *	16
Avtakende grafer - d, e eller f	8

* Vi bemerker at graf (c) fikk 6 %, mens graf (g) bare fikk 4 % av svarene.

I denne oppgaven er det flere riktige svar enn i den første oppgaven. En mulig forklaring kan være at tallene (antall fugler) er mindre, og at årstall er mer kjent for elevene enn for eksempel avkjøling av kaffe. Ellers er resultatet av å oppgi motsatt (voksende/synkende) graf noe overraskende siden «avkjøling» antyder lavere temperatur, mens det ikke er gitt noen antydning til voksende/avtakende i spørsmål b.

1.8 Fra tabell til situasjon og fra situasjon til tabell

Oppgave 3 a (Kl. 5, 7, 9), **b** (Kl. 5, 7), **b** (9)

I denne oppgaven er første spørsmål felles for alle klassetrinn, mens 5. og 7. klasse har spørsmål b felles. Det er et eget spørsmål b for 9. klasse.

3 Togtabellen nedenfor viser når toget går fra de forskjellige stasjonene.

Tog nr.	71	701	1620	505	73	703
Oslo S	0718	1033	1345		1539	1718
Nationaltheatret	|	|	1347		|	|
Lysaker/Fornebu	0729	1043	1355		1549	1728
Asker	0743	1100	1410		|	1744
Drammen	0757	1114	1425		1620	1759
Mjøndalen	|	|	1438		|	|
Hokksund	|	1131	1445		|	1812
Vestfossen	|	|	1450		|	|
Kongsberg	0829	1157	1508	1515	1653	1838
Hjuksebø	|	|		1551	|	|
Nordagutu	0907	1238			1729	1922

a) **Når går tog nr. 701 fra Oslo S?** ....

b) Mari skulle reise fra Hokksund til Kongsberg.
Hun rakk ikke toget som gikk 1131.
Når går neste tog fra Hokksund til Kongsberg? ....

Oppgave 3 a Funksjon - togtabell	**5. klasse**	**7. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	2	1	1
1033 eller likn. (riktig svar)	93	96	97
0718 eller likn	1	1	1

Som vi ser, hadde spørsmålet gjennomgående høy svarfrekvens, noen få elever kan ha valgt 0718 fordi det var første kolonne.

Spørsmål b for 5. og 7. klasse var som følger:

b Mari skulle reise fra Hokksund til Kongsberg.
Hun rakk ikke toget som gikk kl. 1131.
Når går neste tog fra Hokksund til Kongsberg? ....

Oppgave 3 b (5. og 7. klasse) **Funksjoner - togtabell, neste tog**	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	3	3
1445 eller likn. (riktig svar)	81	83
1157 *	5	5
1812	3	3

* Dette svaret hadde høyest frekvens av de andre svarene som ble gitt.

Her er det greit å se hvordan feil avlesning har blitt foretatt. Tidspunktet 1157 er neste tall nedover i kolonnen. Tidspunktet 1812 er siste tall i linja for Hokksund. Det er svært liten forskjell mellom 5. og 7. klasse – noe som kan tyde på at denne typen oppgaver ikke i særlig grad blir behandlet i undervisningen disse årene.

I 9. klasse var det en annen oppgavetype som b-spørsmål.

b Anne skal være på Kongsberg kl. 1530.
Når kan hun seinest reise med toget fra Drammen? ....

Hensikten var her at en skulle gå tilbake i tabellen.

Oppgave 3 b (9. Klasse) **Funksjoner - togtabell, seneste avreise**	**7. klasse**
Ubesvart	2
1425 (riktig svar)	83

Det er ingen klare tendenser til bestemte misoppfatninger i resten av de svarene som ble avgitt. De fordelte seg over en rekke tidspunkter.

Oppgave 5 a, b, c (Kl. 5, 7)

5 Tabellen nedenfor viser resultatene til spillerne i en konkurranse.

poeng	antall spillere
8	1
9	1
10	6
11	4
12	3

a) **Hvor mange har fått nøyaktig 10 poeng?** ....

b) **Hvor mange har vært med på konkurransen?** ....

c) **Hvor mange har fått 10 poeng eller mer?** ....

Denne oppgaven var lik for 5. og 7. klasse. Tabellen som ble brukt, var i en form som ville være egnet til å tegne et søylediagram, med poeng på førsteaksen og antallet avsatt som søyle. Hensikten med oppgaven var å se elevenes forståelse av data presentert i en tabell.

Oppgave 5 a Funksjoner - poengtabell	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	3	3
6 (riktig svar)	73	83
1	20	12

En stor del av elevene klarer å finne det riktige antall spillere. Mange elever har svart at nøyaktig *en* spiller har fått 10 poeng. En forklaring på dette er at de har registrert at 10 er på *en* linje i tabellen, og at antallet (6) ikke får den riktige betydning.

I oppgave 5 b og 5 c blir dette spørsmålet fulgt opp ved at en spør om antallet som var med på konkurransen (5 b) eller antallet som har fått 10 poeng eller mer (5 c).

Svarene fordelte seg som følger:

Oppgave 5 b Funksjoner - hvor mange deltakere	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	4	3
15 (riktig svar)	76	85
5	12	8
6	2	0,4

Oppgave 5 c Funksjoner - fått 10 poeng eller mer	**5. klasse**	**7. klasse**
Ubesvart	4	3
13 (riktig svar)	59	75
3	25	14
7	3	3

Resultatene på disse to spørsmålen styrker tolkningen av resultatet i oppgave 5 a. Elevene teller linjer (angitt ved poeng) og ikke antallet på hver linje. En del elever har derfor ikke oppfattet systemet ved opplysninger gitt i tabell. Oppgaven viser også en rimelig utvikling fra 5. til 7. klasse (flere får riktig svar), og antallet som leser linjer i tabellen, blir mindre.

1.9 Fra tabell til formel og fra formel til tabell

Oppgave 10 (Kl. 9)

10 Tabellen viser sammenhengen mellom x og y.

x	1	4	7	10	13
y	8	11	14	17	20

Hvilke formler passer til tabellen? (Sett ring.)

$y = x + 7$ $\quad y = 8x$ $\quad x - y + 7 = 0$ $\quad y = x^2 + 7$

I oppgaven var det gitt en standard funksjonstabell med sammenheng mellom x og y. Formlene som var gitt, var slik at alle passet til første verdi for x: $x = 1$ gir $y = 8$.

Oppgave 10 - Funksjoner, formler som passer til tabell	**9. klasse**
Ubesvart	19
$y = x + 7$ og $x - y + 7 = 0$ (riktig svar)	19
(Bare) $y = x + 7$	21
(Bare) $x - y + 7 = 0$	3
$y = 8x$	6
$y = x^2 + 7$	2
To formler, der en er riktig	16

Forholdsvis mange unnlot å svare.

Første og tredje formel gir samme resultat. Den tredje formelen har en noe uvant form, og det er rimeligvis årsaken til at forskjellen mellom dem som bare svarte denne, og dem som bare svarte den første, var såpass stor. Vi kan heller ikke se bort fra at elevene først prøvde med den første funksjonen, og når den passet, så stoppet de.

Det er noe overraskende at såpass mange som 6 % hadde avmerket (bare) alternativet 8x. Det er relativt lett å se at $x = 4$ og $y = 11$ ikke passer inn her.

Del 2
Ideer til undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som fokuserer på noen av de viktigste misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av funksjonsbegrepet. Disse vanskene og misoppfatningene har stått sentralt i del 1.

De fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. I kapittel 3 i introduksjonsheftet har vi diskutert diagnostisk undervisning, som har det særpreget at feil som elevene gjør som følge av misoppfatninger, brukes på en konstruktiv måte. Kognitive konflikter, diskusjoner av ideene som knytter seg til begrepene, og tid til å reflektere over det en gjør, står sentralt i denne arbeidsmåten. De fleste av aktivitetene er laget med dette som siktemål. Vi vil derfor tilrå at en leser kapittel 3 i introduksjonsheftet før en begynner å ta i bruk aktivitetene i denne samlingen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi i kapittel 2 ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner.

Kapittel 2 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom en ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk is future thinking.*

Tradisjonell undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil lærere assosiere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Å be barn presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og at disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ha mange praktiske former.

Læreren kan for eksempel

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- be en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere disse. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor blir det pekt på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klassen.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det utforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er riktig eller galt. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist at klasser gjør det klart bedre på tester når læreren ikke for tidlig prøver å «avslutte» diskusjonen med å peke på det riktige svaret eller den riktige måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det riktige tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som
- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte en som snakker
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer

«Hør på hva Anne sier.» «Takk, Helge!» «Nå, hva mener du, Marit?» «Hvordan reagerer du på det, Åse?» «Er det andre ideer her?» «Kan du gjenta det du sa, Petter?»

2 Noen ganger være en «utspørrer» eller «provokatør» som
- introduserer en ny idé når diskusjonen er laber
- følger opp et synspunkt
- spiller «djevelens advokat»
- fokuserer på et viktig begrep
- unngår å spørre multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar

«Hva ville hende dersom ... ?» «Hva kan du si om svaret, når du multipliserer to tall?»

3 Ikke være en dommer eller «vurderer» som
- vurderer hvert svar med «ja», «godt» eller «interessant» eller liknende. Slikt hindrer ofte andre i å komme fram med alternative ideer og oppfordrer til en «ytre akseptabel» framførelse i stedet for en utforskende dialog

«Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene.» «Du er nesten framme.» «Ja, det er riktig.» «Nei, du skulle ha sagt ...» «Kan noen se hva som er galt med det Gunnar sier?»

Denne listen er ikke ment å vise at det alltid er upassende å evaluere elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opptrer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med «spørsmålsgjetting», der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende dialog, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, forlater elevene timen argumenterende og tenkende.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, så kan de ta mange former og ha ulike formål. Det vil for eksempel være forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der en skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når en har arbeidet en stund med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor vil vi peke på noen slike hovedformer.

I forbindelse med arbeid med misoppfatninger vil det være spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsninger de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å ha misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som

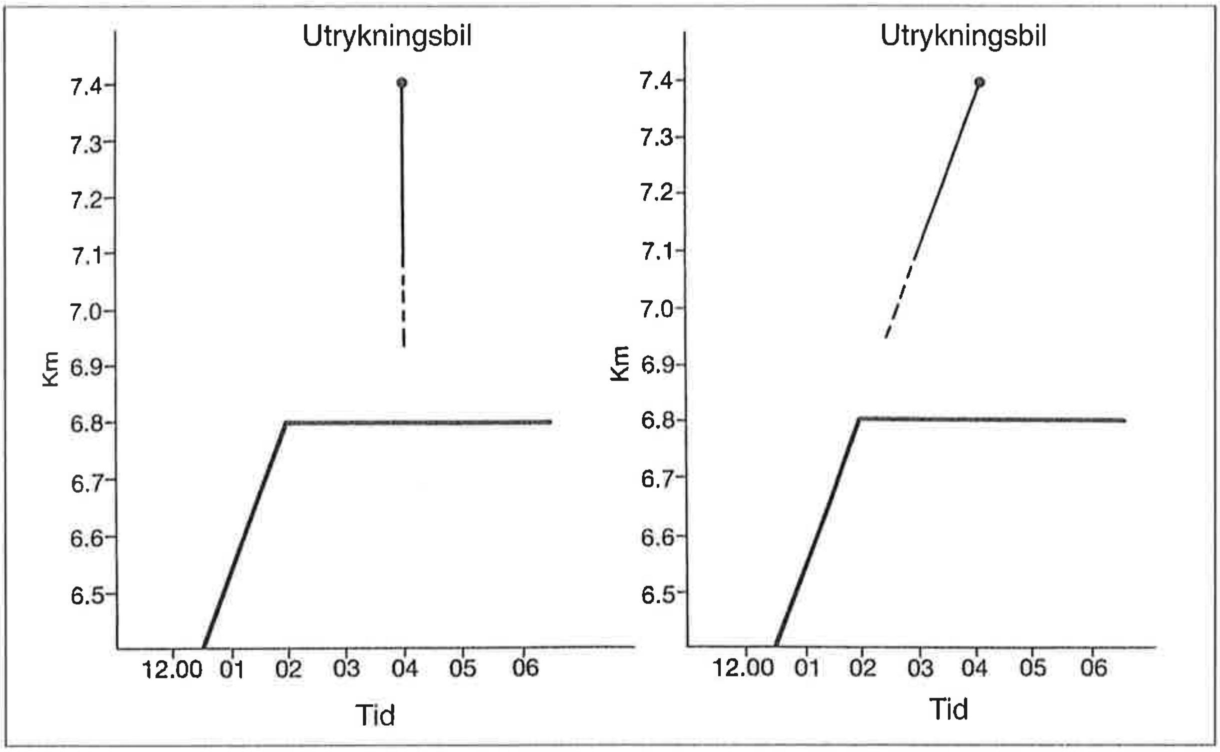
- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder likner på hverandre? Hvorfor? (En kan sammenlikne både på tvers av oppgaver som ulike elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå. Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor og i kapittel 3.

2.1 Aktiviteter som utgangspunkt for diskusjon

Grafer som beskriver situasjoner, kan brukes til å få fram kognitive konflikter. Betrakt følgende situasjon: En bil har fått stopp på et visst sted og et visst tidspunkt, gitt ved koordinatene 12.02 (klokkeslett) og 6,8 km. En utrykningsbil forlater klokka 12.04 et sted gitt ved koordinat 7,4 km for å komme bilen som har stoppet, til hjelp. Tegn inn kjøreturen til utrykningsbilen i koordinatsystemet.

På figuren nedenfor er det vist to mulige slike kjøreturer.



Begge disse figurene kan være gode utgangspunkter for diskusjoner, der en spesielt ser på tidsaksen. For eksempel vil en kunne argumentere med at tida vil stå stille eller gå «baklengs», med utgangspunkt i figurene.

Ved å bruke **regneark** har vi en del muligheter for aktiviteter som utfordrer elevenes kreativitet når det gjelder å komme fram til funksjonsuttrykk.

«Finn formelen»

Ideen er som følger:

> *I en rute kan en skrive inn tallverdier. Avhengig av det tallet som er skrevet inn, vises det en annen (avhengig) verdi, for eksempel et par ruter til høyre. Denne (avhengige) verdien bygger på en formel som er skrevet inn. Elevenes oppgave er å finne formelen som gir den avhengige verdien.*

Regnearkoppsett for en slik oppgave kan være meget enkelt, eller noe mer komplisert.

Et enkelt regnearkoppsett er vist på figuren nedenfor:

	argument		funksjonsverdi		
	4		8		

Noe tekst, som for eksempel «argument», «funksjonsverdi» og «understreking», skrives inn på et passende sted. I en rute til høyre for der en planlegger å skrive inn argumentverdien, skrives det inn en formel. Den kan skjules, slik at den ikke vises på statuslinja når formelruta er aktiv. Hvordan dette gjøres, vil være avhengig av det regnearket som brukes. Elevene kan så prøve seg fram ved å sette inn verdier i ruta for «argument». Ved å se på funksjonsverdiene skal de så forsøke å skrive ned formelen som er brukt.

For å få en bedre oversikt kan de også få sine verdier skrevet inn i en annen rute på arket.

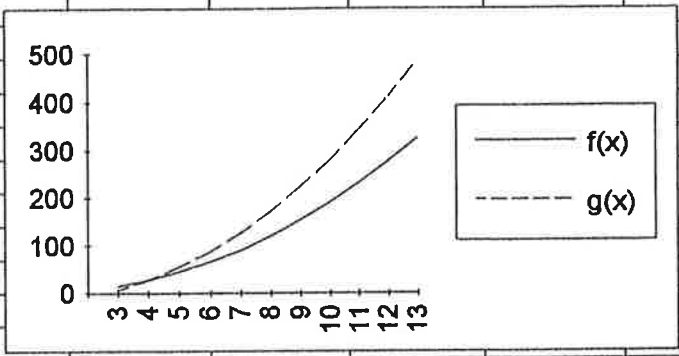
Oppgaven kan varieres på ulike måter, for eksempel ved at elevene får oppgitt en rekke verdier samtidig. Det kan gjøres ved at det lages en tabell med argumenter og en tilhørende tabell med funksjonsverdier.

Elevene arbeider i grupper foran skjermen og kan gi hverandre oppgaver. Læreren kan også legge inn formler på forhånd i regneark, som elevene henter fram. Dette siste kan ofte være å foretrekke iallfall i en startfase, slik at det ikke gis helt «umulige» oppgaver.

Denne oppgaven kan også utvides til å gjelde funksjonsgrafer.

I et regneark har vi muligheten til å vise en funksjonstabell og tilhørende graf på samme ark (skjerm). Det er videre slik at i noen regneark (for eksempel Excel for Windows) vil grafen forandres når en forandrer tabellen, det vil si funksjonsforskriften, som er grunnlaget for tabellen.

x	f(x)	g(x)
3	15	7
4	28	28
5	45	55
6	66	88
7	91	127
8	120	172
9	153	223
10	190	280
11	231	343
12	276	412
13	325	487



En utvidelse av oppgaven ovenfor vil være at det legges inn to funksjoner, *f* og *g*. *f*-funksjonen kan være skjult, og hensikten kan være å finne en funksjon *g* som er slik at grafene faller sammen.

Funksjonen *f* kan være skjult på forskjellige måter. Det kan være at formelen ikke er synlig, men at funksjonstabellen ellers er synlig, alternativt kan vi skjule kolonnen der funksjonen *f* er definert. Oppgaven i dette tilfellet er da mer direkte å tilpasse grafen til grafen til funksjonen *f*.

Det bør også bemerkes at det ikke er nødvendig i denne sammenhengen å bruke formler som funksjonsforskrifter. En tabell for *f* kan skrives inn direkte og deretter skjules. Oppgaven for elevene blir å finne verdiene til funksjonen som gir den gitte grafen, eventuelt en formel som gir en god tilpassing.

Kapittel 3 Bruk av lommeregnere og datamaskin i arbeidet med funksjoner

Lommeregnere og datamaskiner spiller en stadig større rolle i samfunnet, og de har kommet inn i matematikkundervisningen på flere trinn.

I L 97 tenker en seg lommeregneren brukt allerede fra 2. klasse. Da brukes den som et hjelpemiddel som en kan eksperimentere med for å lære mer om tall og symboler. På høyere klassetrinn brukes lommeregneren gradvis mer som et redskap for å regne ut svar. I videregående skole er lommeregner med grafisk vindu i bruk på grunnkurset i matematikk.

Bruk av datamaskiner er også på vei inn i skolens matematikkundervisning på alle trinn. Datamaskiner er særlig godt egnet til arbeidet med funksjoner.

Både lommeregnere og datamaskiner har ulike bruksmåter i skolen. De er et hjelpemiddel for *å gjøre* matematikk, fra de enkle beregninger til, for eksempel, å løse omfattende likningssystemer. De kan også brukes som hjelpemiddel til *å lære* matematikk. Det gjelder særlig datamaskiner med spesiell programvare, men det gjelder også lommeregnere, fra de enkle til de avanserte modellene.

Vi vil først presentere noen av de vanligste typene og kort kommentere mulighetene som de har.

En **vanlig enkel lommeregner** har de fire regningsartene, minne og ofte kvadratrot og en prosenttast (som kan virke noe ulikt på de ulike modellene).

Denne lommeregneren er et obligatorisk hjelpemiddel på ungdomstrinnet, og utviklingen går mot at alle elever har en slik lommeregner gjennom hele grunnskolen. For lærere finnes det «gjennomsiktige» lommeregnere som kan brukes sammen med skriftprosjektører for demonstrasjon i klassen.

Det finnes videre en rekke avanserte modeller som har mange matematiske funksjoner innebygd. Disse modellene går langt ut over grunnskolens matematikk.

Lommeregnere med grafisk vindu har vanligvis en rekke avanserte matematiske funksjoner. I denne sammenhengen er det viktig er at de kan vise grafiske bilder – funksjonsgrafer og statistiske diagrammer. Videre har grafiske lommeregnere den fordelen at en serie utregninger kan vises i vinduet. De kan også programmeres. Slike lommeregnere er enda ikke aktuelle som elevmaskiner i grunnskolen, men de kan være nyttige hjelpemidler for læreren som et alternativ til å bruke datamaskiner. De vanligste typene kan brukes i tilknytning til skrift-prosjektør.

Et tredje alternativ er **datamaskiner med ulike typer av programvare**. Den programvaren som er mest aktuell i vår sammenheng er:

- regneark
- matematisk programvare, for eksempel graftegneprogrammer som *Graf-X-pert*, og såkalte symbolske matematikkprogrammer som *Derive*

Regneark er fleksible i bruk og har stor utbredelse. I regnearket kan vi behandle formler og tabeller, og det er mulighet til å tegne grafer til funksjoner ut fra funksjonstabeller.

Det finnes mye *matematisk programvare*. Vi skal her bare nevne tre slike programmer som eksempler på det som finnes.

Graf-X-pert er et enkelt program som kan være nyttig for å vise grafer til funksjoner. Det kan brukes til å tegne grafer som er gitt ved en formel eller en tabell. *Derive* har en rekke muligheter i tillegg. Programmet kan foreta en rekke numeriske og symbolske beregninger og kan tegne grafer i 2 og 3 dimensjoner. *Derive* er et eksempel på avanserte matematikk-program. Det mest kjente av slike er *Mathematica*. Programmer av denne typen brukes av matematikere til å «gjøre» matematikk. Programmene kan også brukes i undervisningssammenheng, og det er laget flere pedagogiske opplegg for disse programmene.

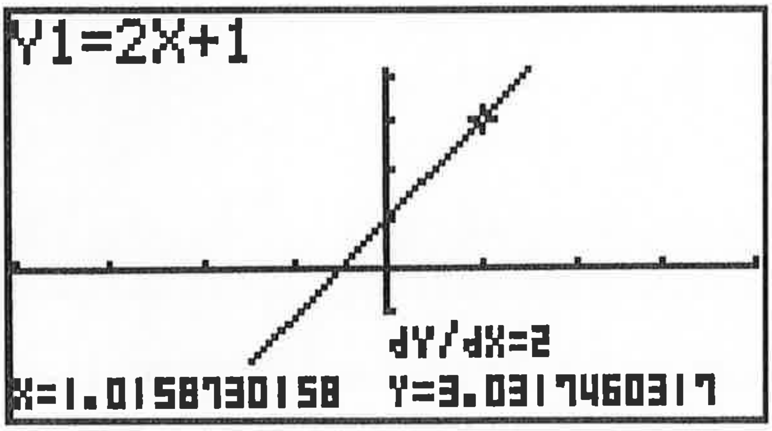
3.1 Hvordan kan teknologien være til hjelp i arbeidet med funksjoner?

Gjennom eksperimentering med lommeregner/datamaskin kan elevene bli fortrolige med flere forhold som gjelder funksjoner.

Grafiske lommeregnere og datamaskiner kan også brukes direkte til å illustrere overgangene som vi har i Janviers matrise. Med utgangspunkt i denne oppstillingen vil vi kort kommentere noen av mulighetene:

3.1.1 Fra graf til tabell

Dersom vi har en graf på skjermen eller i lommeregnervinduet, kan vi bruke den såkalte trace-funksjonen. Vi får da ut en rekke x og y verdier som kan danne grunnlaget for en funksjonstabell. Nedenfor er det vist et typisk vindu til en grafisk lommeregner der trace-funksjonen er slått på:



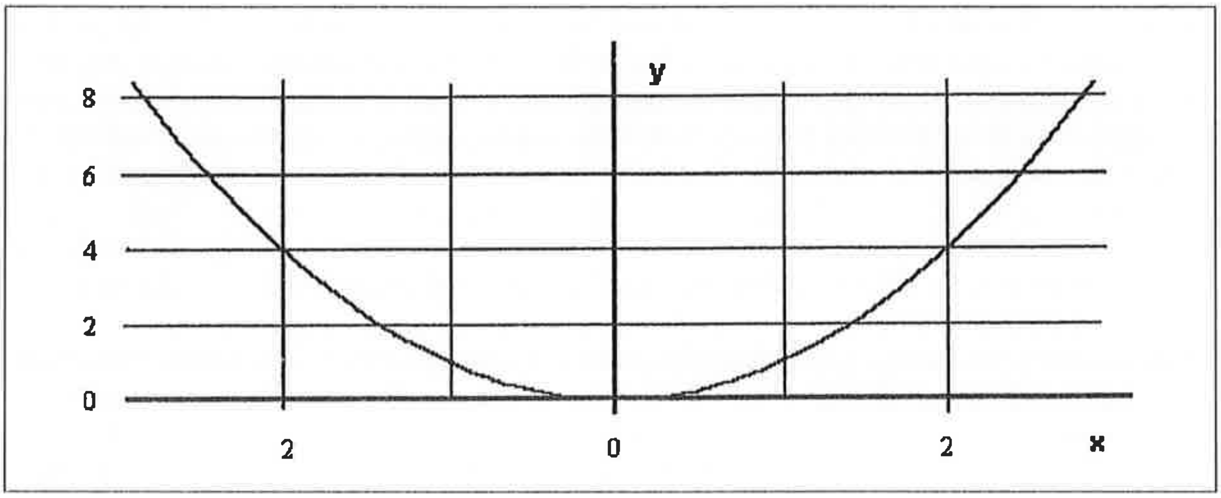
Denne muligheten finnes for grafiske lommeregnere og for matematisk programvare.

På grafiske lommeregnere er det ulemper, for eksempel nøyaktighet (oppløsning på skjermen). Det kan hende at trace-merket ikke treffer heltallige verdier. Dersom læreren er oppmerksom på dette forholdet, kan det danne utgangspunkt for en diskusjon av den grafiske lommeregnerens begrensninger og muligheter.

Dette problemet vil som regel ikke oppstå med datamaskiner, der skjemen har en mye bedre oppløsning.

3.1.2 Fra formel til graf

Med grafiske lommeregnere, regneark eller matematisk programvare er det enkelt å tegne en graf til en funksjon gitt ved en formel. Ved å skrive inn $y = x^2$ kommer raskt følgende graf fram:



Den samme muligheten er også til stede for grafiske lommeregnere.

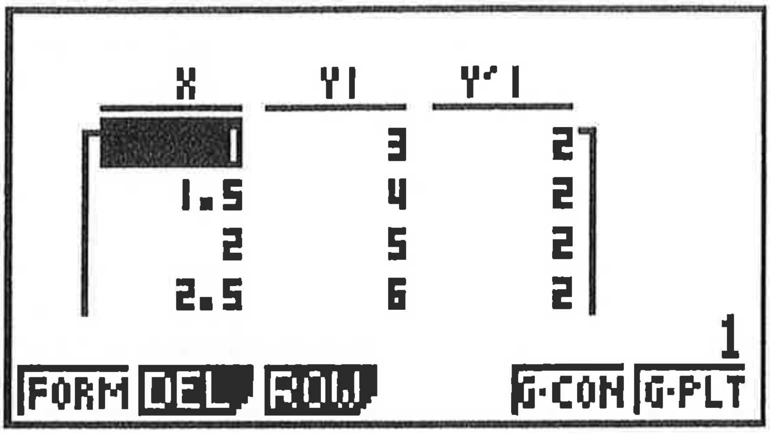
3.1.3 Fra formel til tabell (regneark, lommeregner)

Denne muligheten har en først og fremst i regneark, men også for enkelte grafiske lommeregnere er dette mulig. Denne tabellen viser et enkelt oppsett i regnearket *Excel:*

x	y=x^2-2
-1	-1
-0,8	-1,36
-0,6	-1,64
-0,4	-1,84
-0,2	-1,96
0	-2
0,2	-1,96
0,4	-1,84
0,6	-1,64
0,8	-1,36
1	-1

Hvis tallet -1 står i rute A2, blir formelen i B2 (ruta til høyre): +A2*A2–2.

Nedenfor er det laget en tabell med tabellfunksjonen på lommeregneren ut fra funksjonen gitt i lommeregnervinduet ovenfor *($y = 2x + 1$):*

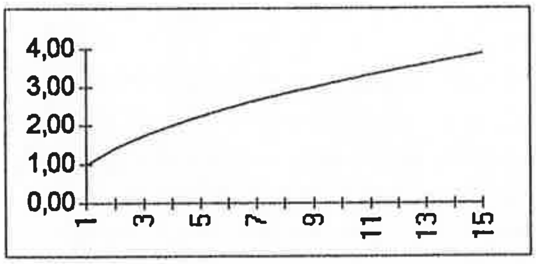


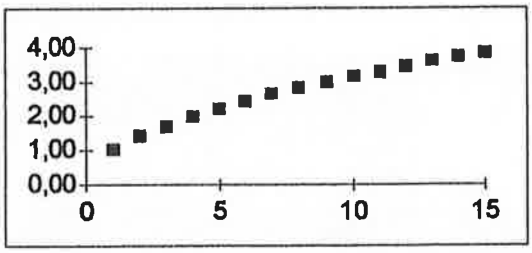
(Vi har her fått med noe mer enn det vi ønsker, den deriverte til y.)

3.1.4 Fra tabell til graf

For å illustrere dette er regneark spesielt godt egnet. Nyere regneark har en rekke muligheter til å framstille tabeller som grafer, som punkter eller sammenhengende kurver:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16





3.2 Bruk av IT-hjelpemidler til å lære matematikk

Funksjonsmaskiner med enkle lommeregnere

I kapittel 2 omtalte vi bruk av regneark som en funksjonsmaskin. Vi vil her se på hvordan vi ved hjelp av en enkel lommeregner også kan lage funksjonsmaskiner.

Nesten alle lommeregnere har muligheten for å bruke konstanter i beregninger. Det betyr at de kan settes opp som «funksjonsmaskiner» – for eksempel en «en-legg-til-5»-maskin eller en «multiplisert-med-3» -maskin.

Noen lommeregnere har en «K»-tast for å lagre konstanten, men de fleste lommeregnere har konstanten innebygd, slik at det krever noe eksperimentering for å finne ut hvordan den virker.

Det følgende er eksempel på en slik inntasting når en bruker en enkel lommeregner:

[+][5][=] setter opp «legg-til-5»: Det vil si at hvis en nå taster

[4][=] blir svaret 9. Videre gir [8][=] svaret 13.

For maskinen ovenfor vil videre gjentatte trykk på [=] gi en tallfølge (hvilken?).

På denne måten kan en generere en rekke tallfølger. Vår hensikt er imidlertid å vise at selv meget enkle lommeregnere kan virke som funksjonsmaskiner, det vil si at ved inntasting av et tall og et tegn, for eksempel [=], kommer det et tall til syne.

En elevoppgave kan være å finne ut regelen som ligger bak.

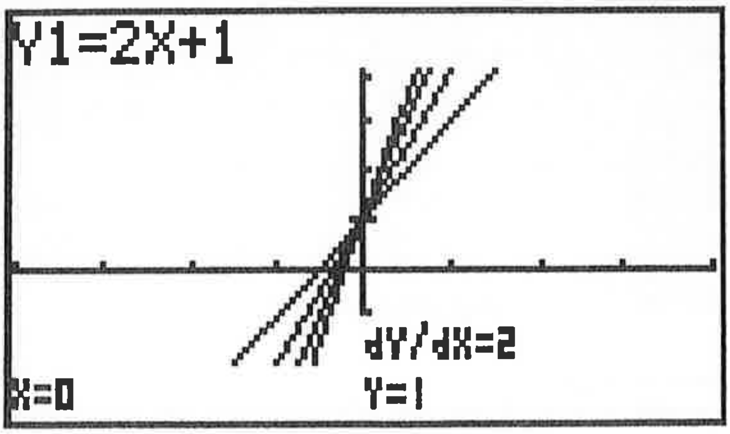
Grafisk lommeregnere har mange flere muligheter. De er svært avanserte funksjonsmaksiner i utgangspunktet og vil nok være mindre hensiktsmessige på lavere klassetrinn.

Å eksperimentere med grafer
Ta utgangspunkt i funksjonsuttrykket

$$f(x) = ax + b$$

Hva skjer når vi endrer verdiene av a og b ? For å utforske dette kan vi bruke flere ulike verktøy. En grafisk lommeregner er godt egnet, og enkelte – for eksempel CASIO CFX-9850G – har et eget menyvalg for å se virkningen av variasjon av konstanter på funksjonsgrafer.

En annen mulighet er å tegne ulike grafer inn i det samme koordinatsystemet. En kan så veksle mellom aktuelle grafer ved å bruke piltastene.



I denne grafiske framstillingen er disse funksjonene tegnet inn:

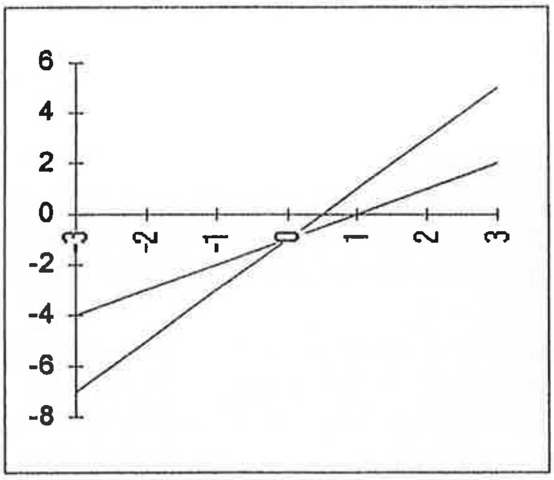
$y1 = 2x + 1$
$y2 = 3x + 1$
$y3 = 4x + 1$
$y4 = 5x + 1$

Ofte vil det være en ulempe at vi ikke får enheter på aksene med (dagens) grafiske lommeregnere. Dette kan imidlertid danne utgangspunkt for diskusjoner, og verdiene er tilgjengelig ved bruk av trace-funksjonen som vist på figuren ovenfor.

I denne sammenhengen vil det imidlertid være en ulempe at den deriverte av funksjonen i gjeldende punkt vises.

Regneark med grafiske muligheter er også godt egnet. Vi kan tegne inn flere funksjoner i det samme diagrammet, og grafen forandrer seg automatisk dersom vi forandrer tabellen som er grunnlaget for grafen.

-3	-7	-4
-2	-5	-3
-1	-3	-2
0	-1	-1
1	1	0
2	3	1
3	5	2



I dette eksemplet ser vi hvordan grafen for to funksjoner framkommer. I regnearket kan vi også få dem ved siden av hverandre – som vist ovenfor – og forandrer vi tabellen, forandres også grafen.

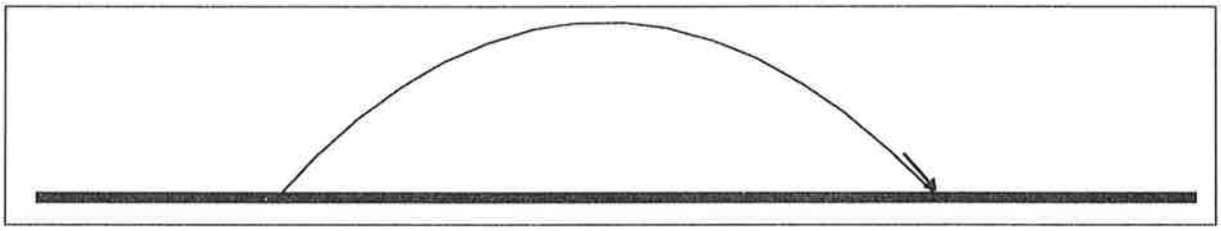
Det vi legger merke til i disse eksemplene, er at verktøyet ikke alltid er like godt egnet til å tegne grafer. For eksempel vil ikke alltid regneark gi grafer på den formen vi ønsker oss. Det som imidlertid kan hevdes, er at elever bør venne seg til de ulike grafiske framstillingene, slik at de kan frigjøre seg noe fra en standard framstillingsform.

Kapittel 4 Undervisningsaktiviteter

4.1 Grafer som «bilder» av situasjoner

Noen elever oppfattter en graf slik at den gir et bilde av situasjon. Et slikt eksempel er at elever vil framstille noe som er «høyt oppe» i virkeligheten, som høyt oppe på grafen. Vi så eksempler på dette i svarene på de diagnostiske oppgavene.

Som aktiviteter for arbeid i grupper kan vi la elevene møte situasjoner hvor det fokuseres på dette forholdet.



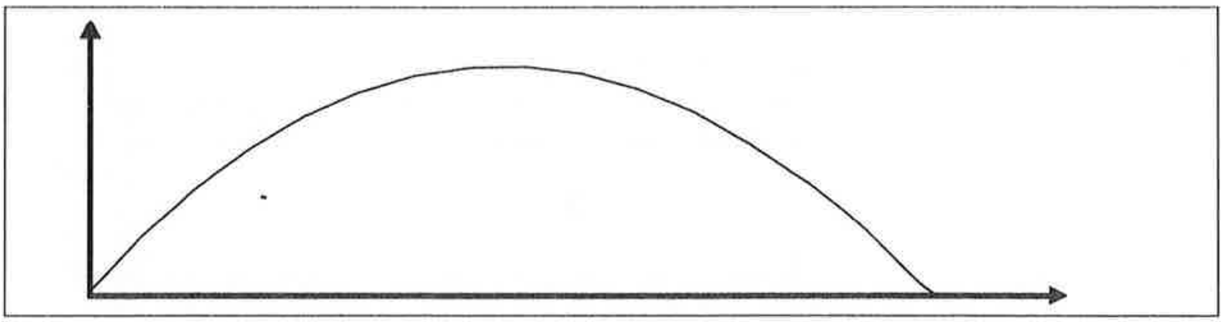
Tegningen viser banen til et spyd i en konkurranse. Hvordan forandrer hastigheten til spydet seg når det flyr gjennom lufta (fra det har forlatt spydkasteren, til det treffer bakken)?

Kommentarer
Ved å lytte til diskusjonen i gruppene vil læreren danne seg et inntrykk av hvordan elevene oppfatter situasjonen. Enkelte elever vil blande sammen hastigheten til spydet og høyden og vil hevde at spydet øker farten den første tida etter at det er kastet av spydkasteren.

Etter en viss tid – omtrent 10 minutter – kan det være nødvendig med en kort diskusjon med hele klassen. Her er ikke poenget å komme med detaljer, men at elevene får en riktig form på grafen. Diskusjonen kan starte med at elever fra to eller tre grupper kan presentere sine grafer på tavla og forklare hvordan de har kommet fram til formen på grafen.

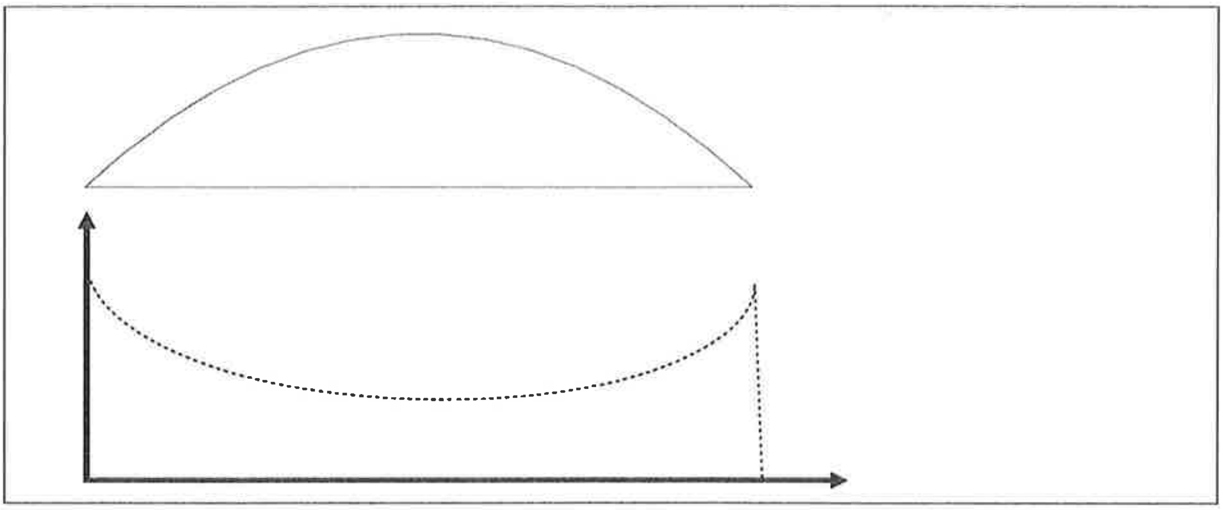
Et annet utgangspunkt vil være å starte med et konkret forslag:

Ole forsøkte å tegne grafen og kom med følgende forslag:



Elevene blir bedt om å kommentere grafen og forklare hvordan Ole kan ha kommet fram til den.

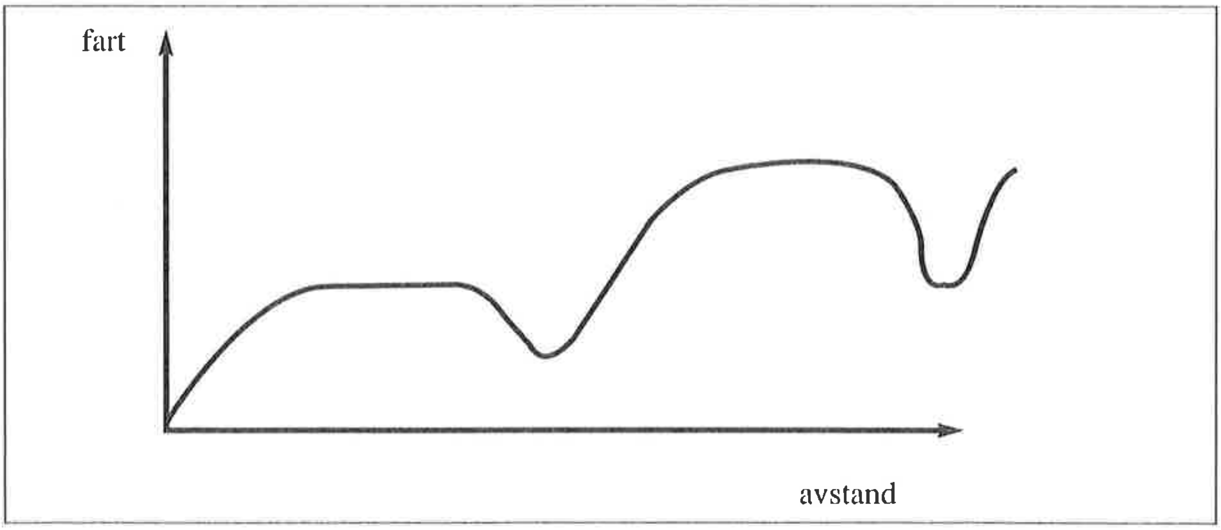
For å avslutte diskusjonen kan det være nyttig å tegne et diagram på tavla som viser spydets bane, sammen med et koordinatsystem der det skal tegnes inn variasjonen i spydets fart:



Læreren kan følge banen til spydet med hånda og be elevene beskrive hva som skjer med farten til spydet. Elevene kan på denne måten følge spydets bevegelse og farten samtidig.

En annen aktivitet som også fokuserer på «grafer som bilder», er at elevene får oppgitt en graf som et bilde og deretter diskuterer hva som kan være situasjonen som beskrives.

Hvilken aktivitet (eller sport) kan være representert ved denne grafen?



Kommentarer
Mange muligheter finnes. For eksempel kan det være en grafisk framstilling av et billøp i en bane hvor føreren må senke hastigheten i svingene. En sving kan for eksempel være krappere enn den andre, slik at hastigheten blir svært lav.

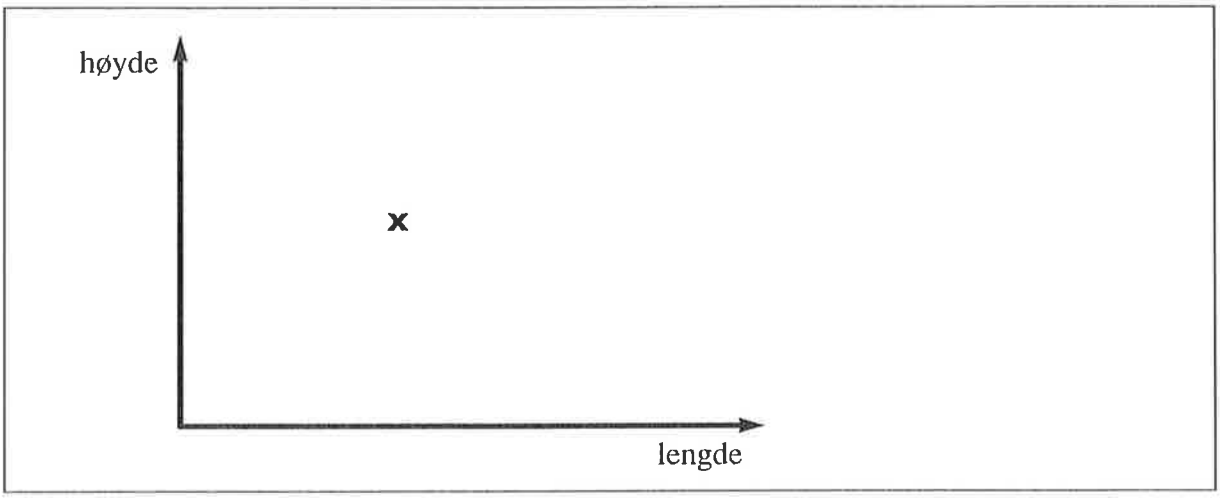
Elevene diskuterer først i grupper, mens læreren går rundt og observerer. Gruppene bør også presentere forslag på tavla som hele klassen kan diskutere.

Det er en fordel å gi oppgaver som kan ha mange forslag til løsninger.

Poenget med disse grafene er ikke at det legges vekt på nøyaktige framstillinger, men at elevene får en følelse av grafens form.

4.2 Å tolke punkter i et koordinatsystem

(A)
Læreren ber hver elev i klassen å forestille seg et rektangel med areal – for eksempel – 24 enheter. Deretter tegner læreren opp et koordinasystem og plasserer inn et punkt, som hun forklarer representerer ett slikt rektangel.



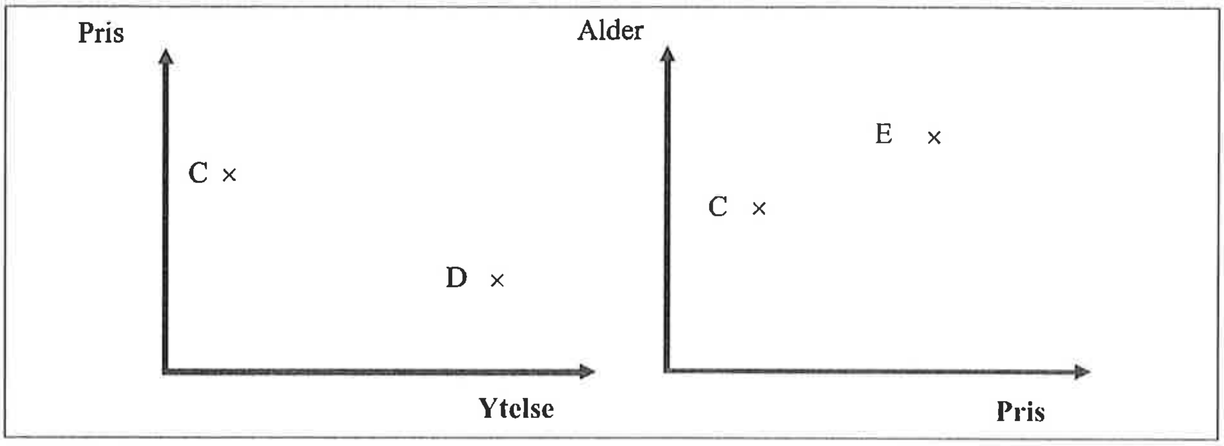
Kommentarer
Læreren ber så elevene fortelle hvor de ville plassere sine forslag, som representerte det rektanglet som de tenkte på. En slik diskusjon kan føre til at elevene ser at alle slike punkter som representerer rektangler med 24 enheter areal, vil ligge på en sammenhengende kurve.

Det er ikke her noe stort poeng at kurven som framkommer, er en hyperbel, men det kan være en diskusjon om hva som skjer med kurven når lengden (eller høyden) blir svært liten.

Denne diskusjonen kan utvides til å gjelde andre geometriske figurer eller egenskaper ved dem.

Tilsvarende kan klassen diskutere hva slags kurve som framkommer hvis vi holder omkretsen til et rektangel konstant. I dette tilfellet kan klassen være med på en diskusjon om hva som skjer når en nærmer seg aksene. En annen videreføring kan være å knytte det grafiske bildet til likningen til en rett linje eller et funksjonsuttrykk.

(B)
I diagrammene nedenfor er det tegnet inn tre datamaskiner som vi har betegnet med bokstavene C, D og E, og disse er plassert to og to inn i koordinatsystemer:

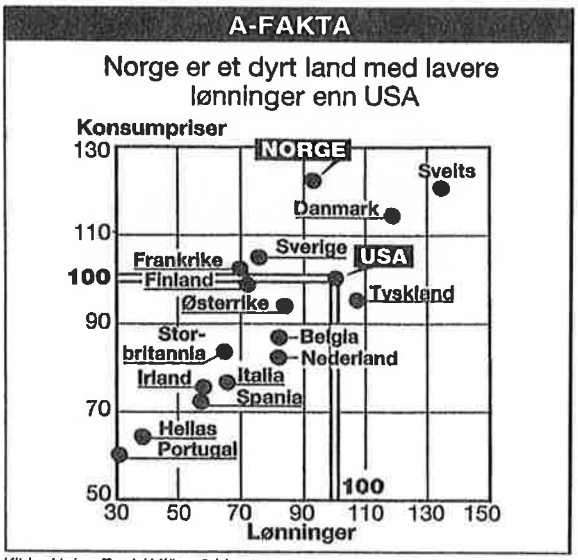


Spørsmål som kan stilles til disse diagrammene:

- Det første diagrammet forteller at datamaskin C var dyrere i innkjøp enn datamaskin D. Hva annet kan du lese ut av diagrammet?
- Hvor ville du tegne punktet som representerer datamaskin E, inn i det første diagrammet?
- Hvor ville du tegne punktet som representerer datamaskin D, inn i det andre diagrammet?

Kommentarer
Siden diagrammene ikke har de samme enhetene på aksene, er det mange muligheter for svar. Hensikten er ikke bare å finne en riktig plassering, men også resonnementet bak plasseringen. Mange elementer kan trekkes inn, for eksempel at eldre datamaskiner som regel har lavere ytelse enn nyere. Dette behøver imidlertid ikke å komme inn i begynnelsen av diskusjonen.

(C) Konsumprisindeks
I diagrammet nedenfor finner du en oppstilling av forholdet mellom konsumprisindeks og lønninger:



Kilde: Union Bank/Affärsvärlden © Aftenposten

Vi kan stille en rekke spørsmål til dette diagrammet og la elevene diskutere i grupper:

- Hva betyr det å ligge høyt på grafen?
- Hva betyr det å ligge langt til høyre?
- Begrunn hvorfor påstanden i overskriften er riktig
- Hvis du bare tok hensyn til de opplysningene som du kan lese ut av diagrammet, hvor burde du bo – i Norge eller i Sveits?
- eller – er Nederland eller Belgia mest gunstig?

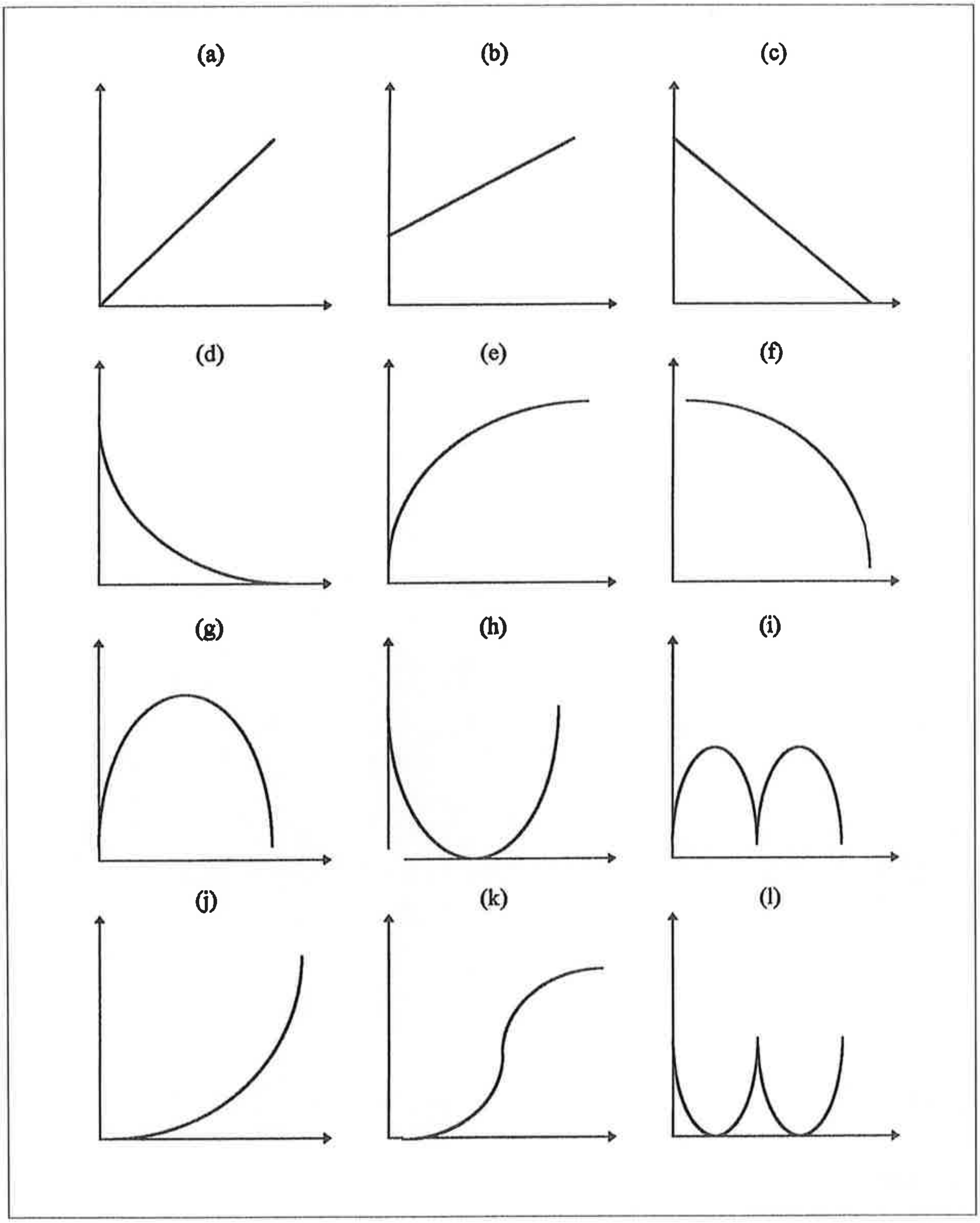
Kommentarer
Diagrammet er et eksempel på hvordan punktdiagrammer brukes til å formidle informasjon i mediene. I enkelte aviser presenteres jevnlig grafer for en aktuell utvikling på et felt. Dette er grafer som læreren kan bruke i undervisningen.

Dette problemet vil klart falle for vanskelig for de lavere klassetrinn, men spesielt på 9. (eller 10.) klassetrinn vil det være gode muligheter for diskusjon omkring forhold som presenteres i diagrammet. Perspektivet kan videre utvides ved at en trekker inn flere elementer som er relevante for den sammenlikningen som vi finner i diagrammet.

4.3 Å finne en graf ut fra en situasjon beskrevet med ord

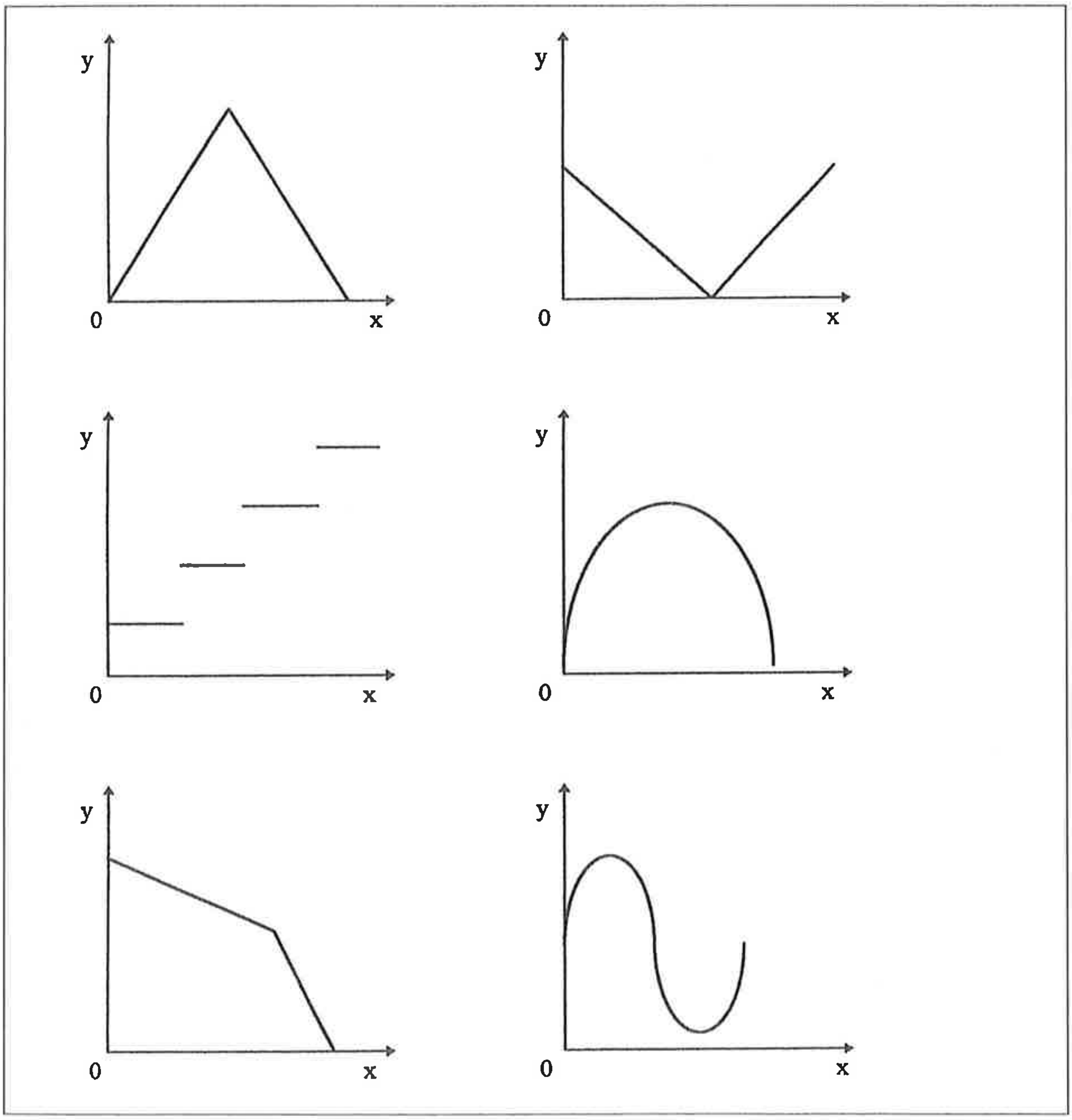
Nedenfor er det gitt noen beskrivelser av situasjoner. Velg den grafen som best beskriver situasjonen. Kopier grafen på et stykke papir, sett enheter på aksene og begrunn dine valg.

1. Nå stiger prisene langsommere enn de har gjort på lenge.
2. Jeg drikker gjerne varm eller kald saft, men lunken saft kan jeg ikke like.
3. Jo større hastighet, desto mer bensin bruker bilen.
4. Jo mer du trener, desto raskere løper du 100 meter.
5. Den raske utviklingen må gå langsommere etter hvert.
6. Jo flere som deltar i oppryddingen, desto kortere tid tar det å bli ferdig.
7. Enhver som mottar ett brev, sender to brev videre.


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)

4.4 Å lage en tabell fra en graf

For hver av grafene nedenfor skal elevene forsøke å lage en tabell over samsvaret mellom y og x.



Kommentarer

Elevene kan her arbeide i par. Det må understrekes at det er viktig å angi enheter på koordinataksene. Det er for øvrig noe som en ikke finner på grafiske lommeregnere. Elevene bør parvis diskutere resultatene de har kommet fram til. De vil kunne oppdage at det ikke er en klar sammenheng mellom graf og tabell. Med ulike enheter på aksene kan tabellene bli svært forskjellige.

En videreføring av denne aktiviteten er også å forsøke å finne situasjoner som blir beskrevet ved hjelp av grafene. Her vil også elevene oppdage hvor viktig det er med nøyaktighet i angivelse av enheter på aksene.

REFERANSER

1 Brekke, G (1995) *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

2 Kerry, T. (1981) The Teacher's role. I Sutton, C. (red) *Communicating in the Classroom.* London: Hodder and Stoughton.

3 Pedersen, V. (1996) *Funksjoner i ungdomsskolen – et abstrakt begrep eller et konkret objekt?* Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk. Universitetet i Oslo.

4 Rasch-Halvorsen, A. (1997) *Funksjoner i grunnskolen. Elevens møte med funksjonsbegrepet.* Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk. Universitetet i Oslo.

5 Shell Centre for Mathematical Education (1985) *The Language of Functions and Graphs.* Manchester: Richard Bates Ltd.

6 Janvier, C. (1978) *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs – Studies and Teaching Experiments.* Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

APPENDIKS 1

Frekvenstabeller FUNKSJONER 5. klasse

OPPG01A Tegn inn hvor mye Ulf kan ha plukket

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	42	8,6
rett svar (event. eget diagr.)	1	395	80,9
trekker kortere enn Ole	11	6	1,2
trekker lengre enn Eva	12	13	2,7
likt med Eva og Ole	13	5	1,0
riktig søyle i feil diagram	14	4	0,8
andre svar	99	23	4,7

OPPG01B Hvem plukket minst i første uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	3	0,6
Ole	1	454	93,0
Anne	11	1	0,2
Per	12	6	1,2
Aud	14	1	0,2
Ulf	15	22	4,5
andre svar	99	1	0,2

OPPG01C Hvem økte mest fra første til andre uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	8	1,6
Eva	1	252	51,6
Aud	11	201	41,2
Anne	12	2	0,4
Ole	13	1	0,2
Per	14	10	2,0
andre svar	99	14	2,9

OPPG02A Liv svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	48	9,8
Liv svarer til punkt 1	1	32	6,6
Liv svarer til punkt 2	2	102	20,9
Liv svarer til punkt 3	3	37	7,6
Liv svarer til punkt 4 (rett)	4	255	52,3
andre svar	99	14	2,9

OPPG02B Gry svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	48	9,8
Gry svarer til punkt 1	1	67	13,7
Gry svarer til punkt 2	2	17	3,5
Gry svarer til punkt 3 (rett)	3	327	67,0
Gry svarer til punkt 4	4	18	3,7
andre svar	99	11	2,3

OPPG02C Ole svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	48	9,8
Ole svarer til punkt 1 (rett)	1	211	43,2
Ole svarer til punkt 2	2	82	16,8
Ole svarer til punkt 3	3	32	6,6
Ole svarer til punkt 4	4	101	20,7
andre svar	99	14	2,9

OPPG02D Hans svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	48	9,8
Hans svarer til punkt 1	1	127	26,0
Hans svarer til punkt 2 (rett)	2	224	45,9
Hans svarer til punkt 3	3	26	5,3
Hans svarer til punkt 4	4	48	9,8
andre svar	99	15	3,1

OPPG03A Når går tog nr. 701 fra Oslo?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	11	2,3
1033 10.33 10,33 e.l.	1	453	92,8
0718 07.18 07,18 e.l.	12	5	1,0
1345 13.45 13,45 e.l.	13	1	0,2
andre svar	99	18	3,7

OPPG03B Når går neste tog fra Hokksund?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	13	2,7
rett svar med tall eller ord	1	395	80,9
1438 14.38 14,38 e.l.	11	3	0,6
1450 e.l.	12	5	1,0
1157 e.l.	13	23	4,7
1131 e.l.	14	9	1,8
1812 e.l.	15	15	3,1
andre svar	99	25	5,1

OPPG04A Hvilke koordinater har punktet B?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	43	8,8
(4,1) "4 1" "x=4 og y=1" e.l.	1	304	62,3
(1,4)	11	103	21,1
4 "x=4" "x er fire" e.l.	12	4	0,8
(1,5)	13	1	0,2
(5,1)	14	2	0,4
5	15	1	0,2
andre svar	99	30	6,1

OPPG04B Skriv A ved punktet (7,4)

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	34	7,0
merker av punktet rett	1	307	62,9
merker av A ved (4,7)	11	103	21,1
andre svar	99	44	9,0

OPPG04C Trekk en rett linje gjennom (7,4) og (1,1)

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	52	10,7
rett svar	1	251	51,4
rett svar men A feil avmerket	2	61	12,5
linje gjennom A og origo	11	26	5,3
linjer fra aksene til A el (1,1)	12	27	5,5
kurve gj. A, (1,1) og origo	13	4	0,8
andre svar	99	67	13,7

OPPG04D Velg et punkt til på linja

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	66	13,5
(3,2) (5,3) "3 2" e.l.	1	191	39,1
korrekt punkt fra feiltr. linje	2	37	7,6
annet korrekt punkt	3	1	0,2
bytter x og y, f.eks. (2,3)	11	57	11,7
ikke på linja, ombyttet x og y	12	65	13,3
ikke på linja, ikke markert	13	3	0,6
ikke på linja, korrekt x og y	14	6	1,2
andre svar	99	62	12,7

OPPG05A Hvor mange har fått nøyaktig 10 poeng?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	15	3,1
6	1	356	73,0
1	11	99	20,3
andre svar	99	18	3,7

OPPG05B Hvor mange har vært med på konkurransen?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	17	3,5
15	1	370	75,8
4	11	8	1,6
5	12	58	11,9
6	13	11	2,3
14	14	4	0,8
16	15	1	0,2
andre svar	99	19	3,9

OPPG05C Hvor mange har fått 10 poeng eller mer?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	20	4,1
13 (3,4 og 6)	1	290	59,4
2	11	6	1,2
3	12	123	25,2
4	13	4	0,8
6	14	6	1,2
7	15	15	3,1
andre svar	99	24	4,9

OPPG06A Hvilke poser har samme vekt?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	49	10,0
C og E	1	211	43,2
A og C	11	207	42,4
Ingen	13	4	0,8
andre svar	99	17	3,5

OPPG06B Hvilke poser koster like mye?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	64	13,1
A og C	1	278	57,0
C og D	11	110	22,5
Ingen	13	3	0,6
andre svar	99	33	6,8

OPPG06C Hvilken pose er mest lønnsom å kjøpe?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	61	12,5
C	1	239	49,0
B	11	178	36,5
B og C	12	3	0,6
andre svar	99	7	1,4

OPPG06D Hvorfor er denne mest lønnsom?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	90	18,4
"C veier mye mer, men er bare litt dyrere" e.l.	1	103	21,1
"C fordi du får mer for pengene" e.l.	2	13	2,7
C fordi den veier mer	11	54	11,1
B laveste punkt, B billigst	12	97	19,9
C er billigst og lettest	14	10	2,0
C er billigst, C koster minst	15	22	4,5
B tyngst og billigst	16	6	1,2
B fordi den veier minst	17	4	0,8
B veier minst og koster mindre	18	21	4,3
andre svar	99	68	13,9

OPPG07A Hva må vi betale for 10 liter bensin?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	55	11,3
100	1	316	64,8
15	11	1	0,2
20	12	10	2,0
25	13	3	0,6
50	14	24	4,9
150	15	28	5,7
200	16	6	1,2
300	17	4	0,8
400	18	3	0,6
andre svar	99	38	7,8

OPPG07B Hvor mye bensin får vi for 150 kroner?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	60	12,3
15 liter (15)	1	304	62,3
5	11	8	1,6
10 10,5	12	33	6,8
20	13	9	1,8
30	14	10	2,0
50	15	13	2,7
80	16	1	0,2
150	17	1	0,2
andre svar	99	49	10,0

OPPG08A Hvor mange grader ble det målt torsdag?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	17	3,5
16	1	436	89,3
15	11	6	1,2
17	12	1	0,2
andre svar	99	28	5,7

OPPG08B Hvilken dag ble det målt 12 grader?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	21	4,3
søndag el S	1	454	93,0
lørdag el L	11	5	1,0
andre svar	99	8	1,6

OPPG09 Hva kan sies om trærne merket A og B?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	83	17,0
"A er høyt og ungt, B er gammelt og lite" e.l.	1	172	35,2
"A vokser fort, B vokser seint" e.l.	2	3	0,6
"A er høyt og B er gammelt"	11	32	6,6
"A er ungt og B er gammelt"	12	10	2,0
referer til koordinater	13	13	2,7
det ene høyt og det andre lavt	14	29	5,9
bildemessig forklaring	15	71	14,5
"A er gammelt og høyt, B er ungt og lavt" e.l.	16	8	1,6
"A er gammelt og lavt", "B er ungt og høyt" e.l.	17	3	0,6
"A er gammelt og B er høyt"	18	1	0,2
andre svar	99	63	12,9

Frekvenstabeller FUNKSJONER 7. klasse

OPPG01A Tegn inn hvor mye Ulf kan ha plukket

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	42	8,6
rett svar (event. eget diagr.)	1	418	86,0
trekker kortere enn Ole	11	11	2,3
trekker lengre enn Eva	12	3	0,6
likt med Eva og Ole	13	3	0,6
riktig søyle i feil diagram	14	4	0,8
andre svar	99	5	1,0

OPPG01B Hvem plukket minst i første uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	1	0,2
Ole	1	457	94,0
Per	12	5	1,0
Aud	14	2	0,4
Ulf	15	20	4,1
andre svar	99	1	0,2

OPPG01C Hvem økte mest fra første til andre uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	5	1,0
Eva	1	337	69,3
Aud	11	126	25,9
Anne	12	2	0,4
Ole	13	1	0,2
Per	14	2	0,4
andre svar	99	13	2,7

OPPG02A Liv svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	33	6,8
Liv svarer til punkt 1	1	31	6,4
Liv svarer til punkt 2	2	94	19,3
Liv svarer til punkt 3	3	28	5,8
Liv svarer til punkt 4 (rett)	4	295	60,7
andre svar	99	5	1,0

OPPG02B Gry svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	35	7,2
Gry svarer til punkt 1	1	34	7,0
Gry svarer til punkt 2	2	7	1,4
Gry svarer til punkt 3 (rett)	3	386	79,4
Gry svarer til punkt 4	4	20	4,1
andre svar	99	4	0,8

OPPG02C Ole svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	35	7,2
Ole svarer til punkt 1 (rett)	1	238	49,0
Ole svarer til punkt 2	2	86	17,7
Ole svarer til punkt 3	3	18	3,7
Ole svarer til punkt 4	4	105	21,6
andre svar	99	4	0,8

OPPG02D Hans svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	36	7,4
Hans svarer til punkt 1	1	147	30,2
Hans svarer til punkt 2 (rett)	2	259	53,3
Hans svarer til punkt 3	3	14	2,9
Hans svarer til punkt 4	4	25	5,1
andre svar	99	5	1,0

OPPG03A Når går tog nr. 701 fra Oslo?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	6	1,2
1033 10.33 10,33 e.l.	1	465	95,7
0718 07.18 07,18 e.l.	12	3	0,6
1345 13.45 13,45 e.l.	13	4	0,8
andre svar	99	8	1,6

OPPG03B Når går neste tog fra Hokksund?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	16	3,3
rett svar med tall eller ord	1	405	83,3
1438 14.38 14,38 e.l.	11	2	0,4
1450 e.l.	12	3	0,6
1157 e.l.	13	25	5,1
1131 e.l.	14	7	1,4
1812 e.l.	15	14	2,9
andre svar	99	14	2,9

OPPG04A Hvilke koordinater har punktet B?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	52	10,7
(4,1) "4 1" "x=4 og y=1" e.l.	1	363	74,7
(1,4)	11	49	10,1
4 "x=4" "x er fire" e.l.	12	5	1,0
(1,5)	13	1	0,2
(5,1)	14	1	0,2
andre svar	99	15	3,1

OPPG04B Skriv A ved punktet (7,4)

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	34	7,0
merker av punktet rett	1	375	77,2
merker av A ved (4,7)	11	58	11,9
andre svar	99	19	3,9

OPPG04C Trekk en rett linje gjennom (7,4) og (1,1)

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	41	8,4
rett svar	1	326	67,1
rett svar men A feil avmerket	2	45	9,3
linje gjennom A og origo	11	18	3,7
linjer fra aksene til A el (1,1)	12	14	2,9
kurve gj. A, (1,1) og origo	13	3	0,6
andre svar	99	39	8,0

OPPG04D Velg et punkt til som ligger på linja

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	58	11,9
(3,2) (5,3) "3 2" e.l.	1	290	59,7
korrekt punkt fra feiltr. linje	2	23	4,7
annet korrekt punkt	3	2	0,4
bytter x og y, f.eks. (2,3)	11	31	6,4
ikke på linja, ombyttet x og y	12	11	2,3
ikke på linja, ikke markert	13	13	2,7
ikke på linja, korrekt x og y	14	27	5,6
andre svar	99	31	6,4

OPPG05A Hvor mange har fått nøyaktig 10 poeng?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	13	2,7
6	1	404	83,1
1	11	60	12,3
2	12	1	0,2
andre svar	99	8	1,6

OPPG05B Hvor mange har vært med på konkurransen?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	14	2,9
15	1	415	85,4
4	11	1	0,2
5	12	38	7,8
6	13	2	0,4
14	14	1	0,2
16	15	3	0,6
andre svar	99	12	2,5

OPPG05C Hvor mange har fått 10 poeng eller mer?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	15	3,1
13 (3,4 og 6)	1	362	74,5
2	11	4	0,8
3	12	66	13,6
4	13	2	0,4
6	14	3	0,6
7	15	15	3,1
10	16	1	0,2
andre svar	99	18	3,7

OPPG06A Hvilke poser har samme vekt?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	37	7,6
C og E	1	264	54,3
A og C	11	165	34,0
svarer med én bokstav, C el E	12	2	0,4
andre svar	99	18	3,7

OPPG06B Hvilke poser koster like mye?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	43	8,8
A og C	1	331	68,1
C og D	11	87	17,9
svarer med én bokstav, A el C	12	2	0,4
ingen	13	3	0,6
andre svar	99	20	4,1

OPPG06C Hvilken pose er mest lønnsom å kjøpe?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	44	9,1
C	1	314	64,6
B	11	121	24,9
B og C	12	4	0,8
andre svar	99	3	0,6

OPPG06D Hvorfor er denne mest lønnsom?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	63	13,0
"C veier mye mer, men er bare litt dyrere" e.l.	1	190	39,1
"C fordi du får mer for pengene" e.l.	2	28	5,8
C fordi den veier mer	11	69	14,2
B laveste punkt, B billigst	12	72	14,8
kan ikke avgjøres	13	1	0,2
C er billigst, C koster minst	15	2	0,4
B tyngst og billigst	16	8	1,6
B fordi den veier minst	17	3	0,6
B veier minst og koster mindre	18	25	5,1
andre svar	99	25	5,1

OPPG06E Hvilke to poser vil være like lønnsomme?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	101	20,8
B og D	1	25	5,1
A og B	11	24	4,9
A og C	12	139	28,6
A og D	13	7	1,4
A og E	14	8	1,6
A og F	15	4	0,8
B og C	16	11	2,3
B og E	17	8	1,6
C og D	18	85	17,5
C og E	19	24	4,9
C og F	20	5	1,0
E og F	21	13	2,7
ingen er like lønnsomme	23	2	0,4
andre svar	99	30	6,2

OPPG06F Hvorfor er disse to like lønnsomme?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	133	27,4
gyldig begrunnelse	1	12	2,5
riktig svar på 6e, argument med bare én av de variable	11	5	1,0
feil svar på 6e, men proporsjonalitetstenking	12	49	10,1
feil svar på 6e, C og D fordi D er litt dyrere og koster litt mer enn C, eller tilsvarende for A og F eller B og E	13	18	3,7
feil svar på 6e, C og D fordi de veier mye og koster lite, el tilsv for A og F, B og E	14	22	4,5
samme pris og samme vekt	15	72	14,8
samme pris	16	59	12,1
samme vekt	17	32	6,6
andre svar	99	84	17,3

OPPG07A Hva må vi betale for 10 liter bensin?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	33	6,8
100	1	395	81,3
15	11	1	0,2
20	12	1	0,2
25	13	2	0,4
50	14	16	3,3
150	15	23	4,7
400	18	1	0,2
andre svar	99	14	2,9

OPPG07B Hvor mye bensin får vi for 150 kr?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	38	7,8
15	1	386	79,4
5	11	1	0,2
10 10,5	12	27	5,6
30	14	3	0,6
50	15	3	0,6
80	16	1	0,2
150	17	10	2,1
200	18	2	0,4
andre svar	99	15	3,1

OPPG08A Hvor mange grader ble det målt torsdag?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	9	1,9
16	1	449	92,4
15	11	4	0,8
17	12	4	0,8
andre svar	99	20	4,1

OPPG08B Hvilken dag ble det målt 12 grader?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	9	1,9
søndag eller S	1	470	96,7
lørdag eller L	11	2	0,4
andre svar	99	5	1,0

OPPG08C H7vilket av diagrammene viser målingene best?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	11	2,3
A	1	387	79,6
B	11	80	16,5
begge viser like bra	12	5	1,0
andre svar	99	3	0,6

OPPG08D Begrunn svaret i c

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	47	9,7
"A er best fordi vi bare har gjort én måling per dag" e.l.	1	12	2,5
velger A fordi det andre er vanskeligere å lese av, i A ser vi forskjellen best	11	257	52,9
A er bedre fordi det er rette søyler, markeringen er tydelig, linjer går helt ned	12	67	13,8
fordi begge er like bra	13	5	1,0
B er best fordi her ser vi om temp. øker eller minsker	14	51	10,5
B er tydeligere, det viser forskjellen fra dag til dag, men A er enklere å lese av	15	9	1,9
andre svar	99	38	7,8

OPPG09 Hva kan sies om trærne merket A og B?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	60	12,3
"A er høyt og ungt, B er gammelt og lite" e.l.	1	241	49,6
"A vokser fort, B vokser seint" e.l.	2	14	2,9
"A er høyt og B er gammelt"	11	27	5,6
"A er ungt og B er gammelt"	12	6	1,2
referer til koordinater	13	1	0,2
det ene høyt og det andre lavt	14	13	2,7
bildemessig forklaring	15	64	13,2
"A er gammelt og høyt, B er ungt og lavt" e.l.	16	10	2,1
"A er gammelt og lavt", "B er ungt og høyt" e.l.	17	3	0,6
andre svar	99	47	9,7

OPPG10A Hvor mye hadde Helga i tanken etter 120 km?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	30	6,2
10 (9-11)	1	372	76,5
5 - 6	11	11	2,3
7 - 8,5	12	26	5,3
12 - 13	13	4	0,8
15 15,5	14	6	1,2
17 17,5	15	8	1,6
20	16	1	0,2
25	17	3	0,6
27 el 27,5	18	15	3,1
andre svar	99	10	2,1

OPPG10B Hvor hadde Helga mindre enn 10 liter?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	47	9,7
120 - 200 (121-200)	1	135	27,8
100 - 200	11	10	2,1
110 - 200	12	3	0,6
130 - 200	13	8	1,6
140 - 200	14	30	6,2
et tall i intervallet 120-200	15	8	1,6
flere tall i interv. 120-200	16	9	1,9
120, "Etter 120" e.l.	17	10	2,1
200	18	175	36,0
"Den første strekningen", "Fra start til 200 km" e.l.	19	10	2,1
125 - 200, 125 - 195	20	8	1,6
andre svar	99	33	6,8

OPPG10C Hvor mange bensinstasjoner stoppet Helga på?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	46	9,5
2	1	283	58,2
3	11	82	16,9
4	12	30	6,2
5	13	16	3,3
6	14	17	3,5
7	15	6	1,2
andre svar	99	6	1,2

OPPG10D Begrunn svaret i c

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	126	25,9
akseptabel forklaring	1	227	46,7
gjentar bare rett svar	11	37	7,6
tre skråstreker e.l.	12	13	2,7
"Fordi det ses på diagrammet"	13	14	2,9
refererer til antall stopp	14	18	3,7
andre svar	99	51	10,5

OPPG10E Hvor kjøpte Helga mest bensin?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	55	11,3
200	1	253	52,1
220 lengre, 240 lengre	12	5	1,0
400	13	6	1,2
410	14	3	0,6
420	15	29	6,0
430	16	10	2,1
440	17	79	16,3
450	18	17	3,5
460	19	2	0,4
520	20	1	0,2
andre svar	99	26	5,3

OPPG10F Begrunn svaret i e

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	144	29,6
akseptabel forklaring, svaret regnes ut	1	53	10,9
lengst strek oppover ved 200 km e.l.	2	121	24,9
refererer til det høyeste punktet på grafen	11	62	12,8
"Den andre fordi det er den lengste skråstreken"	12	1	0,2
"Ser det av diagrammet"	13	30	6,2
fordi det er 20 km mellom hver rute	14	4	0,8
ved 200 km ble tanken fylt til 30l el streken går rett opp	15	10	2,1
diagrammet stopper da	16	1	0,2
andre svar	99	60	12,3

OPPG11A Tegn inn hvordan temperaturen forandrer seg

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	50	10,3
avmerker de fem punktene rett i diagr. (event. med søyler)	1	35	7,2
avmerker de fire punktene fra tabellen rett	11	270	55,6
avmerker de fire punktene fra tab. rett, men feil utg.pkt.	12	41	8,4
avmerker to eller tre punkter fra tabellen rett	13	35	7,2
avmerker (10,5), (16,10) e.l.	14	18	3,7
andre svar	99	37	7,6

OPPG11B Temperaturforandring fra 25 til 30 minutter

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	95	19,5
viser gradvis mindre temperaturøkning for hele tidsrommet	1	92	18,9
viser jevn temperatur	11	14	2,9
viser avtagende temperatur	12	9	1,9
viser økende temperatur, ikke gradvis mindre temp.økning	13	250	51,4
andre svar	99	26	5,3

Frekvenstabeller FUNKSJONER 9. klasse

OPPG01A Tegn inn hvor mye Ulf kan ha plukket

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	31	6,6
rett svar (event. eget diagr.)	1	424	90,0
trekker kortere enn Ole	11	7	1,5
trekker lengre enn Eva	12	3	0,6
likt med Eva og Ole	13	3	0,6
riktig søyle i feil diagram	14	1	0,2
andre svar	99	2	0,4

OPPG01B Hvem plukket minst i første uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	1	0,2
Ole	1	450	95,5
Per	12	3	0,6
Eva	13	1	0,2
Ulf	15	15	3,2
andre svar	99	1	0,2

OPPG01C Hvem økte mest fra første til andre uke?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	2	0,4
Eva	1	388	82,4
Aud	11	73	15,5
Anne	12	1	0,2
Ole	13	3	0,6
Per	14	3	0,6
andre svar	99	1	0,2

OPPG02A Liv svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	12	2,5
Liv svarer til punkt 1	1	14	3,0
Liv svarer til punkt 2	2	47	10,0
Liv svarer til punkt 3	3	14	3,0
Liv svarer til punkt 4 (rett)	4	380	80,7
andre svar	99	4	0,8

OPPG02B Gry svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	12	2,5
Gry svarer til punkt 1	1	22	4,7
Gry svarer til punkt 2	2	7	1,5
Gry svarer til punkt 3 (rett)	3	418	88,7
Gry svarer til punkt 4	4	8	1,7
andre svar	99	4	0,8

OPPG02C Ole svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	12	2,5
Ole svarer til punkt 1 (rett)	1	314	66,7
Ole svarer til punkt 2	2	80	17,0
Ole svarer til punkt 3	3	10	2,1
Ole svarer til punkt 4	4	51	10,8
andre svar	99	4	0,8

OPPG02D Hans svarer til punktet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	12	2,5
Hans svarer til punkt 1	1	106	22,5
Hans svarer til punkt 2 (rett)	2	320	67,9
Hans svarer til punkt 3	3	13	2,8
Hans svarer til punkt 4	4	16	3,4
Anre svar	99	4	0,8

OPPG03A Når går tog nr. 701 fra Oslo?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	3	0,6
1033 10.33 10,33 e.l.	1	455	96,6
10.33-10.43 (hele mellomrommet)	11	1	0,2
0718 07.18 07,18 e.l.	12	5	1,1
1345 13.45 13,45 e.l.	13	2	0,4
andre svar	99	5	1,1

OPPG03B Når må Anne seinest reise fra Drammen?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	7	1,5
1425 14.25 14,25 e.l.	1	389	82,6
757 7.57 e.l.	11	12	2,5
1114 11.14 e.l.	12	11	2,3
1345 13.45 e.l.	13	2	0,4
1410 14.10 e.l.	14	6	1,3
1508 15,08 e.l.	15	1	0,2
1515 15.15 e.l.	16	3	0,6
1620 16.20 e.l.	17	8	1,7
1653 16.53 e.l.	18	1	0,2
1759 17.59 e.l.	19	11	2,3
1838 18.38 e.l.	20	1	0,2
andre svar	99	19	4,0

OPPG04 Skriv et uttrykk for hva festen koster

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	95	20,2
45x+350 el 45·x+350	1	213	45,2
45x el 45·x	11	59	12,5
350x+45 x+45 e.l.	12	5	1,1
andre feilaktige uttrykk	13	48	10,2
x·y y/x	14	2	0,4
skriver riktig svar, men setter inn tall for x	15	3	0,6
395 el 395 kr el 350+45 e.l.	16	8	1,7
andre tallsvar med 45 el 350	17	6	1,3
andre svar	99	32	6,8

OPPG05A Hvor mye hadde Helga i tanken etter 120 km?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	5	1,1
10 (9-11)	1	417	88,5
5 - 6	11	5	1,1
7 - 8,5	12	24	5,1
12 - 13	13	5	1,1
15 15,5	14	1	0,2
17 17,5	15	1	0,2
27 el 27,5	18	2	0,4
andre svar	99	11	2,3

OPPG05B Hvor hadde Helga mindre enn 10 liter?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	13	2,8
120 - 200 (121 - 200)	1	234	49,7
100 - 200	11	9	1,9
110 - 200	12	14	3,0
130 - 200	13	11	2,3
140 - 200	14	29	6,2
et tall i intervallet 120-200	15	12	2,5
flere tall i interv. 120-200	16	4	0,8
120, "Etter 120" e.l.	17	4	0,8
200	18	92	19,5
"Den første strekningen", "Fra start til 200 km" e.l.	19	12	2,5
125 - 200, 125 - 195	20	6	1,3
andre svar	99	31	6,6

OPPG05C Hvor mange bensinstasjoner stoppet Helga på?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	9	1,9
2	1	380	80,7
3	11	55	11,7
4	12	11	2,3
5	13	8	1,7
6	14	3	0,6
7	15	2	0,4
andre svar	99	3	0,6

OPPG05D Begrunn svaret i c

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	40	8,5
akseptabel forklaring	1	319	67,7
gjentar bare rett svar	11	29	6,2
tre skråstreker e.l.	12	17	3,6
"Fordi det ses på diagrammet"	13	13	2,8
refererer til antall stopp	14	8	1,7
andre svar	99	45	9,6

OPPG05E Hvor kjøpte Helga mest bensin?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	13	2,8
200	1	347	73,7
220 lengre, 240 lengre	12	2	0,4
420	15	14	3,0
430	16	3	0,6
440	17	69	14,6
450	18	7	1,5
460	19	1	0,2
andre svar	99	15	3,2

OPPG05F Begrunn svaret i e

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	58	12,3
akseptabel forklaring, svaret regnes ut	1	104	22,1
lengst strek oppover ved 200 km e.l.	2	163	34,6
refererer til det høyeste punktet på grafen	11	54	11,5
"Den andre fordi det er den lengste skråstreken"	12	1	0,2
"Ser det av diagrammet"	13	11	2,3
fordi det er 20 km mellom hver rute	14	1	0,2
ved 200 km ble tanken fylt til 30l el streken går rett opp	15	23	4,9
diagrammet stopper da	16	1	0,2
andre svar	99	55	11,7

OPPG06A Hvilke poser har samme vekt?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	11	2,3
C og E	1	335	71,1
A og C	11	109	23,1
svarer med én bokstav, C el E	12	1	0,2
ingen	13	3	0,6
andre svar	99	12	2,5

OPPG06B Hvilke poser koster like mye?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	15	3,2
A og C	1	378	80,3
C og D	11	66	14,0
ingen	13	4	0,8
andre svar	99	8	1,7

OPPG06C Hvilken pose er mest lønnsom å kjøpe?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	14	3,0
C	1	370	78,6
B	11	79	16,8
B og C	12	3	0,6
andre svar	99	5	1,1

OPPG06D Hvorfor er denne mest lønnsom?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	35	7,4
"C veier mye mer, men er bare litt dyrere" e.l.	1	217	46,1
"C fordi du får mer for pengene" e.l.	2	74	15,7
C fordi den veier mer	11	42	8,9
B laveste punkt, B billigst	12	40	8,5
C er billigst og lettest	14	2	0,4
C er billigst, C koster minst	15	1	0,2
B tyngst og billigst	16	6	1,3
B fordi den veier minst	17	2	0,4
B veier minst og koster mindre	18	8	1,7
andre svar	99	44	9,3

OPPG06E Hvilke to poser vil være like lønnsomme?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	83	17,6
B og D	1	62	13,2
A og B	11	20	4,2
A og C	12	79	16,8
A og D	13	11	2,3
A og E	14	11	2,3
A og F	15	4	0,8
B og C	16	14	3,0
B og E	17	16	3,4
C og D	18	95	20,2
C og E	19	15	3,2
C og F	20	7	1,5
E og F	21	12	2,5
ingen er like lønnsomme	23	2	0,4
andre svar	99	40	8,5

OPPG06F Hvorfor er disse to like lønnsomme?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	126	26,8
gyldig begrunnelse	1	49	10,4
riktig svar på 6e, argument med bare én av de variable	11	1	0,2
feil svar på 6e, men proporsjonalitetstenking	12	34	7,2
feil svar på 6e, C og D fordi D er litt dyrere og koster litt mer enn C, eller tilsvarende for A og F eller B og E	13	39	8,3
feil svar på 6e, C og D fordi de veier mye og koster lite, el tilsv for A og F, B og E	14	14	3,0
samme pris og samme vekt	15	44	9,3
samme pris	16	34	7,2
samme vekt	17	14	3,0
andre svar	99	116	24,6

OPPG07A Tegn grafen y = 2x + 1

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	68	14,4
tegner grafen uten punkter	1	43	9,1
tegner grafen med punkter	2	96	20,4
angir noen punkter riktig, men trekker ikke opp grafen	11	8	1,7
tegner en linje gjennom (1,0) med stigningskoeffisient 2	12	3	0,6
trekker andre ukorrekte linjer	13	36	7,6
tegner en linje gjennom origo	14	45	9,6
tegner koordinatpunkter vha. loddrette/vannrette linjer	15	15	3,2
tegner en linje gjennom (1,0) med stigningskoeffisient	16	3	0,6
angir (2,1) som svar	17	73	15,5
angir (1,2) som svar	18	8	1,7
andre svar	99	73	15,5

OPPG07B Tegn grafen y = 3

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	99	21,0
tegner grafen uten punkter	1	28	5,9
tegner grafen med punkter	2	28	5,9
tegner noen punkter riktig, men ikke bare (0,3)	11	15	3,2
tegner feil graf gjennom (0,3)	12	20	4,2
trekker andre ukorrekte linjer	13	17	3,6
tegner en linje gjennom origo	14	57	12,1
tegner koordinatpunkter vha. loddrette/vannrette linjer	15	12	2,5
angir (0,3) som svar	16	144	30,6
angir (3,0) som svar	17	6	1,3
andre svar	99	45	9,6

OPPG07C Tegn grafen y + x - 4 = 0

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	223	47,3
tegner grafen uten punkter	1	16	3,4
tegner grafen med punkter	2	40	8,5
trekker annen ukorrekt linje	12	18	3,8
tegner feil graf gjennom (0,4)	13	6	1,3
tegner en linje gjennom origo	14	31	6,6
tegner koordinatpunkter vha. loddrette/vannrette linjer	15	2	0,4
angir (0,0) som svar	16	55	11,7
angir (0,4) som svar	17	6	1,3
angir (4,0) som svar	18	9	1,9
angir (2,2) som svar	19	4	0,8
andre svar	99	61	13,0

OPPG08 Hva kan sies om trærne merket A og B?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	42	8,9
"A er høyt og ungt, B er gammelt og lite" e.l.	1	287	60,9
"A vokser fort, B vokser seint" e.l.	2	12	2,5
"A er høyt og B er gammelt"	11	11	2,3
"A er ungt og B er gammelt"	12	3	0,6
referer til koordinater	13	1	0,2
det ene høyt og det andre lavt	14	13	2,8
bildemessig forklaring	15	36	7,6
"A er gammelt og høyt, B er ungt og lavt" e.l.	16	8	1,7
"A er gammelt og B er høyt"	18	1	0,2
andre svar	99	57	12,1

OPPG09 Tegn en graf som viser farten under løpet

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	25	5,3
rett framstilling, rett form, avslutter etter 400 m med en synkende kurve	1	15	3,2
rett framstilling, rett form, avslutter etter 400 m	2	135	28,7
rett framstilling, rett form, avslutter etter 400 m med en stigende kurve	3	49	10,4
rett framstilling, rett form, avslutter med loddrett strek	4	25	5,3
rett form, men starter ikke i origo	11	57	12,1
rett form, men ikke hastighetsendring ved 200	12	31	6,6
starter ikke i origo, ikke hastighetsendring ved 200, ellers rett form	13	21	4,5
feil avslutning, ellers rett	14	8	1,7
feil start og avslutning, ellers rett form	15	6	1,3
jevnt stigende kurve	16	18	3,8
andre svar	99	81	17,2

OPPG10 Hvilke formler passer til tabellen?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	89	18,9
$y = x + 7$ og $x - y + 7 = 0$	1	88	18,7
$y = x + 7$	2	100	21,2
$x - y + 7 = 0$	3	12	2,5
to svar, en rett og en feil	11	74	15,7
tre svar, to av dem rett	12	18	3,8
$y = 8x$	13	26	5,5
$y = x^2 + 7$	14	9	1,9
to svar, begge feil	15	12	2,5
andre svar	99	43	9,1

OPPG11 Fortelling som passer til $y = 25x + 20$

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	127	27,0
akseptabel fortelling med penger som kontekst	1	166	35,2
akseptabel fortelling med annen kontekst enn penger	2	1	0,2
akseptabel fortelling med urealistisk kontekst	3	9	1,9
akseptabel fortelling med ombytting av k og x	4	9	1,9
setter inn verdier for x og regner ut verdier for y (både rett og galt)	11	4	0,8
ufullstendig fortelling	12	53	11,3
fortelling til $y = 20x+25$	13	1	0,2
fortelling til $y = 25x+20x$	14	8	1,7
fortelling til andre formler	16	25	5,3
andre svar	99	68	14,4

OPPG12A Hva er koordinatene til punktet P?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	42	8,9
(120,2)	1	398	84,5
(120,60)	11	1	0,2
(4,2)	12	4	0,8
(60,120)	13	18	3,8
to svar, ett av dem rett	14	3	0,6
andre svar	99	5	1,1

OPPG12B Hvilket uttrykk passer til linja l?

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	80	17,0
$m = s/60$	1	93	19,7
$m = s/2$	11	62	13,2
$m = s$	12	48	10,2
$m = 60s$	13	103	21,9
$4m = 180s$	14	63	13,4
andre svar	99	22	4,7

OPPG13A Beste graf for avkjøling av kaffe

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	78	16,6
f	1	190	40,3
e	11	16	3,4
d	12	30	6,4
h	13	38	8,1
a	14	40	8,5
b, c, g eller i	15	53	11,3
gir to grafer, h og f	18	2	0,4
a og f (ser på tabellen som todelt)	19	2	0,4
andre svar	99	22	4,7

OPPG13B Beste graf for antall fugler på en vulkanøy

SVAR	KODE	FREKVENS	PROSENT
ubesvart	0	84	17,8
i	1	245	52,0
g	11	18	3,8
a	12	15	3,2
b	13	18	3,8
c	14	26	5,5
d, e, f eller h	15	38	8,1
gir to grafer, g og i	16	1	0,2
gir to grafer, en stigende og i	18	1	0,2
andre svar	99	25	5,3