Bokmål

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Veiledning til geometri

F og I

Læringssenteret
2001

1·04
Akademika
120.00

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Gunnar Gjone
Guri A. Nortvedt

Veiledning til geometri

F og I

© Læringssenteret (LS) 2001

Trykk: GAN Grafisk AS

ISBN 82-486-0903-0

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo og Telemarksforsking-Notodden har etter oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet utarbeidet de diagnostiske oppgavene med veiledningsmateriell.

Forord

Dette veiledningsheftet er skrevet av Gunnar Gjone og Guri A. Nortvedt som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden (TFN) og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS). Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen og har flere formål:

- Utvikle en integrert prøve- og etterutdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.
- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan danne utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor deler av faget.
- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og undervisning i faget.
- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimum kompetanse.

I tillegg til dette veiledningsheftet og de diagnostiske oppgavene er det tidligere utviklet veiledningshefter til diagnostiske oppgaver for grunnskolen innenfor områdene:

- Tall og tallregning
- Funksjoner
- Algebra
- Måling og enheter

Det er også utviklet tilsvarende materiell innen Tall og tallregning for videregående skole.

Videre er det utviklet et hefte, *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som diskuterer matematisk kompetanse og arbeidsmåter i faget.

Heftet *Matematikk på småskoletrinnet* er et veiledningshefte som ikke er basert på innsamlede data fra diagnostiske oppgaver. Dette heftet presenterer og diskuterer viktige sider ved den faglige utviklingen hos elever på småskoletrinnet innen faglige emner i matematikk.

Videre er det utviklet et hefte som er basert på grunnskoleelevers og læreres tanker om skolematematikken og undervisningen i faget. I dette heftet behandler en matematikkundervisningens affektive sider.

Alle heftene er tilgjengelige fra Læringssenteret.

To veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innen områdene *Geometri* og *Måling og enheter* for videregående skole er under utarbeiding.

Innhold

Innledning

Dette veiledningsheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til diagnostiske oppgaver rettet mot begreper i geometri i grunnskolen. Oppgavene er prøvd ut og data er samlet blant elever i 6. og 9. klasse. Oppgavene er samlet i egne hefter og kan brukes fra 5. til 10. klasse.

Veiledningsheftet bygger på heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*, som inneholder en generell diskusjon av matematisk kompetanse, læring i matematikk, arbeidsmåter i faget og bruk av diagnostiske oppgaver. Det er mulig å gjøre seg nytte av de diagnostiske oppgavene i undervisningen uten først å lese introduksjonsheftet. Vi tilrår likevel at en bruker noe tid på dette. En klargjøring av følgende spørsmål har en sentral plass i introduksjonsheftet:

- Hva er misoppfatninger?
- Hva er diagnostiske oppgaver?
- Når fungerer oppgaver diagnostisk?
- Hvordan bruke de diagnostiske prøvene i klasserommet?
- Hvilke pedagogiske konsekvenser får våre kunnskaper om misoppfatninger?
- Hvordan undervise med basis i kunnskap om den enkelte elevs misoppfatninger?

Del 1 i dette veiledningsheftet går gjennom de enkelte oppgavene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatninger som kan ligge til grunn for disse feilsvarene. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger fra en nasjonal datainnsamling.

Oppgavene og analysen retter søkelyset mot noen sider av elevers forståelse av forskjellige sider ved geometri i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i undervisningen, slik at elevene kan utvikle så solide begreper som mulig.

Analysen er på ingen måte uttømmende. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere dype studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdannelse innenfor dette temaet.

Del 2 inneholder en samling undervisningsaktiviteter med kommentarer og rettledninger, som er rettet mot noen av de vanskene som de diagnostiske oppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren – ved siden av å ha god oversikt over elevenes kunnskaper – selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver lages, og hvordan en kan tilpasse undervisningsopplegg til de begreper og erfaringer som elevene har.

DEL 1

ANALYSE AV DIAGNOSTISKE OPPGAVER

Geometriundersøkelsen

I denne delen blir ulike begreper knyttet til geometri analysert og diskutert med bakgrunn i en nasjonal standardisering.

Det deltok 101 sjetteklasser og 89 niendeklasser i datainnsamlinga. På disse klassetrinnene var det henholdsvis 2167 og 2289 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulik størrelse. Prøvene ble gjennomført i januar og februar 1999. Blant de elevene som besvarte prøvene, har en trukket ut i overkant av 500 elever, etter fødselsdato i måneden. Det er disse elevene som danner grunnlaget for analysen:

541 i 6. klasse og 523 i 9. klasse

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved geometri og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett. Derfor kommer vi tilbake til noen av oppgavene flere ganger i analysen. I kodeboka har vi tatt med så vel de vanligste feilsvarene vi fant under en forprøve, som interessante feilsvar vi har funnet i andre undersøkelser. I framstillingen i dette kapittelet kommenterer vi noen av svaralternativene for de aktuelle oppgavene. Noen misoppfatninger blir illustrert med autentiske elevsvar.

1 Geometri i skolematematikken

Geometri kommer av de greske ordene «geo» og «metri», som vi kan oversette med *måling av jordstykker*. Opprinnelig omhandlet geometrien romstørrelser, det vil si punkter, linjer, kurver, flater og legemer og deres beliggenhet, form og størrelse.

Egypterne og babylonerne i oldtiden hadde inngående kunnskaper om flate- og rommåling. Imidlertid var det spesielt i det gamle Hellas at geometrien utviklet seg. Et logisk system ble bygd opp.

Mest kjent er Euklid (ca. 300 f.Kr.), som samlet og systematiserte geometrien i den greske kulturkretsen. Han presenterte et system for geometrien med postulater og slutningsregler, som også har blitt stående som en modell for all logisk oppbygging av matematikk. I hans *Elementer* ble geometrien presentert. Den geometrien som ble presentert, har dannet grunnlaget for lærebøker i geometri i skolen i mer enn 2000 år. Et av de mest kjente resultatene vi har fra gresk geometri, er Pytagoras' setning, som har lang tradisjon som del av skolematematikken. Setningen, som vi kaller Pytagoras' setning, har vært kjent i mange kulturer, og den viser oss hvordan matematikken har vokst fram i ulike deler av verden.

Som et annet høydepunkt i gresk geometri kan vi trekke fram beregningene som Arkimedes (287–212 f.Kr.) gjorde av volum og overflate til ulike legemer. Hvis vi har en kule og en sylinder som er omskrevet kula, vil forholdet mellom overflaten til sylinderen og overflaten til kula være det samme som forholdet mellom volumet til sylinderen og volumet til kula, begge lik 3 : 2.

Pappos fra Alexandria levde fra ca. 290 til ca. 350 e.Kr., og han leverte også viktige bidrag til geometrien. I denne forbindelsen vil vi trekke fram hans interesse for problemløsning, og det å bruke hjelpetegning ved konstruksjoner kan vi føre tilbake til Pappos.

På 1600-tallet dukket det opp en rekke nye retninger og metoder i geometrien. Dette startet en utvikling som har fortsatt opp til vår tid. Her vil vi spesielt trekke fram innføringen av koordinatsystemet (koordinatgeometri) av Rene Descartes (1596–1650). Dette kalles *analytisk* geometri i motsetning til den klassiske geometrien, som betegnes som *syntetisk*. Med et koordinatsystem kunne en knytte tallregning til geometrien.

Her kan vi også trekke fram en berømt geometrisk konstruksjon, nemlig konstruksjonen av den regulære 17-kanten med passer og linjal. Den ble utført av Carl Friedrich Gauss på slutten av 1700-tallet og har blitt omtalt som det viktigste framskrittet innenfor geometriske konstruksjoner siden gresk matematikk.

Tidlig på 1800-tallet ble nye aksiomsystemer utviklet for geometrien, slik at den tradisjonelle euklidske geometrien ikke lenger er den eneste geometrien. En annen utvikling har kommet i siste del av 1900-tallet. Datateknologien har gitt oss nye muligheter til å studere geometriske forhold og størrelser. Som et eksempel kan vi nevne fraktalgeometrien.

Geometri er tema i matematikkundervisningen i alle land, og den har hatt en sentral plass i skolens matematikkundervisning i Norge. Den elementære klassiske euklidske geometrien har stått sterkt i de første skoleårene.

I «moderne matematikk»-perioden – i 1960-årene – fikk skolegeometrien en logisk utforming, der geometriske objekter (ofte) ble presentert som punktmengder. Dette ble etter hvert forlatt, og en gikk tilbake til den klassiske geometrien for skolen.

En eksperimenterende geometri har i dag en sterk stilling i L97, der det legges vekt på utforsking og eksperimentering med geometriske mønstre og sammenhenger. Dataprogrammer knyttet til klassisk geometri kan være til hjelp i slik eksperimentering.

Styrken til geometrien som et matematisk tema ligger i det forholdet at sammenhenger og setninger kan visualiseres. Geometriske objekter som trekanter, sirkler osv. kan avbildes, og en kan utforske sammenhenger. Tradisjonelt har mye arbeid vært knyttet til konstruksjon og tegning i geometri. Denne delen av skolematematikken har blitt tonet ned i seinere år. Et av den klassiske geometriens fremste redskaper – passeren – har omtrent blitt borte fra skolens geometriundervisning.

Mange andre områder i matematikk er videreføringer av geometriske sammenhenger; derfor er skolens geometriundervisning viktig ut fra et matematisk perspektiv.

1.1 Geometri og IKT i skolematematikken

Den geometrien som vi finner i samfunnet utenfor skolen, bruker i dag IKT som et sentralt verktøy. Konstruksjoner og figurer utføres og visualiseres på dataskjermen.

Datamaskinen åpnet også for nye muligheter i geometriundervisningen. En tidlig slik utvikling var tegneprogrammet (og programmeringsspråket) Logo. Logo hadde en viss innflytelse på spesialundervisning, men fikk liten innflytelse på den regulære geometriundervisningen. Måten å arbeide med geometriske figurer på og beskrivelsen av dem var utradisjonell. Imidlertid har elementer av den konstruktivistiske tankegangen bak Logo fått innflytelse. I Logo skulle dataskjermen være en «mikroverden» der elevene skulle eksperimentere og selv finne sammenhenger. Vi har nå en rekke andre geometriprogrammer – som Cabri og Geometer's Sketchpad – som mye tettere knytter seg opp mot klassisk geometri, og hvor dataskjermen er en mikroverden.

2 Tema I: Trekanter, firkanter og sirkler

Når en arbeider med trekanter, vil en også komme inn på begreper som lengde, vinkelmål, høyde, areal og omkrets. Slike begreper vil bli behandlet under dette temaet, samtidig som de tas opp igjen seinere i forbindelse med diskusjonen av andre tema.

2.1 Trekanter

Oppgavesamlingene inneholder flere oppgaver som vi har valgt å samle under overskriften «trekanter». Tabellen nedenfor gir en oversikt over hvilke oppgaver i de to heftene som diskuteres her.

Trekanter	6. klasse	9. klasse
Form	Oppgave 1	Oppgave 1 og 16
Høyde	Oppgave 5	Oppgave 3, 13 og 17
Areal	Oppgave 2	Oppgave 4

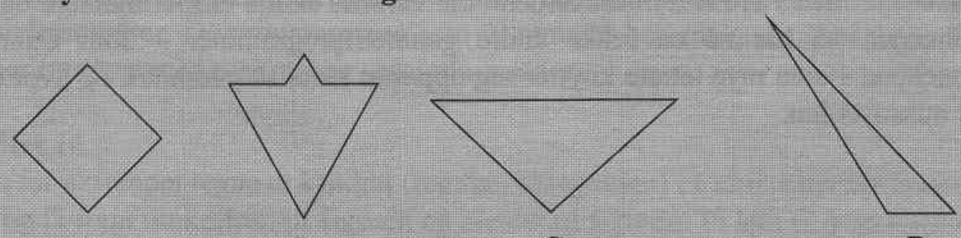
Tabell 1: Oversikt over oppgaver i tema 1

2.1.1 Trekanters form

Begge oppgavesettene inneholder oppgaver der elevene må bruke sin kunnskap om hva som kjennetegner en trekant, for å ta stilling til en påstand eller løse en oppgave.

Når er en figur en trekant? For mange er det kanskje selvsagt at en trekant skal ha tre sider eller tre kanter. Figurer som har tre kanter, men som skiller seg noe fra typiske eksempler på trekanter i lærebøker, kan allikevel ikke bli oppfattet som trekanter av alle elever. Oppgave 1 er ment å undersøke elevens forståelse av hvorledes trekanter kan se ut.

Oppgave 1
Sett kryss i boksen under de figurene som er trekanter.



Oppgaveeksempel 1: Oppgave 1, 6. og 9. klasse

Så godt som alle elevene som besvarte denne oppgaven, gjenkjente figur C som en trekant, men enkelte elever har problemer med å se at også figur D er en trekant. Figuren skiller seg noe fra trekanter slik de oftest avbildes i lærebøker.

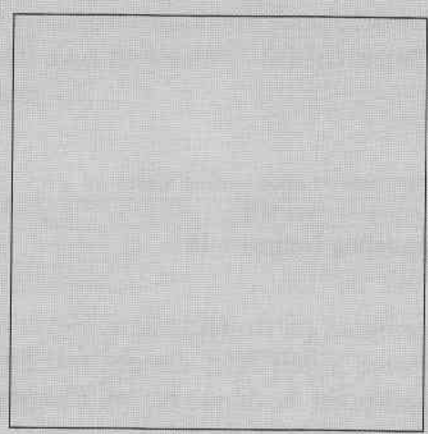
Oppgave 1	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	1	1
Trekantene C + D (Riktig svar)	87	92
Trekant C	8	3
Trekantene B + C + D	3	4

Tabell 2: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 1

Det er interessant å merke seg at andelen elever som mener at figur B også er en trekant, øker fra 6. til 9. klasse, samtidig som andelen av elever som mener at bare figur C er en trekant, går ned.

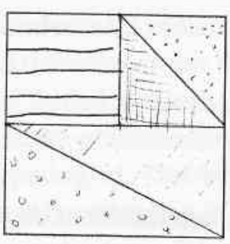
Oppgave 16 i oppgaveeksempel 2 var med bare i 9. klasse. I oppgaveteksten er kravet om at disse figurene skal «dekke» hele det opprinnelige kvadratet, underforstått, det skal verken være åpne rom eller overlapping mellom figurene.

Oppgave 16
Vis hvordan du kan dele dette kvadratet i et annet kvadrat og fire trekanter.



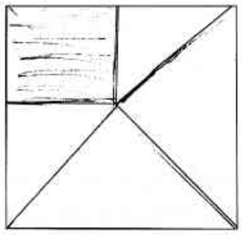
Oppgaveeksempel 2: Oppgave 16, 9. klasse

Blant elevene som har løst denne oppgaven, finnes det (minst) tre ulike strategier for å dele kvadratet på denne måten. 38 % av elevene klarer å dele opp kvadratet korrekt. De tre måtene å dele opp på har noe ulik karakter. I elevsvar 1 har eleven først delt kvadratet i kvadrater (eventuelt i to kvadrater og ett rektangel) og deretter delt inn i trekanter.



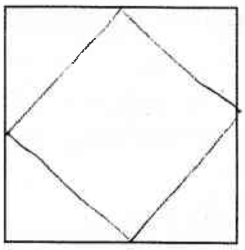
Elevsvar 1: Eksempel på korrekt oppdeling i oppgave 16

Elever som har tegnet løsninger som ligner elevsvar 2, har på samme måte som i elevsvar 1 først tegnet et kvadrat som er en firedel av det opprinnelige kvadratet, og deretter delt resten av kvadratet i fire trekanter.



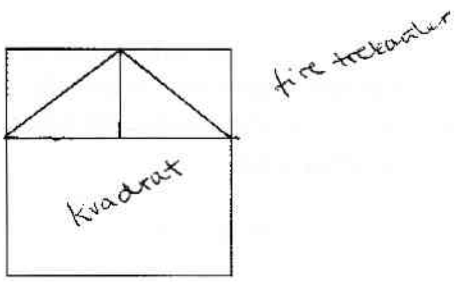
Elevsvar 2: Eksempel på korrekt oppdeling i oppgave 16

Det siste eksempelet på en korrekt løsning, elevsvar 3, skiller seg fra de to foregående eksemplene ved at en får fire kongruente trekanter ved å ta utgangspunkt i hjørnene i kvadratet og midtpunktet på sidene. Dette bygger på andre kunnskaper om egenskaper ved kvadratet enn det elevene i de to foregående eksemplene har brukt.



Elevsvar 3: Eksempel på korrekt oppdeling i oppgave 16

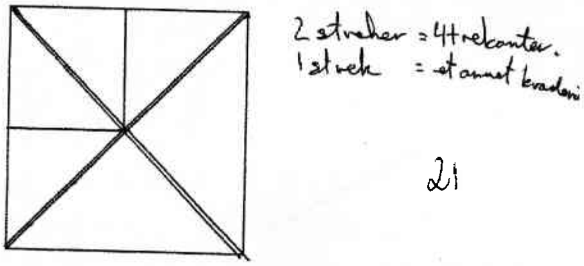
En løsning der elevens strategier ligner på strategiene til elever som løser oppgaven korrekt, er å dele kvadratet i to rektangler først. Siden deles det ene rektangelet opp i fire trekanter. Totalt har 4 % av elevene presentert løsninger av denne typen. En grunn til dette kan være at eleven ikke har innsett at et kvadrat er et spesialtilfelle av et rektangel. I dagligtale sier en av og til at «en figur er mer firkantet enn en annen», og mener med det at figuren er nær ved å være et kvadrat. Begge ordene «kvadrat» og «rektangel» betyr firkant for mange elever.



Elevsvar 4: Eksempel på ukorrekt oppdeling

I andre løsninger der elevene deler opp i kvadrater eller rektangler, hender det at de tegner flere kvadrater eller trekanter enn oppgaven spør etter. Hos elever som velger andre løsninger, er det enkelte svar som opptrer oftere enn andre. Det er 15 % av elevene som deler kvadratet inn i fire like trekanter. De streker opp diagonalene i kvadratet. Vi vet ikke om disse elevene ser på det opprinnelige kvadratet som en del av løsningen og tenker at de tidligere hadde et kvadrat og nå har både et kvadrat og fire trekanter. Bakgrunnen for denne løsningen framgår ikke av elevbesvarelsene.

En annen løsning som viser at eleven har vansker med å forstå hva det vil si å dele inn noe, er løsninger der figurene overlapper hverandre: 5 % av elevene viser løsninger der de har tegnet kvadratet over trekantene. Sannsynligvis har resonnementet til disse elevene fellestrekk med tenkningen til elever som deler i fire trekanter. I undervisningen blir det viktig å reflektere over hva som forstås med «å dele inn» noe.



Elevsvar 5: Eksempel på overlappende oppdeling

Oppgave 16		9. klasse
Ubesvart		10
Delt i kvadrater og rektangler før disse er delt i trekanter	(Korrekt svar)	14
Delt i et kvadrat før resten av arealet er delt i fire trekanter	(Korrekt svar)	14
Midtpunktet på sidene er brukt for å tegne et kvadrat i kvadratet	(Korrekt svar)	11
Delt i et rektangel og fire trekanter		4
Delt i fire trekanter		15
Overlapping, for eksempel delt i fire trekanter og tegnet et kvadrat over disse		5

Tabell 3: Prosentvis fordeling av svar på oppgave 16, 9. klasse

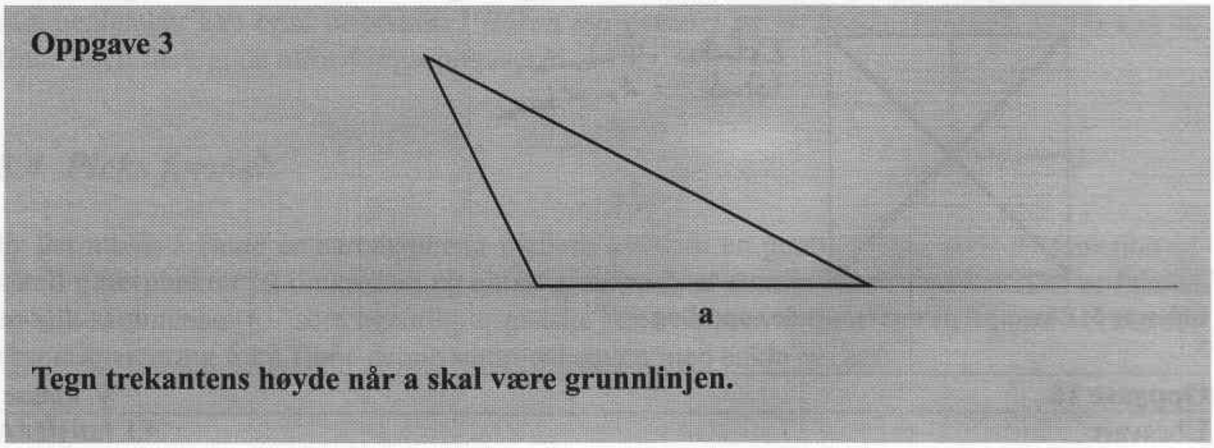
2.1.2 Høyder

Flere av oppgavene fokuserer på begrepet høyde i en trekant. En del elever mener for eksempel at høyden til trekanten *må* ligge «inne i» trekanten. En annen oppfatning kan være at høyden *må* stå normalt på *en horisontal* linje.

Illustrasjoner i lærebøker kan være en årsak til slike oppfatninger hos elevene. Ofte er trekanter i lærebøker tegnet slik at en linje i trekanten er horisontal. Denne linjen refereres til som «grunnlinjen». Når begrepet høyde innføres, er det ofte gjort ved at en tegner en linje som er normal til den horisontale linjen. Elevene kan da få den misoppfatningen at alle trekanter har en bestemt høyde, og at denne skal være normal til en horisontal linje, det vil si at høyden oppfattes som en vertikal linje. Dette gjenspeiles i elevsvarene på KIM-oppgavene i geometri.

I tillegg kan trekanten være tegnet slik at den forsterker oppfatningen av at denne høyden ligger inne i trekanten. Når ordene *høyde* og *grunnlinje* blir introdusert for elevene, er vanligvis begge vinklene ved grunnlinjen mindre enn 90°. Det er velkjent at de første erfaringer en får med en betegnelse eller et begrep, er særs viktige i ens videreutvikling av disse betegnelsene og begrepene. En har således lett for å overgeneralisere. Derfor er det viktig at elever tidlig får erfare at grunnlinjer i figurer ikke trenger å være parallelle med siden i en lærebok eller være horisontale, og på samme måte at høyder ikke trenger å være vertikale. Tradisjonelt har lærebøker i alle land vist få eksempler på figurer med andre orienteringer. Konsekvenser av dette kan være at elever – når de møter trekanter som ser «annerledes» ut – forsøker å tilpasse sin forståelse av høyder til den nye trekanten. En kan også observere at elever tegner «høyder» som er parallelle med en av sidene i trekanter, i stedet for å tegne en høyde som ligger utenfor trekanten.

I den neste oppgaven (oppgave 5 i 6. klasse og oppgave 3 i 9. klasse) skal elevene tegne inn høyden til en gitt trekant. Grunnlinjen i trekanten er horisontal. Elevenes svar på denne oppgaven kan gi læreren en indikasjon på om de har misoppfatningen om at høyder må ligge inne i trekanten.



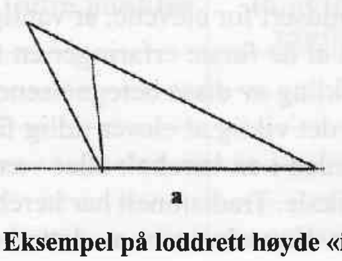
Oppgaveeksempel 3: Oppgave 5 i 6. klasse og oppgave 3 i 9. klasse

Av tabell 4 ser vi at en stor del av elevene kjenner til at en høyde skal stå normalt på grunnlinjen. 30 % av elevene i 6. klasse og 65 % av elevene i 9. klasse har tegnet en linje som er normal til **a**.

Oppgave 5	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	37	20
Korrekt tegnet høyde	16	47
Andre høyder – godtas	7	3
Normal til a, ikke høyde	7	15
Innvendig linje, ikke høyde	1	4
Parallell med en av sidene	4	1

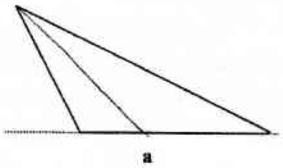
Tabell 4: Prosentvis fordeling av svar på oppgave 5 i 6. klasse og oppgave 3 i 9. klasse

Svarene til elevene i 6. klasse skiller seg noe fra svarene til elevene i 9. klasse. I 9. klasse har 15 % av elevene tegnet en normal til a som ikke er høyde i trekanten. Mange elever lar høyden starte i det venstre hjørnet til trekanten (på grunnlinjen). Denne normalen kan enten være for lang eller for kort. Når normalen er for kort, er den ofte tegnet slik at den ikke krysser den motstående siden, som for eksempel i elevsvar 6.



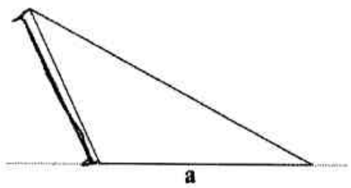
Elevsvar 6: Eksempel på loddrett høyde «inni» trekanten

Det er også en større gruppe av elever i 9. klasse enn i 6. klasse som trekker en innvendig linje fra toppunktet som skal danne «høyde» i trekanten (elevsvar 7). Disse elevene er mest opptatt av at høyden skal være inne i trekanten, ikke at den skal danne normal med grunnlinjen.



Elevsvar 7: Eksempel på høyde «inni» trekanten

Blant elevene i 6. klasse er det en gruppe (4 %) som tegner en parallell til en av sidene i trekanten. I 9. klasse er det bare 1 % av elevene som gjør dette. Disse elevene forsøker trolig å få forestillingen om at høyden må starte fra grunnlinjen i trekanten og gå til toppunktet, til å stemme med figuren i oppgaven. Den rettvinklede trekanten brukes ofte som eksempel i skolematematikken. Når den rette vinkelen dannes av grunnlinjen og en av sidene, er denne siden samtidig høyden i trekanten. Kanskje er det denne informasjonen eleven forsøker å tilpasse til trekanten i oppgaven.

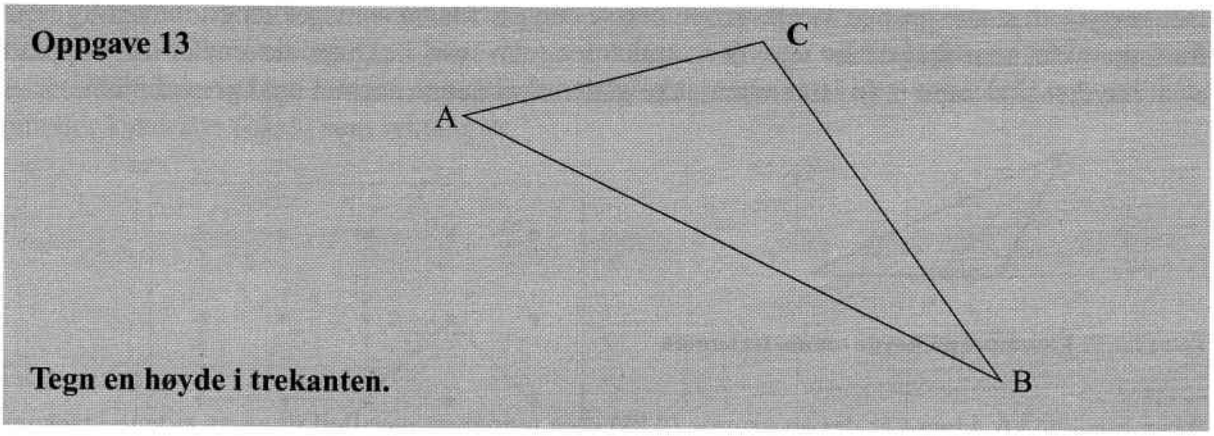


Elevsvar 8: Eksempel på høyde som er parallell med en side i trekanten

Vi har undersøkt hvordan de korrekte svarene i 9. klasse fordeler seg mellom jenter og gutter. Det viste seg at 52 % av guttene og 41 % av jentene tegnet en korrekt høyde. Blant elevene i 6. klasse er forskjellene mellom kjønnene små.

Når vi på samme måte studerer forskjeller mellom kjønnene innenfor de ulike gruppene av feilsvar, finner vi at mens 21 % av jentene har tegnet en normal til grunnlinjen som ikke er høyde, er det bare 10 % av guttene som gjør dette. For de andre gruppene av feilsvar er det bare små forskjeller mellom kjønnene.

Også i den neste oppgaven skal elever tegne inn høyden til en trekant. De viser mange av de samme misoppfatningene som vi påpekte i gjennomgangen av den forrige oppgaven.



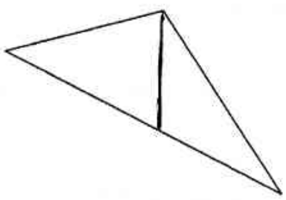
Oppgaveeksempel 4: Oppgave 13 i 9. klasse

Elever som gir korrekt svar på denne oppgaven, tegner nesten alle en høyde fra hjørnet merket C til motstående side. En annen mulighet ville ha vært å tegne en utvendig høyde fra hjørnet B eller hjørnet A til forlengelsene av de motstående sidene i trekanten. Svært få elever tegner en korrekt utvendig høyde.

Oppgave 13	9. klasse
Ubesvart	17
Korrekt tegnet høyde	50
Innvendig linje – ikke høyde	12
Normal til horisontal linje, ikke høyde	11

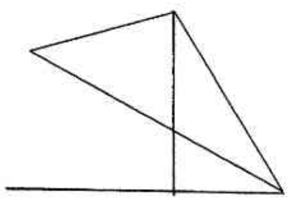
Tabell 5: Prosentvis fordeling av svarene på oppgave 13 i 9. klasse

Tabell 5 viser at 12 % av elevene tegner en linje fra punktet C til den møter sidekanten AB der denne linjen er parallell med den vertikale sidekanten på arket. For disse elevene er retningen på høyden viktigere enn at den danner en normal med sidekanten AB. I elevsvar 9 finner vi et eksempel på dette.



Elevsvar 9: Eksempel på høyde som er vertikal på arket

10 % av elevene tegner inn en horisontal linje gjennom hjørnet B, som «høyden» fra hjørnet A eller «høyden» fra hjørnet C går til. Disse elevene har en forestilling om at høyder er normaler til en horisontal linje.

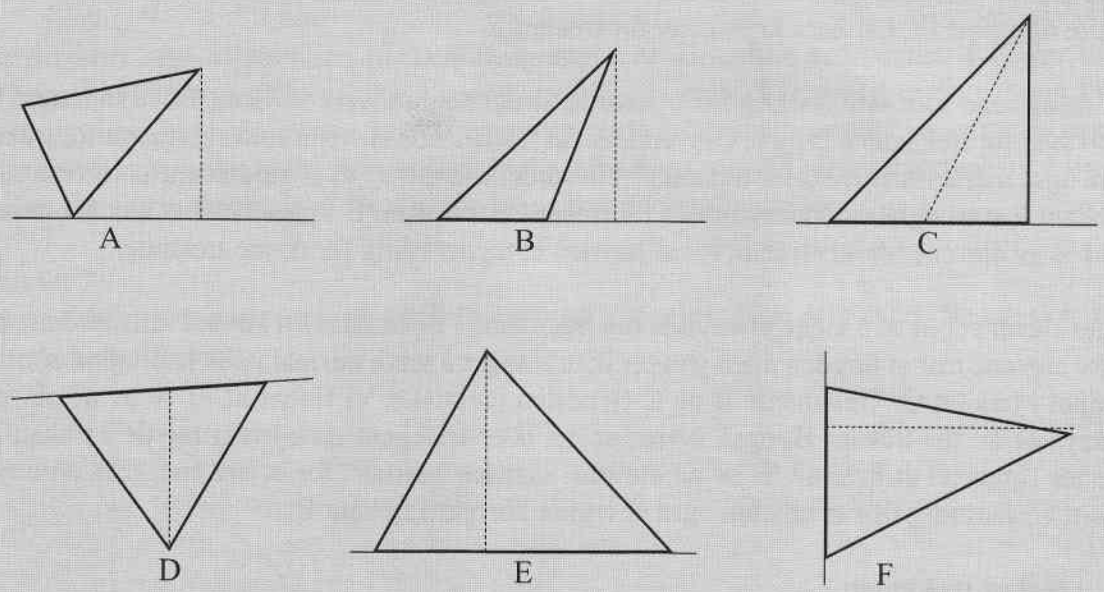


Elevsvar 10: Eksempel på høyde som er vertikal på arket. En horisontal «grunnlinje» er tegnet

Elever som gjør de feilene som er diskutert ovenfor, har ufullstendige oppfatninger av hva en høyde er. Det vil si at de kan være i stand til å tegne eller gjenkjenne høyden i enkelte trekanter, trekanter som de oppfatter er plassert på en regulær måte.

I oppgave 17, oppgaveeksempel 5 nedenfor, er det for hver av de gitte trekantene tegnet inn et forslag til en høyde. Elevene skal så avgjøre for hvilke trekanter høyden er korrekt tegnet. Som vi ser, er de stiplede linjene høyder i trekantene B, E og F. I to av trekantene, C og D, ligger de stiplede linjene inne i trekanten. I C treffer den stiplede linjen midtpunktet på den horisontale linjen, og i D er den vertikal, mens den i A er tegnet vinkelrett fra det høyeste hjørnet i trekanten til en vannrett linje gjennom det laveste hjørnet. Figur A er et eksempel av samme svartype som i elevsvar 10 ovenfor. Således kan vi i denne oppgaven, på samme måte som i de to foregående oppgavene, studere de tre vanligste ukorrekte forestillinger om høyder i trekanter.

Oppgave 17
Kryss av ved de figurene der du mener vi har tegnet trekantens høyde riktig.



Oppgaveeksempel 5: Oppgave 17 i 9. klasse

Tabell 6 viser fordelingen av korrekt markering for trekantene i oppgaveeksempel 1. Vi ser for eksempel at 69 % av elevene *ikke* krysser av for at det er tegnet en riktig høyde i figur A. Det er altså 31 % som mener at den stiplede linjen er en høyde i trekanten. Hovedgrunnen til dette valget er trolig at den stiplede linjen er vertikal på arket.

Oppgave 17	9. klasse
Trekant A korrekt markert	69
Trekant B korrekt markert	64
Trekant C korrekt markert	86
Trekant D korrekt markert	45
Trekant E korrekt markert	85
Trekant F korrekt markert	66

Tabell 6: Prosentvis fordeling av korrekt markering for trekantene i oppgave 17 i 9. klasse

Det er 6 % av elevene som ikke krysser av for noen av alternativene i oppgave 17. Vi tolker dette som at disse elevene ikke har besvart oppgaven, og vi konkluderer med at *høyst* 63 % vet at det ikke er tegnet en korrekt høyde for trekant A. Motsatt viser det seg at 2 % krysser av for alle de gitte alternativene. Disse elevene «helgarderer» og vil få riktig svar for figurene B, E og F. Dette betyr at vi må regne med at den prosentvise fordelingen av korrekte svar i tabell 6 er noe for høy. Trekant D skiller seg ut med en lav korrekt markering. Dette kommer trolig av at grunnlinjen i denne trekanten nesten er vinkelrett på den stiplede linjen.

Vi drøfter først elevenes svar for de tre figurene B, E og F, der en høyde er korrekt markert. Det er bare 40 elever, eller i underkant av 8 %, som *bare* krysser for disse alternativene. Hvis vi antar at figur D har forvirret en del elever, og ser bort fra svarene på denne, er det fortsatt bare 23 % som har rett markering på alle de fem resterende alternativene. Dette viser at det er stor usikkerhet knyttet til oppfatningen av hva en høyde er.

Trekant E representerer standardfiguren av lærebokillustrasjoner. Høyden ligger inne i trekanten, og den er vertikal. Allikevel har bare 86 % av elevene svart korrekt. 8 % av elevene som besvarte oppgave 17, har bare krysset av for trekant E.

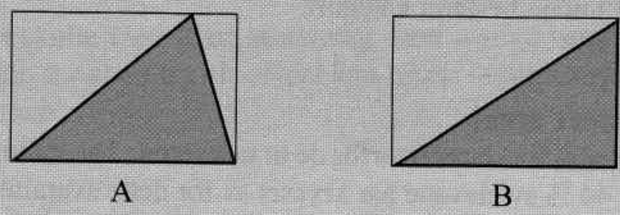
Blant de elevene som svarer riktig for trekant E, er det henholdsvis 68 % og 74 % som også gir korrekt svar for trekantene B og F. Omvendt er det 91 % av de elevene som svarer rett for trekant B, som også markerer korrekt for trekant E. Tilsvarende er det 95 % av de elevene som svarer rett for trekant F, som også markerer korrekt for trekant E. I trekant B ligger høyden utenfor trekanten. 64 % av elevene har krysset av for at høyden er tegnet riktig for denne trekanten.

Enkelte elever ser ut til å mene at høyden må ligge inne i trekanten. En konsekvens av dette blir at disse elevene tror at høyden noen ganger ikke trenger å være normal på grunnlinjen, som for eksempel i trekant C. Trekantene B og C er nesten identiske. Vi finner at 91 % av de elevene som krysser av for trekant B, også svarer at det ikke er tegnet en korrekt høyde i trekant C. Omvendt finner vi at hele 43 % av de elevene som har markert for at det er tegnet en høyde i trekant C, samtidig tror at høyden også er tegnet korrekt i trekant B.

2.1.3 Areal av trekanter

I begge oppgaveheftene er det en oppgave som undersøker elevenes arealbegrep. Oppgaven som ble brukt i 6. klasse, krever at eleven tar i bruk de samme begrepene som i oppgaven for 9. klasse, men oppgaven for 6. klasse er ikke fullt så omfattende. De to oppgavene omtales hver for seg her. I denne oppgaven må eleven bruke egenskaper ved trekanten og rektangelet for å avgjøre om de to trekantene har samme areal.

Oppgave 2
De to rektanglene nedenfor er like store.



a. Hva kan du si om arealene til trekantene A og B?

- ☐ A har størst areal.
- ☐ B har størst areal.
- ☐ Begge trekantene har samme areal.
- ☐ Det kan ikke avgjøres.

b. Forklar hvordan du tenkte.

Oppgaveeksempel 6: Oppgave 2 i 6. klasse

Tabell 7 viser at flertallet av elevene i 6. klasse mener at de to trekantene ikke har samme areal.

Oppgave 2a		6. klasse
Ubesvart		2
Begge trekantene har samme areal	(Korrekt svar)	44
A har størst areal		11
B har størst areal		34
Det kan ikke avgjøres		5

Tabell 7: Prosentvis fordeling av svarene på oppgave 2a i 6. klasse

Vi legger merke til at under halvparten av sjetteklassingene klarer å krysse av for det korrekte svaralternativet. Merk også at mer enn en tredel mener at arealet av B er størst, samt at 5 % av elevene tror at de ikke kan sammenligne størrelsene på de to arealene ut fra de opplysningene som er gitt.

For å kunne studere mer utførlig hvordan elevene tenker, bad en dem forklare hvordan de tenkte da de svarte på denne oppgaven. Selv i knappe elevsvar kan en finne mye informasjon om elevenes tanker om en bestemt problemstilling. Hva slags argumentasjon bruker de? Kan de bruke egenskapene ved figurene, eller bedømmer de situasjonen visuelt? Hva ser de som sentrale egenskaper ved figurene? Fokuserer de på andre egenskaper enn dem de må bruke for å kunne gi et korrekt svar?

Mens 2 % av elevene ikke har svart på flervalgsspørsmålet, er det 12 % som unnlater å skrive forklaring. I tillegg skriver 41 % av elevene forklaringer som er av en slik art at vi ikke kan kategorisere dem. Forklaringer som er uklare, eller som er så korte at det ikke umiddelbart framgår hva eleven har tenkt, er ikke plassert i noen bestemt kategori.

Forklaringer på at trekantene har like stort areal

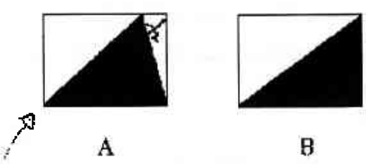
Det er bare 26 % av elevene som skriver tekst som forklarer hvorfor de to trekantene har samme areal. Dette er en liten andel med tanke på at 44 % av elevene har krysset av for dette svaralternativet. En svært liten andel av elevene, bare 3 %, har skrevet tekst der det går fram at de har brukt egenskaper ved rektangelet for å bestemme de to trekantenes areal. Disse elevene bruker rektangelets grunnlinje og høyde som argumenter for sitt svar. Noen ytterst få elever har brukt formelen for å beregne trekantens areal i sitt svar. De resterende tre kategoriene fordeler seg på denne måten:

Oppgave 2b. Forklaringer på like stort areal	6. klasse
«En trekant er halvparten av en firkant», «Samme areal fordi rektanglene har samme areal»	2
Visualiserer en omforming av trekantene	11
«Arealene ser like ut»	10

Tabell 8: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor de to trekantene har samme areal, 6. klasse

Resten av elevene som har skrevet tekst for å forklare at de to trekantene har samme areal, har skrevet tekst med lavere presisjonsnivå. En liten gruppe elever (2 %) skriver for eksempel at trekantene har samme areal fordi rektanglene har samme areal.

Vi kan i hovedsak finne to typiske svar blant forklaringene på hvorfor trekantenes areal er like. En gruppe elever skrev at det ser ut som om arealene er like store (11 %), uten at dette er nærmere forklart. Sannsynligvis har disse elevene bedømt arealene visuelt. En annen gruppe av elever forklarte at en kan tenke seg at en omformer arealene for å se at de er like store (10 % av elevene). Nedenfor gjengis illustrasjonen en elev har laget, i tillegg til teksten han har skrevet:



Elevsvar 11: Eksempel på omforming av arealet

I teksten skrev eleven: *«Jeg tenkte at hvis A skulle bli som B måtte jeg dra trekanten A opp i hjørnet da ble det litt igjen som jeg satt inn.»* Av elevens forklaring kan vi se at han ser for seg at en manipulerer med trekantene: flytter og legger til.

Blant elevene som skriver tekst av de to siste typene, finner vi en større andel jenter enn gutter. Mens 11 % av jentene påstår at en kan se at trekantene har samme areal, skriver 8 % av guttene dette. Likeledes er det en større andel jenter (14 %) enn gutter (7 %) som forsøker å omforme arealene.

Forklaringer på at trekant A eller B har størst areal

I tabell 9 har vi kategorisert noen forklaringer som hevder at B har større areal enn A. 11 % skriver tekst der det framgår at de har målt sider i trekantene og summert eller multiplisert lengdene.

Oppgave 2b. Forklaringer på at A eller B har størst areal	6. klasse
Har målt sider og addert eller multiplisert, eller «ser» at B er større enn A	11
«Det ser slik ut» som forklaring på at B er større enn A	5
Andre forklaringer på at B er større enn A	4

Tabell 9: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på at B har det største arealet, 6. klasse

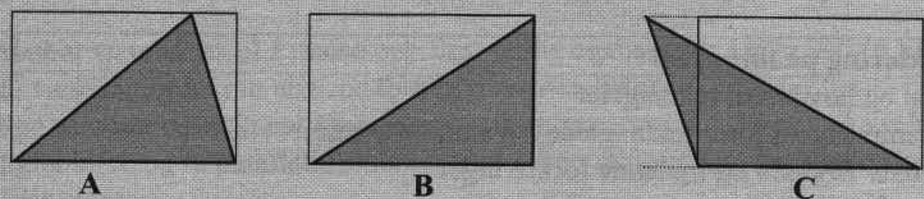
Skal vi finne en omkrets, måler vi og legger sammen. Skal vi finne arealet av et rektangel eller kvadrat, måler vi og multipliserer. Det vil si at elevene har en forestilling om utregningsmetoder som benyttes i geometri, men at de ikke kjenner disse reglene godt nok til å avgjøre hvilken det er som passer i en bestemt situasjon. Dette kan komme av at mange elever har lært bestemte ferdigheter uten å forstå hva som ligger til grunn for den bestemte ferdigheten i en gitt situasjon.

Blant dem som har forklart hvorfor arealet av trekant B er det største, finner vi en gruppe elever som hevder at en kan «se» dette. I denne gruppen finner vi flere gutter enn jenter (7 % gutter mot 2 % jenter). Også disse elevene svarer på grunnlag av en visuell sammenligning av figurene. Vi legger merke til at det er bare en liten gruppe elever (2 %) som har skrevet forklaringer som uttrykker at trekant A har det største arealet.

Som nevnt tidligere finner vi en tilsvarende oppgave for 9. klasse. Denne oppgaven skiller seg fra oppgaven ovenfor ved at den har ett svaralternativ til. Det «nye» her er at figur C har sitt toppunkt på utsiden av rektangelet.

Oppgave 4

De tre rektanglene nedenfor er like store.



a. Hva kan du si om arealene til trekantene A, B og C?

- ☐ A har størst areal.
- ☐ B har størst areal.
- ☐ C har størst areal.
- ☐ Alle trekantene har samme areal.
- ☐ Det kan ikke avgjøres.

b. Forklar hvordan du tenkte.

Oppgaveeksempel 7: Oppgave 4 i 9. klasse

Tabell 10 viser svarfordelingen på avkryssingsoppgaven. De elevene som garderer seg ved å krysse av for flere svaralternativer, er ikke tatt med i tabellen.

Oppgave 4a	9. klasse
Ubesvart	2
Alle trekantene har samme areal (Korrekt svar)	52
A har størst areal	5
B har størst areal	8
C har størst areal	23
Det kan ikke avgjøres	6

Tabell 10: Prosentvis fordeling av svarene på oppgave 4a i 9. klasse

Sammenligner vi med oppgave 2 i 6. klasse, ser vi at det er en større andel av elevene i 9. klasse som krysser av for det korrekte svaret, selv om det her er et svaralternativ mer enn i sjetteklasseoppgaven. Merk også at det mest populære gale svaret er å krysse av for C. I sjetteklasseoppgaven hadde figur B denne rollen. Kan dette komme av at den skraverte figuren virker større når bredden på den øker?

Vi merker oss at det er en større andel jenter enn gutter (56 % mot 49 %) som svarer at de tre trekantene har samme areal.

Forklaringer på at alle trekantene har samme areal

Det var 2 % av elevene i 9. klasse som ikke besvarte a-oppgaven. På oppgave b var det 16 % av elevene som ikke gav noen forklaring på hvordan de tenkte. 11 % av de elevene som krysset av for det *korrekte* svaralternativet i a-oppgaven, gav *ingen* forklaring. I tillegg var det 26 % av dem som hadde svart *korrekt* på a-oppgaven, som skrev forklaringer som ble kategorisert som *Andre svar*. Dette tyder på at elevene har større problemer med denne oppgaven enn det en kan få inntrykk av fra fordelingen i tabell 10. I tabell 11 er fordelingen av fire «forklaringskategorier».

Oppgave 4b. Forklaring på like areal	9. klasse
Bruker grunnlinjen og høyden til rektangelet	10
«Trekantene har samme areal fordi rektanglene har samme areal», «En trekant er en halv firkant» og lignende forklaringer	10
Visualisering og omforming	7
«Jeg ser det»	7

Tabell 11: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor alle trekantene har samme areal, 9. klasse

Argumentasjonen til niendeklassingene ligner på de argumentene elevene i 6. klasse brukte. 10 % av elevene skrev akseptable matematiske forklaringer. Disse elevene brukte egenskaper ved rektangelet for å vise at trekantene har samme grunn-linje og høyde. Også svært korte svar er plassert i denne kategorien, som for eksempel: *«De er like lange og brede»*. Noen elever har tatt utgangspunkt i at trekantens areal er halvparten av rektangelets.

En annen gruppe av elever (10 %) gir svar der deler av forklaringen er underforstått. Disse tekstene er knappe og ligner på tekstene elevene i 6. klasse skrev. (Oppgave 2b, i oppgaveksempel 9.) Eksempler på typiske elevtekster er *«de er like fordi rektanglene har samme areal»* og *«en* *trekant er en halv firkant»*. Tilsvarende er det også en del elever i 9. klasse som ser for seg at en omformer arealene av trekantene slik at de kan sammenlignes. Disse elevene skriver tekst der de viser at en ved å se for seg at en trekker i eller flytter deler av trekantene A og C, vil få figurer som tilsvarer trekant B.

Forklaringene til de elevene som har *svart rett* på a-oppgaven, viser at det bare er 35 % som gir matematisk akseptable forklaringer for sin avkryssing. Kan dette komme av at elevene har for liten erfaring med å begrunne sine påstander?

Forklaringer der eleven hevder at trekant C har det største arealet

Når elever oppfatter at C har det største arealet, er det trolig fordi trekant C går ut over rektangelet, eller fordi elevene ser på lengden av sidene i C i stedet for grunnlinjen og høyden. Disse tekstene er knappe, noen elever skriver at C *«er størst fordi den går utenfor firkanten også»*, mens en gruppe elever ganske enkelt skriver *«Det ser sånn ut»* eller *«C tar mer plass»*.

Andre svar viser at elevene måler sider og multipliserer for å finne areal. De hevder at C har størst areal fordi denne trekanten har lengst sider. Noen få elever har målt sider og lagt sammen.

Den første gruppen ser på formen på trekanten og forsøker å bestemme arealet ut fra den. Den andre gruppen ser på lengdene av sidene i stedet for å forholde seg til grunnlinje og høyde i trekanten. De skiller ikke mellom de ulike målene som brukes i ulike situasjoner.

Forklaringer der eleven hevder at trekant B har størst areal

Når elevene tror at trekant B har størst areal, finner vi to ulike påstander i forklaringene – enten: Trekant B er halve arealet av rektangelet, og derfor har trekant B størst areal, eller: *Det ser slik ut.*

Oppgave 4b. En av trekantene har større areal enn de andre	9. klasse
C størst: «Trekanten går ut over rektangelet» Ser på trekantens form og plassering	7
C størst: «Trekanten har lengst sider» Forveksler hvilke mål som er gyldige	5
C størst: «Det ser slik ut»	3
B størst: «B er halve rektangelet»	3
B størst: «Det ser sånn ut»	2
A størst: «Det ser sånn ut»	2

Tabell 12: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor en av trekantene har større areal enn de andre, 9. klasse

2.2 Firkanter

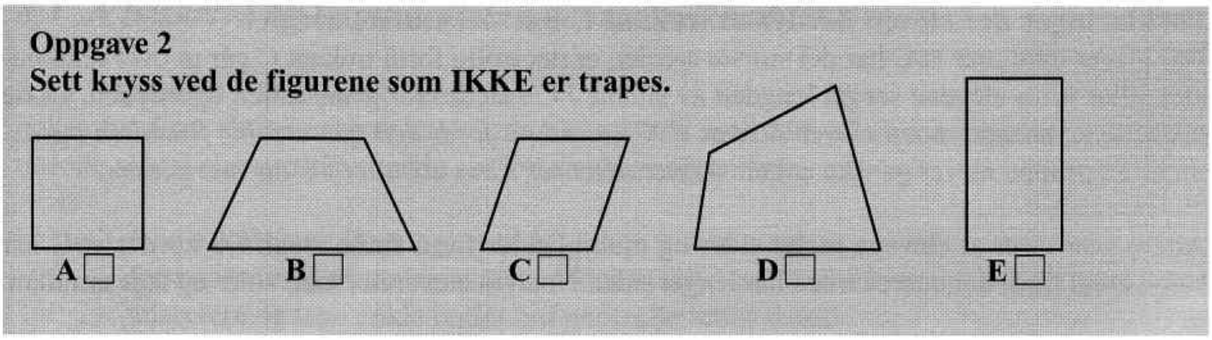
Oppgavesettene inneholder flere oppgaver som kan samles under betegnelsen «firkanter». Tabellen nedenfor gir en oversikt over oppgaver i de to settene som vi diskuterer her.

Firkanter	6. klasse	9. klasse
Form	Oppgave 10	Oppgave 2, 16 og 20
Areal	Oppgave 2 og 12a–b	Oppgave 4 og 8

Tabell 13: Oversikt over oppgaver om firkanter

2.2.1 Firkanters form

I skolematematikken legges det vekt på å kjenne igjen og å kunne navngi ulike former av regulære figurer. Elever arbeider med kvadrat, rektangel, parallellogram og trapes. Ofte skilles disse for «skarpt» fra hverandre. En legger stor vekt på forskjellene og mindre vekt på likhetene mellom klasser av regulære figurer. Det legges for eksempel liten vekt på at ethvert kvadrat også er et rektangel, eller et trapes. For at en firkant skal kunne få «betegnelsen» trapes, er det nok at den har to parallelle sider. Motsatt er det minst like viktig å vite hvilke egenskaper som må oppfylles for at trapeset kan kalles et kvadrat, nemlig at alle sidene er like lange og alle vinklene like store. Oppgave 2 kan være et godt utgangspunkt for en diskusjon rundt disse forholdene.



Oppgaveeksempel 8: Oppgave 2 i 9. klasse

Oppgave 2	9. klasse
Ubesvart	7
Kun figur D er *ikke* et trapes (Korrekt svar)	2
A, C, D og E er *ikke* trapes	14
Figur A, C og E er *ikke* trapes	35
Figur A og E er *ikke* trapes	22
Figur A, B, D og E er *ikke* trapes	5

Tabell 14: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 2 i 9. klasse

Vi ser at 95 % av elevene som svarte på denne oppgaven, oppfatter figur B som et trapes, mens de er mer usikre på om de andre figurene er trapeser. Figur B ligner mest på en typisk lærebokillustrasjon av et trapes.

En stor gruppe elever mener at bare figurene B og D er trapeser (35 %). Sannsynligvis leter disse elevene etter figurer som har en form som ligner på den typiske illustrasjonen av et trapes. En annen strategi kan være å holde figurer en vet har et kjent navn, utenom, for eksempel kvadrat (figur A) og rektangel (E). Det kan også tenkes at noen elever forveksler betegnelsene på trapes og parallellogram.

Denne neste oppgaven går ut på å gjenkjenne rektangelets form, samt å identifisere og telle opp alle de rektangler en kan finne i figuren. Det vil for eksempel si at elevene må gjenkjenne rektangler med ulikt forhold mellom lengde og bredde som samme figur. Det kan være vanskelig for noen elever å innse at rektangelet som kan dannes av to av de små rektanglene i figuren, skal telles på samme måte som hvert av de små. Selv om de har ulik størrelse, er begge et rektangel.

Oppgave 10
Hvor mange rektangler finner du til sammen i figuren nedenfor?

Svar: ____________

Oppgaveeksempel 9: Oppgave 10 i 6. klasse og oppgave 20 i 9. klasse

Til sammen finnes seks rektangler. Det krever at en også ser at to rektangler plassert ved siden av hverandre danner et nytt rektangel.

Oppgave 10	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	5	5
6 (Korrekt svar)	21	32
4	19	26
3	41	28

Tabell 15: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 10 i 6. klasse og oppgave 20 i 9. klasse

Noe færre elever oppgir at de finner fire rektangler. Disse elevene ser antakelig de tre rektanglene som til sammen utgjør et fjerde stort. Den største svarkategorien blant sjetteklassingene er tre rektangler.

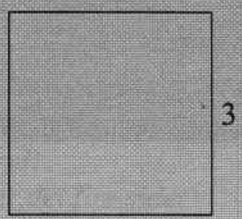
Oppgave 16 i 9. klasse er tidligere omtalt under temaet trekanter, se oppgaveeksempel 2, sidene 11–13. Se også de kommentarene som er gitt der. På samme måte som i oppgaven om trapesene er det mange elever som strever med å skille mellom kvadrater og rektangler. Kvadratet er en undergruppe av rektangelet, men det motsatte er ikke tilfellet. Elever som deler kvadratet i et rektangel og fire trekanter, har derfor behov for å arbeide med egenskapene til de ulike figurene.

2.2.2 Firkanters areal

I de to oppgavesettene er det til sammen mange oppgaver der elevene skal arbeide med areal: sammenligne, telle opp, beregne og tegne. Noen av disse oppgavene omtaler vi her, mens andre blir diskutert under temaet «Omkrets, areal og volum».

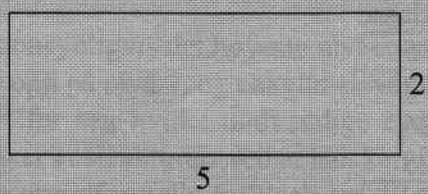
Oppgave 12
På figurene i denne oppgaven er alle målene gitt i centimeter.

a. Hva er arealet til dette kvadratet?



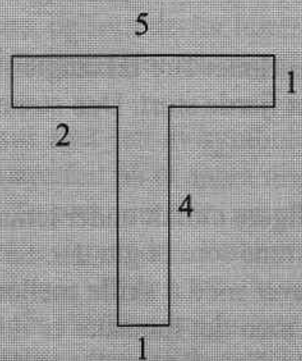
Svar: ____________

b. Hva er arealet til dette rektangelet?



Svar: ____________

c. Hva er arealet til denne figuren?



Svar: ____________

Oppgaveeksempel 10: Oppgave 12 i 6. klasse

I oppgave 12 skal elevene beregne arealet til tre ulike figurer. Måltall er oppgitt på figurene. Oppgavene er svært like tradisjonelle matematikkoppgaver. Denne oppgaven kan brukes for å undersøke om elever forveksler areal og omkrets, om de bruker måltall som er gitt i figuren, eller om de gjør egne målinger.

Oppgave 12a	6. klasse
Ubesvart	4
9 (Korrekt svar)	34
6	3
12 (Beregner omkretsen)	37
3 eller 2,7 (Lengden av sidekanten)	3
Andre svar	18

Tabell 16: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 12a i 6. klasse

Vi ser at det er omtrent like mange elever som gir det korrekte svaret 9 som svaret 12. Trolig beregner den siste elevgruppen omkretsen av kvadratet. Svaret 6 kommer trolig av at de adderer lengden av to sidekanter. Elevene er tydeligvis usikre på meningsinnholdet i ordene *areal* og *omkrets*. En liten gruppe elever oppgir 3 eller 2,7 som svar. Svaret 3 kommer trolig av at dette er det eneste tallet som er oppgitt på figuren. Svaret 2,7 er trolig et resultat av at eleven har målt en sidekant i kvadratet med linjal.

I oppgave 12b er måltallene til sidekantene i rektangelet gitt. Elevene viser tilsvarende misoppfatninger som i oppgave 12a. Dette styrker påstanden om at arealbegrepet er vagt hos sjetteklassingene.

Oppgave 12b	6. klasse
Ubesvart	5
10 (Korrekt svar)	39
14 (Beregner omkrets)	40
5 (Lengden av horisontal sidekant)	2
7 (Adderer de to måltallene)	2
«2 og 5»	1
Andre svar	12

Tabell 17: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 12b i 6. klasse

Når vi sammenligner hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi at elevene er forbausende konsekvente. Hele 90 % av de elevene som svarer riktig på a-spørsmålet, gir også et korrekt svar på spørsmål b. Og hele 82 % av dem som adderer lengden av alle sidekantene i oppgave 12a (svarer 12), adderer også lengden av alle sidekantene på b-oppgaven (svarer 14). Dette styrker påstanden vår om at nesten halvparten av elevene i 6. klasse har problemer med å skille mellom begrepene areal og omkrets.

Den siste figuren har en mer komplisert form. Figuren må deles i to rektangler, og det er også langt flere måltall å forholde seg til.

Oppgave 12c		6. klasse
Ubesvart		8
9	(Korrekt svar)	13
20	(Beregner omkrets)	17
13	(Summerer de gitte måltallene)	19
15	(Måler med linjal og beregner omkrets)	4
14 eller 18	(Indikasjon på addisjon av måltall)	7
40	(Multipliserer alle måltallene på figuren)	6
Andre svar		26

Tabell 18: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 12c i 6. klasse

Som for de to foregående oppgavene er den vanligste feilen å beregne omkrets på en eller annen måte. Det er tre klare indikasjoner på at elevene på ulike måter beregner omkretsen til figuren. Omkretsen av figuren er 20. Dersom en adderer de oppgitte måltallene, får en svaret 13, og dersom en måler omkretsen med linjal, kommer en fram til svaret 15.

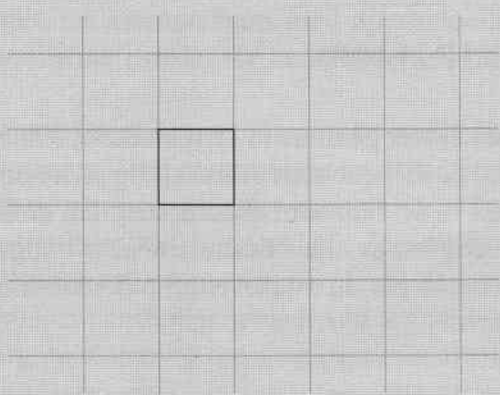
Noen elever svarer 14 eller 18. Når vi studerer hvordan disse elevene svarer på oppgavene 12a og 12b, finner vi at flesteparten av dem (over 60 %) adderer i disse oppgavene. Vi kan da anta at flesteparten som gir disse svarene, har beregnet dem ved å addere kombinasjoner av de tallene som er angitt på figuren. Den siste gruppen av elever har svart 40. De har ganske enkelt multiplisert alle tallene i oppgaven.

Oppgave 12. Svar med måleenhet	12a	12b	12c
Ubesvart	52	56	60
cm^2 (Korrekt enhet)	22	21	20
cm	25	22	20

Tabell 19: Prosentvis fordeling av svar med måleenhet i oppgave 12 i 6. klasse

I oppgaven er det oppgitt enhet til måltallene, men måleenheten i svaret står ikke. Det er færre enn halvparten som gir svaret med måleenhet. Det er flere elever som bruker cm enn cm^2.

Oppgave 8
I rutenettet nedenfor er det tegnet et kvadrat.



a. Tegn et kvadrat med dobbelt så stort areal i rutenettet.

b. Forklar hvorfor arealet er dobbelt så stort.

Oppgaveeksempel 11: Oppgave 8 i 9. klasse

I oppgave 8 for 9. klasse skal eleven tegne et kvadrat som har dobbelt så stort areal som det gitte kvadratet. En rekke elever forholder seg til bare ett av disse kriteriene. Enten tegner de et nytt kvadrat som ikke er dobbelt så stort, eller de tegner en figur med dobbelt så stort areal som ikke er et kvadrat.

Oppgave 8	9. klasse
Ubesvart	8
Korrekt kvadrat med diagonal i en rute. Sidekant ($s = \sqrt{2}$)	2
Korrekt kvadrat, sidekanten er ca. 1,4 ganger siden i det opprinnelige kvadratet	4
Kvadrater tegnet over to ganger to ruter (Figur med korrekt form)	52
Rektangel tegnet over ruter (Figur med korrekt areal)	21
Kvadrat tegnet over tre ganger tre ruter	8

Tabell 20: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8 i 9. klasse

I hovedsak har elevene to ulike korrekte løsningsforslag. Enten bruker de diagonalene i rutenettet som sidekanter i et kvadrat, eller de tegner et kvadrat der sidelengden er i underkant av en og en halv rute ($\sqrt{2} \approx 1{,}41$).

Få elever (ca. 30 %) har tegnet kvadrater med korrekt areal. Selv blant dem er det få som gir utfyllende informasjon til tegningen. Noen elever har skrevet kommentarer som «fire halve er to». Vi har også forklaringer som «fordi det er dobbelt så stort». Elevtekstene forteller ikke noe om elevenes geometriske forståelse eller strategier for å løse oppgaven.

Hos elevene som tegner rektangel eller kvadrat (med større areal enn to), finner vi to hovedtyper av svar:

- Elevene er mest opptatt av form og tegner et kvadrat som oftest går over fire eller ni ruter.
- Elevene er mest opptatt av størrelsen på arealet og tegner et rektangel.

Den største gruppen er de elevene som er mer opptatt av form enn av areal: 52 % tegner et kvadrat med areal fire. Mange av forklaringene viser at elevene er opptatt av lengden av sidene. Flere tekster ligner denne:

Fordi hver side er dobbel så lang

Elevsvar 12: Forklaring knyttet til lengden av sidene

Det er også en gruppe elever som skriver knappere tekst, men som sannsynligvis også fokuserer på lengden av sidene, og det er elever som skriver tekst som «du ganger med to». En interessant type forklaring fra elevene som tegner et kvadrat med areal fire, er tekster som ligner eksempelet nedenfor:

Det er et kvadrat der fra
før. Hvis jeg skal tegne et som
er dobbelt så stort, må jeg
ha 4 små ruter. Hvis jeg
skulle hatt to ruter hadde det
ikke blitt et kvadrat.

Elevsvar 13: Eksempel på dobling av sidelengde

Denne eleven hevder at figuren har rett form, den er et kvadrat. Samtidig har den for stort areal.

21 % tegner et rektangel med areal to. Tekstene til denne elevgruppen er også knappe, men de viser at elevene er mest opptatt av arealet, ikke av formen. Mange av elevene skriver tekst der

det går fram at figuren er korrekt fordi den består av to ruter, fordi arealet er to, eller lignende. Men også i denne elevgruppen kan vi finne eksempler på elever som er usikre på om deres egen løsning er korrekt, fordi den har gal form.

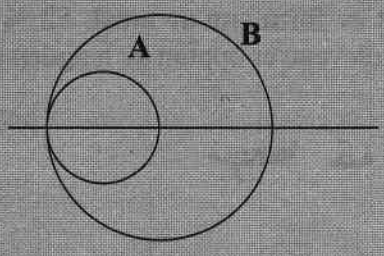
En siste gruppe (8 %) er de elevene som tegner et kvadrat på ni. Noen av elevene har tegnet kvadratet rundt kvadratet i illustrasjonen, slik at det opprinnelige kvadratet ligger midt i den nye figuren. Andre har tegnet de to kvadratene ved siden av hverandre. Tekstene disse elevene har skrevet, er så knappe at de forteller lite om deres strategier. Noen av elevene mener deres figur er korrekt fordi lengden av siden er øket «alle veier».

2.3 Sirkelen

Oppgavesamlingen for 9. klasse inneholdt to oppgaver om sirkelen. Dessverre var det i det oppgaveheftet som ble brukt til å samle elevdata i den nasjonale datainnsamlingen en trykkfeil i oppgave 5 nedenfor. Oppgaveteksten var: *Omkretsen til B er større enn omkretsen til A. Hva kan du si om omkretsen til A i forhold til omkretsen til B?* Derfor er det umulig for oss å uttale oss om omkretsen av sirkler da ingen av de svaralternativene som er gitt i oppgaven, passer med det korrekte svaret til denne formuleringen. Feilen er rettet i den publiserte oppgavesamlingen.

2.3.1 Omkrets

Oppgave 5
Nedenfor er det tegnet to sirkler A og B. Diameteren i A er lik radien i B.



Omkretsen til B er større enn omkretsen til A.
Hva kan du si om omkretsen til B i forhold til omkretsen til A?

- ☐ Den er dobbelt så lang.
- ☐ Den er tre ganger så lang.
- ☐ Den er fire ganger så lang.
- ☐ Den er lengre, men det kan ikke bestemmes nøyaktig hvor mye lengre.
- ☐ Vet ikke.

Oppgaveeksempel 12: Oppgave 5 i 9. klasse

Tabell 21 viser svarfordelingen vi fikk ved den nasjonale standardiseringen. Vi legger merke til at 60 % av elevene likevel krysser av for det korrekte svaret til den korrekte formuleringen. De tolker trolig teksten i forhold til formuleringen i oppgaveeksempel 12. Svarfordelingen i tabell 21 er trolig misvisende på grunn av trykkfeilen.

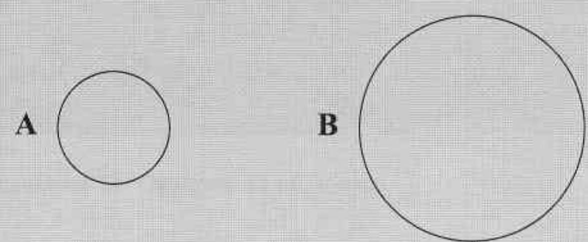
Oppgave 5	9. klasse
Ubesvart	3
Dobbelt så lang (Korrekt svar)	60
Tre ganger så lang	6
Fire ganger så lang	7
Kan ikke bestemmes nøyaktig	10
Vet ikke	12

Tabell 21: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 5 i 9. klasse

2.3.2 Areal

Teksten til oppgave 6 er nesten identisk med teksten i den foregående oppgaven.

Oppgave 6
Nedenfor er det tegnet to sirkler A og B.



Omkretsen til B er dobbelt så stor som omkretsen til A.
Hva kan du si om arealet til B i forhold til arealet til A?

- ☐ Det er dobbelt så stort.
- ☐ Det er tre ganger så stort.
- ☐ Det er fire ganger så stort.
- ☐ Det er større, men det kan ikke bestemmes nøyaktig hvor mye større.
- ☐ Vet ikke.

Oppgaveeksempel 13: Oppgave 6 i 9. klasse

Oppgave 6	9. klasse
Ubesvart	2
Fire ganger så stort (Korrekt svar)	20
Dobbelt så stort	41
Tre ganger så stort	18
Større, men det kan ikke bestemmes nøyaktig	12
Vet ikke	6

Tabell 22: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 6 i 9. klasse

Det vanligste svaret fra elevene er altså at arealet til sirkel B er dobbelt så stort som arealet til sirkel A. De bruker trolig ikke den visuelle støtten som illustrasjonen kan gi. Eller de overser kanskje denne informasjonen fordi den står i misforhold til deres umiddelbare reaksjon.

Dessuten er det lite trolig at de har erfaringer med å sammenligne forholdet mellom omkrets og areal.

Av de elevene som i oppgave 5 svarte at omkretsen av B er dobbelt så lang som omkretsen av A, er det 49 % som også svarer at forholdet mellom arealene er 2. Det er bare 19 % av de elevene som svarte korrekt på oppgave 5, som også gir et korrekt svar på oppgave 6. Omvendt er det 72 % av de elevene som krysser av for korrekt svaralternativ i oppgave 6, som også finner det korrekte svaralternativet i oppgave 5. Dette kan indikere at de fleste elevene besvarer oppgave 5 i forhold til den teksten denne oppgaven *skulle* ha hatt.

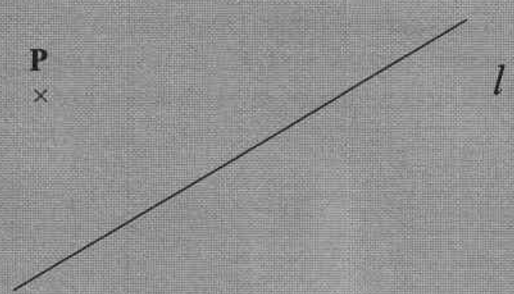
40 % av elevene gir samme svaralternativ på de to oppgavene. Det vil si at dersom de svarer at forholdet er dobbelt i den første oppgaven, så krysser de av for det samme i den andre.

3 Tema II: Parallelle linjer og vinkler

3.1 Parallelle linjer

I oppgavesettene er det bare én oppgave om å tegne en parallell til en gitt linje.

Oppgave 19
Tegn en parallell linje til linjen *l* gjennom punktet P.



Oppgaveeksempel 14: Oppgave 19 i 9. klasse

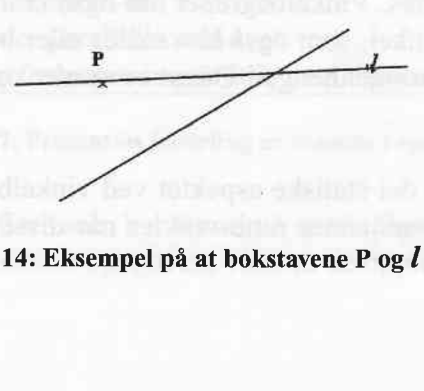
I underkant av halvparten av elevene i 9. klasse klarer å tegne en parallell til *l* gjennom punktet P.

Oppgave 19	9. klasse
Ubesvart	17
Korrekt svar	46
Linje fra punktet P til bokstaven l, parallell med siden av oppgavearket	19
To parallelle linjer fra P til l	2
Normal fra punktet P til l	6

Tabell 23: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 19 i 9. klasse

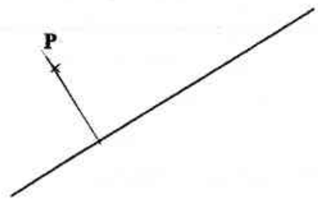
En del av elevene har valgt å konstruere en parallell. Enkelte av disse elevene har gjort formelle feil i konstruksjonen, men der linjen helt tydelig er en parallell med *l*, er svaret allikevel godtatt.

Vi ser at det hyppigste feilsvaret er å tegne en linje gjennom punktet P og bokstaven *l*. Det er vanskelig å avgjøre om elevene tenker å «forbinde» P med bokstaven *l*, eller om de mener at den linjen de skal tegne, må være parallell med de vannrette sidene på arket. Elevsvar 14 er et eksempel på denne hyppigste kategorien av feilsvar.



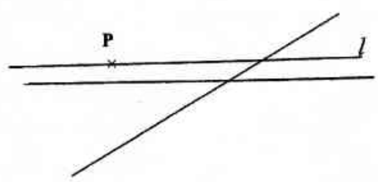
Elevsvar 14: Eksempel på at bokstavene P og *l* er forbundet

Vi legger merke til at noen elever forveksler parallell og normal. Elevsvar 15 er et eksempel på dette.



Elevsvar 15: Eksempel på forveksling av parallell og normal

En liten andel av elevene tegner to parallelle linjer. Disse elevene har oppfattet at ordet parallell betyr to linjer, det vil si at en skal tegne eller konstruere to linjer. Ettersom de elevene som tegner disse to linjene, tegner dem fra punktet P over til bokstaven l, ser de ikke at oppgaven har en gitt linje som en skal tegne en parallell til. Elevsvaret nedenfor er et eksempel på dette.



Elevsvar 16: Tegner en linje gjennom P og en parallell med denne linjen

3.2 Vinkler

Vinkler	6. klasse	9. klasse
	Oppgave 3	Oppgave 9
	Oppgave 8	Oppgave 10
		Oppgave 14
		Oppgave 18

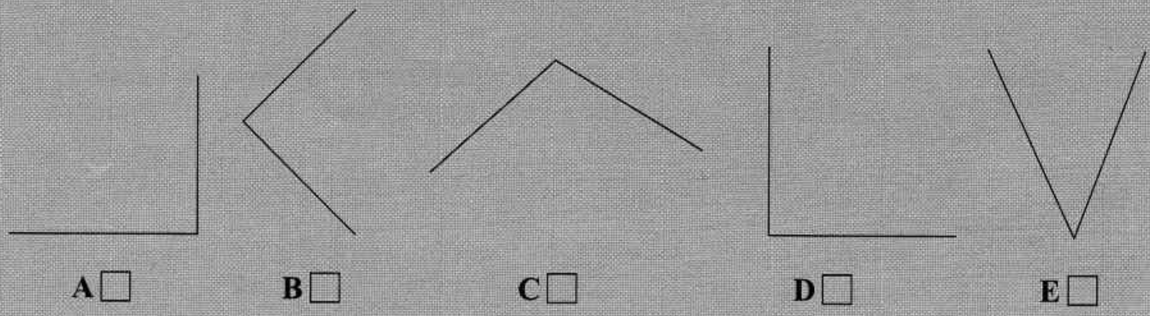
Tabell 24: Oversikt over oppgaver om vinkler

En del elever har oppfatninger om vinkler som er lite funksjonelle. Noen elever mener at vinkler må ha åpning mot høyre, eller at vinklene må være mindre enn nitti grader. Slike forestillinger kan komme av liten variasjon i de eksemplene en møter i lærebøkene og i undervisningen. Det er viktig at elevene møter vinkler med ulike vinkelåpninger, ulike lengder på vinkelbeina, ulike orienteringer i planet og så videre. I tillegg må elevene få erfaring med et stort utvalg av vinkler i ulike kontekster.

Når en vinkel er tegnet på et papir, illustrerer den det vi kaller det *statiske* aspektet ved vinkelbegrepet. Oftest skal slike vinkler måles eller beregnes. Vinkelbegrepet har også et *dynamisk* aspekt. En dør som åpnes, dreier seg i en bestemt vinkel, som også kan måles eller beregnes. Det er likevel sjeldnere at vi ønsker å måle i slike sammenhenger. Oftest er vi mer opptatt av bevegelsen.

I oppgave 3 for 6. klasse er vi opptatt av én side av det statiske aspektet ved vinkelbegrepet. Hensikten er å undersøke i hvilken grad elevene gjenkjenner rette vinkler når disse er ulikt orientert.

Oppgave 3
Er noen av disse vinklene rette?
Hvilke? Sett kryss.



Oppgaveeksempel 15: Oppgave 3 i 6. klasse

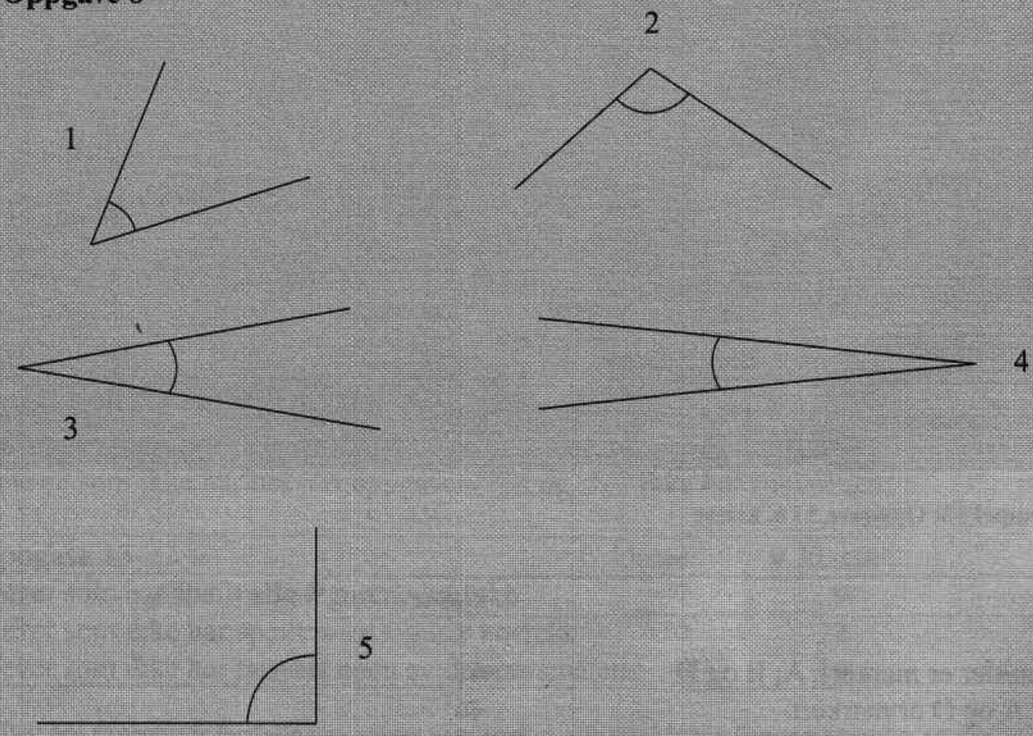
Oppgave 3	6. klasse
Ubesvart	1
Alle rette vinkler er markert: A, B og D	41
Bare vinkel A og D er markert	46
Bare vinkel B og A er markert	0,4
Bare vinkel B og D er markert	2
Bare vinkel B er markert	0,4
Bare vinkel A er markert	1
Bare vinkel D er markert	3

Tabell 25: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 3 i 6. klasse

Vi ser at 93 % av elevene har krysset av for vinkel D *alene* eller sammen med andre av de rette vinklene. Nesten alle elevene gjenkjenner altså denne rette vinkelen. Den er lik den vanligste illustrasjonen av en rett vinkel i lærebøkene. Tilsvarende tall for vinkel A er 88 % og for vinkel B 44 %. Det er altså tydelig at det er vanskeligere å gjenkjenne en rett vinkel som ikke har et horisontalt vinkelbein. 3 % av elevene har krysset av bare for vinkel D. Den «vanskeligste» rette vinkelen å gjenkjenne er altså vinkel B.

I oppgave 8 for 6. klasse skal elevene vurdere størrelsen på fem gitte vinkler. Som kjent refererer ordene stor/størst og liten/minst i denne sammenhengen til vinkelåpningen eller gradtallet. Det er kjent at elever knytter størrelsen av vinkler til lengden av vinkelbeina. De gitte svaralternativene er valgt slik at en kan undersøke hvilke elever som har denne forestillingen.

Oppgave 8



a. Hvilken av de markerte vinklene tror du er størst? ____________

b. Hvilken av de markerte vinklene tror du er minst? ____________

c. Er noen av disse vinklene rette (90°)? Hvilke? ____________

Se på vinklene ovenfor.
Skriv numrene på de vinklene som er:
(Skriv INGEN hvis du mener det ikke er noen slik vinkel.)

d. mindre enn 90° ____________________

e. større enn 90° ____________________

f. større enn 180° ____________________

Oppgaveeksempel 16: Oppgave 8 i 6. klasse

Begrepet vinkel er, faglig sett, et mer vanskelig tilgjengelig begrep i geometri enn det elevene har møtt tidligere. En vinkel kan defineres på flere måter. Den kan bestemmes av et punkt og to *stråler* ut fra dette punktet. Området mellom strålene kaller vi *vinkelområdet*. Vinkelområdet består av alle punktene i dette området. Tradisjonen fra oldtidens matematikk har bestemt at måltallet for en vinkel defineres ved at en hel omdreining svarer til 360°. Vi snakker om positiv og negativ dreieretning og så videre. Ordet *stor* refererer i denne sammenhengen til andre egenskaper enn det gjør for eksempel ved lengde, bredde, volum og åpning. Hva som menes med størrelsen av en vinkel, kan være uklart for mange elever.

Oppgave 8a	6. klasse
Ubesvart	2
Vinkel 2 (Korrekt svar)	34
Vinkel 1	1
Vinkel 3	5
Vinkel 4	39
Vinkel 5	18

Tabell 26: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8a i 6. klasse

Tabell 26 viser at det er to svaralternativ som spesielt tiltrekker elevenes oppmerksomhet, det korrekte svaret og vinkel 4, som har de lengste vinkelbeina. Vi legger også merke til at den rette vinkelen (5) er et aktuelt valg for mange elever. Andre studier har pekt på at når vinkelåpningen peker mot venstre, bruker en del elever den utvendige vinkelen. Da blir vinkel 5 større enn de andre vinklene, bortsett fra vinkel 4. Det kan derfor tenkes at også noen av de elevene som har krysset av for den vinkelen, har gjort dette fordi de har brukt den utvendige vinkelen og ikke lengden på vinkelbeina i sitt resonnement.

Oppgave 8b	6. klasse
Ubesvart	2
Vinkel 4 (Korrekt svar)	38
Vinkel 1	37
Vinkel 2	14
Vinkel 3	4
Vinkel 5	??

Tabell 27: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8b i 6. klasse

Det er 30 % av elevene som svarer riktig på både spørsmål a og b. Når vi analyserer hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi at hele 89 % av dem som valgte riktig svaralternativ på a-oppgaven, også krysset av for vinkel 4 på b-oppgaven.

Vi legger merke til at 14 % av elevene mener at vinkel 2 er minst. Videre analyse av enkeltelevers svar viser at hele 81 % av disse elevene samtidig mener at vinkel 4 er den største i a-oppgaven. Den utvendige vinkelen til 2 er minst, og den utvendige vinkelen til 4 er størst. Dette indikerer at en del elever fokuserer mer på den utvendige vinkelen enn på lengden av vinkelbeina. Vinklene 1 og 2 har like lange vinkelbein. Dette kan være grunnen til at så mange velger dette alternativet i denne oppgaven. Tilsvarende er det 62 % av de elevene som mener at vinkel 4 er størst, som samtidig mener at vinkel 1 er minst.

Denne analysen viser at mange av disse elevene har gitt sine svar ut fra konsekvente resonnement.

Oppgave 8c	6. klasse
Ubesvart	4
Vinkel 5 (Korrekt)	75
Vinkel 2	3
Vinkel 2 og 5	2

Tabell 28: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8c i 6. klasse

Tre firedeler av elevene identifiserer den korrekte rette vinkelen i spørsmål c. Noen elever (5 %) krysser av for vinkel 2, eller vinkel 2 og 5. Dette kommer trolig av at denne vinkelen også er nær 90°. Vi finner godt samsvar mellom elevenes svar på denne oppgaven og oppgave 3, som er analysert ovenfor.

Oppgave 8d	6. klasse
Ubesvart	12
Vinkel 1, 3 og 4 (Korrekt svar)	35
Bare vinkel 1	12
Bare vinkel 2	5
Bare vinkel 3	3
Bare vinkel 4	3
Både vinkel 1 og 2	4
Vinklene 1, 2, 3 og 4	5
Ingen av vinklene	5

Tabell 29: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8d i 6. klasse

Vi finner mange ulike svarkombinasjoner på denne oppgaven. Noen elever vurderer også her lengden på vinkelbeina. Til sammen er det 9 % av elevene som oppgir vinkel 2 eller vinkel 1 og 2 som svar på oppgaven. Vinkelbeina til begge disse vinklene er kortere enn vinkelbeina til den rette vinkelen. De fleste av elevene som svarer vinkel 2 eller vinkel 1 og 2, har oppgitt de samme vinklene som svar på oppgave 8b. Disse elevene ser trolig på lengden av vinkelbeina som mål for størrelsen av vinkelen.

Oppgave 8e	6. klasse
Ubesvart	16
Vinkel 2 (Korrekt svar)	37
Vinklene 2 og 5	4
Vinkel 5	9
Vinkel 4	7
Vinkel 3 og 4	3
Ingen av vinklene er større enn 90°	9

Tabell 30: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8e i 6. klasse

Det er litt overraskende at 9 % av elevene oppgir at vinkel 5 er større enn 90°. Kan det være at enkelte av disse elevene har blandet sammen *større enn* og *større enn eller lik*? Dette kan også være forklaringen på at 4 % av elevene oppgir både vinkel 2 og vinkel 5 som svar. Ikke uventet er det et godt samsvar mellom hvordan de enkelte elevene svarer på oppgavene 8d og 8e. Hele 95 % av de elevene som gav korrekt svar på oppgave 8d, krysset også av for vinkel 2, vinkel 5 eller begge disse vinklene. Likeledes oppgir 9 % av elevene at ingen av vinklene er større enn 90°. Disse elevene har trolig oppfattet vinkel 2 som en rett vinkel.

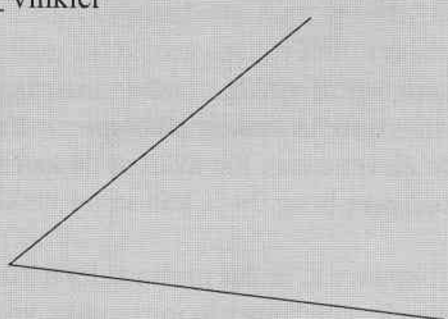
Ingen av vinklene som er tegnet i spørsmål 8f, er større enn 180°. Litt under halvparten av elevene svarer korrekt at det ikke finnes noen slik vinkel blant de vinklene som er gitt. Vi legger merke til at andelen av blanke svar er vesentlig høyere på dette spørsmålet. De vanligste feilsvarene er vinkel 4 og/eller vinkel 5. Vi har tidligere pekt på data som indikerer at en del elever betrakter den utvendige vinkelen i disse tilfellene. Nærmere analyser av hvordan de enkelte elevene svarer på de ulike delspørsmålene, viser at mange av disse elevene trolig bruker tilsvarende resonnement i denne oppgaven.

Oppgave 8f	6. klasse
Ubesvart	28
Ingen av vinklene er større enn 180°	49
Vinkel 4	6
Vinkel 5	6

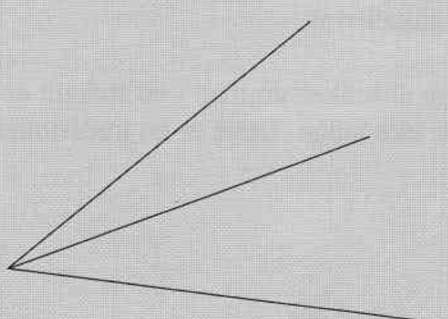
Tabell 31: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 8f i 6. klasse

Oppgave 9
Hvor mange vinkler ser du på figuren nedenfor?

a. ____ vinkler



b. ____ vinkler



Oppgaveeksempel 17: Oppgave 9 i 9. klasse

Hensikten med oppgave 9a var å undersøke om elevene ser både den innvendige og den utvendige vinkelen.

Oppgave 9a	9. klasse
Ubesvart	1
To vinkler (Korrekt svar)	11
En vinkel	85

Tabell 32: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 9a i 9. klasse

Figuren i b-oppgaven er mer kompleks. I hovedsak kan vi skille mellom tre grupper av elevsvar:

- Elever som oppgir at de ser to vinkler (to innvendige vinkler)
- Elever som oppgir at de ser tre vinkler (to innvendige vinkler som også utgjør en tredje)
- Elever som oppgir at de ser flere enn tre vinkler

Oppgave 9b	9. klasse
Ubesvart	1
6 vinkler (Korrekt svar)	1
2 vinkler	58
3 vinkler	32
4 vinkler	3

Tabell 33: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 9b i 9. klasse

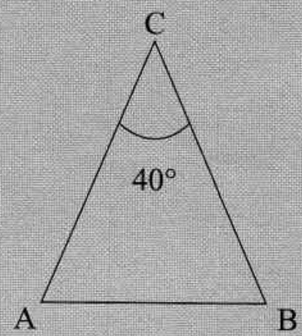
Ikke uventet svarer flertallet av elevene, 58 %, at de ser to vinkler. Dette samsvarer med elevenes svar i oppgave a; hele 98 % av de elevene som svarte to vinkler på b-spørsmålet, gav samtidig svaret en vinkel på a-spørsmålet. 68 % av de elevene som har svart at de kan se en vinkel i oppgave a, har *også* svart at de ser to vinkler i oppgave b, og 29 % kan se tre vinkler.

Blant elevene som har svart at de ser to vinkler i oppgave a, er det mest vanlig å svare at de ser tre vinkler i oppgave b. Det er rimelig å tro at disse elevene finner to innvendige vinkler og den utvendige vinkelen til de to «ytterste» vinkelbeina. Noen elever har også markert denne utvendige vinkelen. Svaret fire vinkler kan trolig komme av at en finner de tre indre vinklene og i tillegg den utvendige vinkelen til de to «ytterste» vinkelbeina.

For å kunne løse oppgave 10 nedenfor må en vite at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at vinklene A og B er like store siden CA og CB er like lange. Dette er en tradisjonell geometrioppgave.

Oppgave 10

I trekanten ABC er CA = CB, og ∠ C = 40°.



Hvor stor er vinkel B?

Svar: ______________

Oppgaveeksempel 18: Oppgave 10 i 9. klasse

Oppgave 10	9. klasse
Ubesvart	7
70° (Korrekt svar)	41
40°	8
60°	17
Svar mellom 65° og 75° (Kan ha målt vinkler)	9

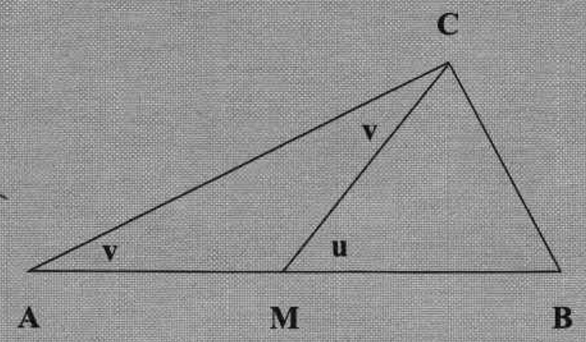
Tabell 34: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 10 i 9. klasse

Svaret 40° kan tyde på at disse elevene oppfatter at trekanten er likesidet, eller at de rett og slett bedømmer størrelsen på vinklene visuelt og mener at alle er like store. Svaret 60° kan komme av samme grunn; disse elevene vet at vinklene i en likesidet trekant er 60°. Trekanten i oppgaven er med vilje ikke konstruert nøyaktig for å avsløre de elevene som måler vinkelen og ikke beregner størrelsen ut fra de gitte opplysningene. Vinkel B er tegnet som 68°.

9 % av elevene måler trolig vinkelen. Disse elevene tar i bruk en metode som tyder på at de ikke har, eller er usikre på, de matematiske kunnskapene som er nødvendige for å kunne beregne størrelsen av vinkel B ut fra de gitte opplysningene.

For å kunne løse oppgave 9 i oppgaveeksempel 19 må elevene kjenne til at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at en rett linje danner en vinkel på 180°.

Oppgave 14



a. Om vinkelen v = 20 grader, hvor stor er da vinkelen u? Sett kryss.

- ☐ 40 grader
- ☐ 60 grader
- ☐ 70 grader
- ☐ Ingen av dem som er nevnt her.
- ☐ Det kan vi ikke vite.

b. Forklar hvordan du tenkte:

Oppgaveeksempel 19: Oppgave 14 i 9. klasse

Da oppgavene ble sendt ut til den nasjonale datainnsamlingen, var det en trykkfeil i teksten til denne oppgaven i nynorskversjonen. Analysen er derfor basert på svarene til bokmålselevene. De utgjorde 86 % av det totale utvalget.

Oppgave 14a (Bokmålselever)	9. klasse
Ubesvart	4
40° (Korrekt svar)	26
60°	28
70°	13
Ingen av dem	20
Det kan vi ikke vite	7

Tabell 35: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 14a i 9. klasse (bare bokmålselever)

Legg merke til at det er relativt få elever som unnlater å besvare oppgaven. Vi ville ha trodd at denne problemstillingen var relativt vanskelig, og derfor kunne vi forvente mange blanke svar. Når det likevel er så få blanke svar, kan det komme av at oppgaven har gitte svaralternativer.

Bortsett fra det siste svaralternativet, *Det kan vi ikke vite*, fordeler svarene seg nokså jevnt mellom de andre alternativene. Når elever svarer at vinkelen er 60°, kan det være fordi vinkelen *ligner* på en 60° vinkel. En annen grunn kan være at mange av de trekantene en arbeider med i skolematematikken, er likesidet.

I tabell 36 har vi kategorisert noen av forklaringstypene til bokmålselevene. Legg merke til at omtrent en tredel av elevene gir forklaringer som ikke passer inn i noen av de kategoriene som er tatt med i denne tabellen.

Oppgave 14b (Bokmålselever)	9. klasse
Ubesvart	20
Korrekt forklaring	6
Vinkel u er dobbelt så stor som vinkel v – uten begrunnelse	9
«Fordi den ser liten ut» eller lignende begrunnelser, visuell sammenligning	2
Gale forklaringer på at vinkel v er 40°	4
Forklaringer basert på visuell bedømming av trekant MBC som likesidet (Svar 60°)	5
Vinkel u er 70° fordi 90 – 20 = 70	3
Vinkel u *ser ut som om* den er 70°	2
Har målt vinkel u	7
Forklaringer på at vinkel u er 140°	4
Eleven mener at det er for få opplysninger	4

Tabell 36: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 14b i 9. klasse (bare bokmålselever)

Elevene som svarer at vinkel u er 40°, har i hovedsak to framstillinger av hvorfor det er slik. 6 % av elevene skriver en forklaring til hvorfor vinkel u er 40°, der de tar utgangspunkt i å finne nabovinkelen til u og så beregne u ved hjelp av denne vinkelen. Noen elever skriver dette formelt matematisk, mens andre har en mer tekstlig forklaring. Elevsvar 17 er et eksempel på en slik forklaring.

Jeg plusset ∠v + ∠v = 40° Så trakk jeg 40° ifra 180° (Jeg manglet en [illegible] i AMC) Da fikk jeg 140°. På andre side av MC er det en annen trekant. Den ene ∠ er u. Den er rett ved siden av den vinkelen jeg manglet i AMC. U og den ukjente vinkelen (Den var 140°) skal tilsammen bli 180°, og trekker du 140° fra 180° får du 40°. U = 40°

Elevsvar 17: Eksempel på en korrekt begrunnelse for at vinkelen er 40°

En større gruppe, 9 %, skriver ganske enkelt at vinkel u er dobbelt så stor som vinkel v, uten at dette begrunnes nærmere. På bakgrunn av forklaringen kan vi derfor ikke avgjøre om eleven ser at dette er riktig, eller om dette svaret er gitt fordi det passer med svaralternativene.

En tredje gruppe forklarer at 40° er riktig fordi vinkel u er en liten vinkel. Videre er det 4 % av elevene som gir forklaringer som ikke er basert på opplysningene i oppgaveteksten. Det er rimelig å tro at disse elevene ikke kjenner til at vinkelsummen i en trekant er 180°, og/eller at en rett linje danner en vinkel på 180°, eller at de ikke klarer å kombinere disse kjensgjerningene.

Det er interessant å legge merke til at noen elever gjør greie for deler av argumentet, men ikke klarer å fullføre. Dette er elever som kan bruke setningen om vinkelsum, men som bruker setningen om nabovinkler:

I en trekant er det 180°
20° + 20° = 40° 180° - 40° = 140°

Elevsvar 18: Eksempel på bruk av trekantens vinkelsum

Andre elever, 4 %, skriver at det er for få opplysninger til å regne ut hvor stor vinkel u er. En kan tenke seg at også disse elevene kjenner til setningen om vinkelsummen i en trekant, men ikke ser hvorledes den kan brukes i dette tilfellet. Vi finner også svar som fokuserer på den høyre delen av trekanten. Elevene kan for eksempel skrive at vinkel v er i den andre trekanten.

For vi må vite 2 av vinklene for å finne utav det, hvis det ikke er en likebeinet trekant.

Elevsvar 19: Forklaring knyttet til likebeinte trekanter

Noen elever har som sin hovedstrategi å måle vinkelen. De vil finne at vinkelen er omtrent 50°, og følgelig passer ingen av svaralternativene. Noen av elevene har skrevet at de målte, mens andre ganske enkelt oppgir at vinkelen er 50°.

Forklar hvordan du tenkte: Jeg tenkte at vinkel v = 20 men den var engentlig 27. U var 52 men jeg plusset med 7.

Elevsvar 20: Eksempel på elevsvar som indikerer vinkelmåling

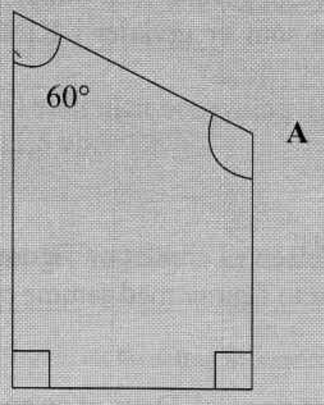
Andre elever som har målt, har forsøkt å gjøre som denne eleven: tilpasse sitt eget svar (måling) til alternativene som er oppgitt i oppgaveteksten. De sju gradene som var tegnet «feil» i oppgaveillustrasjonen, har eleven lagt til målet han fikk da han målte vinkel u. At dette ikke blir 60°, som eleven har krysset av for, er ikke kommentert i elevteksten. Av bokmålselevene har 8 % skrevet tekst for å forklare at vinkel u er 60°. I hovedsak legger elevene i disse tekstene vekt på at trekanten MBC ser ut til å være likesidet.

3 % av elevene hevder at vinkel C er 90°, og mener at da kan en finne u gjennom beregningen 90 – 20 = 70. Sannsynligvis har også disse elevene produsert en utregning som gir et av valgalternativene. Siden tekstene er svært knappe, er det ikke noe i det som er skrevet, som tyder på at elevene ser at de har regnet ut størrelsen på en annen vinkel enn den det er spurt etter. Den største andelen av elever som ikke skriver tekst, finner vi blant de elevene som mener at ingen av de oppgitte svaralternativene er korrekte. Vi kan i hovedsak finne tre ulike grupper av elevsvar til dette svaralternativet.

Noen elever tar utgangspunkt i setningen om vinkelsum og bruker denne mer eller mindre korrekt, men glemmer at vinkel u ikke ligger i samme trekant som vinkel v. Disse elevene mener at vinkel u er 140° eller 160°.

Oppgaveeksempel 20 handler om å finne gradtallet for en vinkel i en firkant når tre av vinklene er oppgitt.

Oppgave 18



Hvor stor er vinkel A?

Svar: ______________

Oppgaveeksempel 20: Oppgave 18 i 9. klasse

Oppgave 18	9. klasse
Ubesvart	10
120° (Korrekt svar)	48
Indikasjon på at vinkelen er målt	2
90°	3
60°	7
100°	3
40°	4
30°	4
Andre svar	19

Tabell 37: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 18 i 9. klasse

I underkant av halvparten av elevene har besvart oppgaven korrekt. Noen få elever har forsøkt å måle vinkel A i oppgaveillustrasjonen. Dette er en vanlig strategi som elever bruker når de ikke klarer å beregne en gitt vinkel.

Vi finner en lang rekke av tallsvar til denne oppgaven, 60° er det hyppigste av dem. Kan dette svaret komme av at 60° er det eneste *tallet* som er gitt i oppgaven? Blant elevsvarene finner vi en rekke forslag til vinkler som ikke uten videre lar seg forklare. Trolig kan vi bare få innblikk i tankegangen til disse elevene ved å samtale med dem om hvordan de tenkte i løsningsprosessen.

4 Tema III: Omkrets, areal og volum

Det er velkjent at mange elever har problemer med å holde disse begrepene fra hverandre. Noen av de vanskene,elevene møter, kan avdekkes ved bruk av oppgavene som omtales nedenfor. Andre vansker kan avdekkes ved hjelp av de oppgavene som er utviklet i KIM-materialet *Måling og enheter*, se Støren (2001).

4.1 Omkrets og areal

Noen elever tror størrelsen av omkretsen bestemmer størrelsen til arealet av figuren. I mange tilfeller vil dette være rett, men det er også lett å illustrere at to figurer med samme omkrets kan ha ulikt areal.

I tillegg er det en del elever som forveksler termene omkrets og areal. Dette er en språklig usikkerhet som kan ha sammenheng med at elevene er usikre på innholdet i begrepene, eller at de ikke kjenner de korrekte termene. Det er viktig at den undervisningen elevene møter, kan gjøre dem kjent med et matematisk vokabular og gi dem mulighet til å bruke det matematisk språket.

Omkrets	6. klasse	9. klasse
	Oppgave 7	Oppgave 15a
		Oppgave 5

Tabell 38: Oppgaver om omkrets

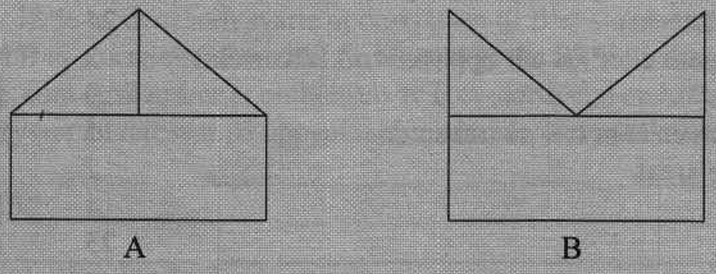
I oppgavesamlingene finnes det flere oppgaver der ulike sider ved arealbegrepet blir undersøkt. Disse oppgavene handler om: opptelling av enheter, tegning av en figur med et bestemt areal, vurdering og sammenligning av areal, og beregning av areal. I tillegg finnes det en oppgave der vi ber elevene vurdere hvordan et areal av en irregulær figur kan beregnes. Vi spør etter en *metode* til å finne størrelsen til dette arealet. I noen oppgaver får elevene spørsmål om både areal og omkrets.

Areal	6. klasse	9. klasse
Telle opp	Oppgave 6a	Oppgave 11a
Tegne	Oppgave 6b	Oppgave 11b
		Oppgave 8
Vurdere		Oppgave 6
		Oppgave 15b
Beregne	Oppgave 12	
Metodekjennskap		Oppgave 22

Tabell 39: Oppgaver om areal

I oppgave 7 i oppgaveeksempel 21 ønsker en å undersøke om elevene ser omkrets atskilt fra areal.

Oppgave 7
Se på de to figurene nedenfor.



a. Hva kan du si om hvor langt det er rundt figurene? Sett kryss.

☐ Det er lenger rundt A enn rundt B.
☐ Det er lenger rundt B enn rundt A.
☐ Det er like langt rundt A som rundt B.
☐ Vi kan ikke avgjøre hvilken figur det er lengst rundt.

b. Forklar hvordan du tenkte.

c. Hva kan du si om arealene? Sett kryss.

☐ A har større areal enn B.
☐ B har større areal enn A.
☐ B og A har like store areal.
☐ Vi kan ikke avgjøre hvilket areal som er størst.

d. Forklar hvordan du tenkte.

Oppgaveeksempel 21: Oppgave 7a og b i 6. klasse og oppgave 15a–d i 9. klasse

I oppgave a har vi unnlatt å bruke ordet *omkrets* for å unngå at elever unnlater å besvare oppgaven fordi de er usikre på innholdet i termen omkrets. Dette ordvalget gjør også at elevene ikke krysser av feil fordi de forveksler termene omkrets og areal.

Oppgave 7a	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	2	2
Det er lenger rundt B enn rundt A (Korrekt svar)	60	55
Det er lenger rundt A enn rundt B	5	3
Det er like langt rundt A og B	31	38
Det kan vi ikke vite	1	1

Tabell 40: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 7a i 6. klasse og oppgave 15a i 9. klasse

Vi legger merke til at fordelingen på de ulike svaralternativene er omtrent den samme for begge klassetrinnene, og at det er en høyere prosentandel i 6. klasse enn i 9. klasse som svarer korrekt på dette spørsmålet. Det er vanskelig å finne en rimelig forklaring på dette. I tillegg ble elevene i b-spørsmålet bedt om å skrive en tekst der de forklarte valget sitt i spørsmål a.

Oppgave 7b	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	8	14
B > A: Fokuserer på antall sider, lengder av sider og lignende (Korrekt)	8	14
B > A: Oppgir å ha målt (Korrekt)	24	12
B > A: «fordi B er vridd rundt» eller «B går oppover» o.l. (Korrekt)	2	12
B > A: «fordi det ser slik ut»	9	7
A = B: Det blir like langt om en snur om på trekantene	15	17
A = B: Figurene har samme areal	2	2
A = B: Det ser slik ut	4	5
Andre svar	25	18

Tabell 41: Prosentvis fordeling av forklaringstyper i oppgave 7b i 6. klasse og oppgave 1b i 9. klasse

Det er færre elever i 9. klasse enn i 6. klasse som skriver forklaring. Forklaringene som gis av elevene på de to alderstrinnene, er nokså like. Det er flere elever i 6. klasse som skriver tekster som er så knappe eller uklare at vi ikke kan kategorisere dem.

To forklaringer skiller seg ut som de vanligste. En del elever skriver forklaringer der de fokuserer på antall sider. De trekker fram at i figur B er det flere av trekantens sider som må regnes med når en beregner omkrets. Noen elever påpeker også at det de kaller «høyder» (vertikale sider), er lengre i figur B. Det største gruppen er de som forklarer at de har målt sidene på de to figurene og lagt sammen. I 6. klasse er dette nesten en firedel av elevene. Omtrent halvparten så mange av niendeklassingene viser til måling av sidene. Noen elever bedømmer trolig de to omkretsene visuelt. De gir korte svar som «det ser slik ut».

Både figur A og figur B er satt sammen av de samme grunnfigurene. Noen hevder for eksempel at i figur B er figurene snudd rundt, vridd eller dreid. Ofte forklares det ikke hvordan dette har sammenheng med omkretsen av figurene. Andre elever ser figurene for seg som bakketopper. De skriver for eksempel at figur B *«har en hump»*, eller at figurene går *«opp og ned»*.

Den vanligste forklaringen til de elevene som hevder at omkretsene til de to figurene er like, er at om en «snur rundt» trekantene i en av figurene, så blir omkretsen den samme. Dette er riktig for de enkelte delene av A og B, trekantene har samme omkrets hvordan vi enn snur dem, men i figur B er det flere av sidekantene i trekantene som utgjør omkretsen enn i figur A. Noen få elever skriver at figurene har samme omkrets fordi de har samme areal (2 % på begge trinn). Andre elever mener de kan se at det er like langt rundt figurene.

Tabell 42 viser at oppgave 15c er betydelig enklere for elevene enn 15a.

Oppgave 15c	9. klasse
Ubesvart	5
B og A har like stort areal (Korrekt svar)	71
A har større areal enn B	6
B har større areal enn A	15
Vi kan ikke avgjøre hvilket areal som er størst	2

Tabell 42: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 15c i 9. klasse

Når vi undersøker hvordan den enkelte elev i 9. klasse besvarer spørsmålene 15a og 15c, finner vi at 39 % (205 elever) har svart korrekt på begge spørsmålene. Av de elevene som krysset av for korrekt alternativ i a-spørsmålet, er det 72 % som *også* svarer at arealene av A og B er like store i b-spørsmålet. 18 % av dem som svarte at omkretsen til B er større enn omkretsen til A, svarer *også* at arealet til B er større enn arealet til A. Motsatt er det 55 % av dem som svarer at de to arealene er like store, som *også* svarer at omkretsen av B er større enn omkretsen av A. Det er hele 47 % av dem som krysser av rett svar på oppgave 15c, som mener at omkretsene til A og B er like store.

Oppgave 15d	9. klasse
Ubesvart	22
Korrekt forklaring eller beregning	8
Trekantene har ikke endret areal ved flytting, eller «har samme areal» (Korrekt)	11
Påstander som «De er like store»	9
Arealene er like fordi omkretsene er like	3
Andre forklaringer som ikke er faglig korrekte	21
B > A. B har større areal siden omkretsen er lengre	3
Andre ikke-kategoriserte forklaringer	18

Tabell 43: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 15d i 9. klasse

Vi legger merke til at omtrent en femdel av elevene ikke har forklart hvordan de har tenkt. Det er også stor variasjon i hvordan elevene har forklart sine resonnementer. En stor gruppe, 18 %, har gitt forklaringer som vi ut fra faglige kriterier har valgt å ikke kategorisere. Noen elever har forsøkt å beregne arealet av de to figurene for å vise at de har samme areal, eller de har skrevet forklaringer som begrunner hvorfor disse arealene er like store. Argumentasjonen går for eksempel på at trekantene har samme grunnlinje og høyde.

Den vanligste formen for korrekt argumentasjon, 11 %, finner vi hos elever som tar utgangspunkt i at det er bare plasseringen av de to trekantene som er endret. Disse elevene skriver at trekantene ikke forandrer areal ved at de blir flyttet på. Vi finner også i denne gruppen elever som ser for seg at en snur på trekantene i en av figurene og dermed får to like figurer.

Arealet er likt for det er bare
trekantene også som er snudd en
annen veg.
Men arealet forsvinner ikke før, vi
fjerner noe fra figuren.

Elevsvar 21: Eksempel på forklaringer som er basert på å «snu på» trekantene

Noen elever skriver at trekantenes arealer er like store. Disse tekstene er knappe, og store deler av argumentasjonen er underforstått. Disse elevene har likevel forstått noe vesentlig når det gjelder å sammenligne størrelser av gitte arealer; det kan være deres språklige framstillingsevne – deres evne til å føre et matematisk resonnement – som kommer til kort. Det samme kan en hevde om forklaringer som *«Det ser sånn ut»* og *«De er like store»*. 9 % av elevene gir forklaringer av denne typen.

Noen elever hevder at de to figurene har samme areal fordi de har samme omkrets. Dette er elever som i a-spørsmålet har oppgitt at det er like langt rundt de to figurene. Det er under halv-

I denne oppgaven må elevene telle ruter for å bestemme arealet av figuren. Vi ser på denne typen aktiviteter som svært viktig i oppbygging av arealbegrepet – arealberegning er sammenligning av flater ved hjelp av en enhet. I utgangspunktet er det å finne arealet det samme som å telle antallet enheter en trenger for å dekke figuren. Kvadratiske ruter er oftest praktiske enheter for dette formålet. Figuren er tegnet slik at det er mulig å telle halvparter av en eller to ruter.

Oppgave 6a	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	13	13
11 cm^2 med eller uten benevning (Korrekt svar)	32	40
10; 10,5; 11,5 eller 12	16	18
16	7	3
15	3	1
Tall mellom 16,9 og 18,5	5	3
28	1	1

Tabell 44: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 6a i 6. klasse og 11a i 9. klasse

De fire første svarkategoriene i tabell 44 indikerer at disse elevene bruker rutene på en eller annen måte for å finne løsningen på oppgaven. Svar som 10, 10,5, 11,5 og 12 tyder på at de fleste av disse elevene forsøker å telle hele og halve ruter med en eller annen tellefeil.

Svaret 16 kommer trolig fram ved at en teller alle ruter som omkretsen av figuren går gjennom. Disse elevene bruker altså en form for lengdemåling. Tallet 15 er trolig et resultat av en lignende strategi. En del elever svarer med desimaltall mellom 16,9 og 18,5. Disse svarene er også en indikasjon på at elevene har målt omkretsen av figuren. Enkelte elever skriver målene på oppgavearket, slik at det er enkelt å se at de faktisk har målt. Noen få elever svarer 28. Bredden på figuren er sju ruter, og høyden er fire ruter. De elevene som har fått svaret 28, kan ha multiplisert disse tallene for å finne arealet av figuren.

I oppgaveteksten er det gitt at arealet av en rute er 1 cm^2. Det er ikke presisert at en skal gi svaret med denne enheten.

Oppgave 6a. Bruk av enhet	6. klasse	9. klasse
cm^2	40	66
cm	20	5

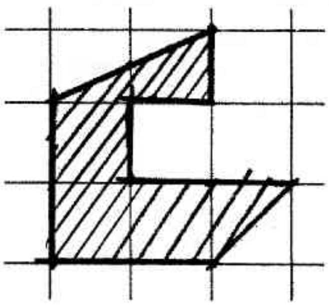
Tabell 45: Prosentvis fordeling av bruk av enhet i svarene i oppgave 6a i 6. klasse og 11a i 9. klasse

Det andre spørsmålet i denne oppgaven vil gi oss tilsvarende informasjon som i a-spørsmålet. Kan elevene lage figurer som har det gitte arealet, ved å *telle* ruter?

Oppgave 6b	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	9	11
Korrekt tegnet figur med areal 4,5 cm^2	45	62
Figur der arealet ligger i nærheten av 4,5 cm^2	7	5
En lukket eller åpen figur som har omkrets 4,5 cm eller går over 4,5 ruter	10	5
En figur som kopierer formen til figuren i a-spørsmålet	3	1

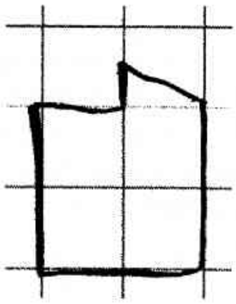
Tabell 46: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 6b i 6. klasse og 11b i 9. klasse

Å tegne en figur med et bestemt areal krever at en kan se for seg hvorledes formen til denne figuren kan være. Det er flere elever som har besvart dette spørsmålet enn a-spørsmålet i denne oppgaven. Av elevbesvarelsene ser vi at mange har gjort seg stor flid når de har tegnet. Noen har fargelagt figuren sin, andre har lagt vekt på å lage en figur med spennende form.



Elevsvar 23: Eksempel på en kreativ og korrekt løsning

Vi finner mange ulike løsninger på dette spørsmålet. Noen elever har hatt problemer med å tegne en halv rute, og de har tegnet fire eller fem hele ruter, eller de har delt opp en rute som tydelig ikke er lik en halv rute. Elevsvar 24 er et eksempel på dette.

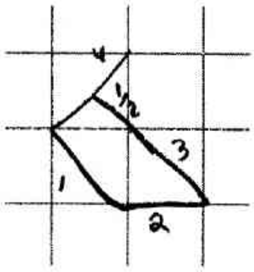


Elevsvar 24: Eksempel på vansker med å tegne en halv rute

Generelt finner vi to hovedtyper av feil i elevsvarene:

- svar som betrakter lengde i stedet for areal
- svar som fokuserer på form

Elever som fokuserer på lengde, tegner en lukket eller åpen figur som de forsøker å få til å bli 4,5 cm eller 4,5 ruter lang.

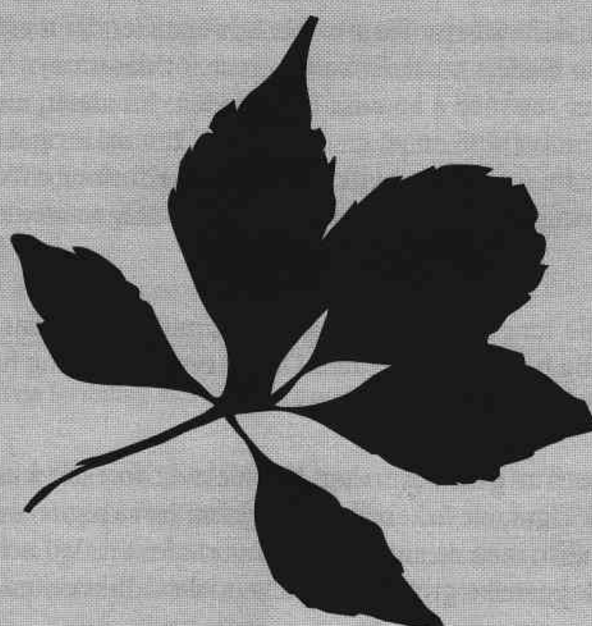


Elevsvar 25: Eksempel på elevsvar som fokuserer på lengde

I enkelte av besvarelsene kan vi se spor av at elevene har forsøkt flere ganger, det er vanskelig å tegne en lukket figur som har en bestemt omkrets. Enkelte elever har løst dette ved å tegne en figur med areal 1,5 ruter (cm^2). Andre elever har gitt opp å følge rutenettet og har prøvd seg fram til de har funnet en figur som er noenlunde «riktig» etter deres forståelse.

Noen elever har tegnet en åpen figur, en linje som de har gitt riktig lengde. Vi finner også elever som med stor flid har forsøkt å kopiere formen på figuren i a-spørsmålet. Noen av elevene løser dette ved å forminske figuren, mens andre tegner den like stor.

Oppgave 22
I arbeidet sitt har en botaniker bruk for å beregne arealet til et blad fra en plante som vist på figuren:



Forklar hvordan dette kan gjøres:

Oppgaveeksempel 23: Oppgave 22 i 9. klasse

Oppgave 22 skiller seg fra de andre oppgavene som undersøker elevenes arealbegrep. I de andre oppgavene bes elevene om å utføre en handling: å telle opp, å tegne og å finne eller regne ut et areal. I denne oppgaven skal elevene foreslå en metode for å finne arealet av en ikke-regulær figur. Det er denne kunnskapen vi ønsker å undersøke.

Oppgave 22	9. klasse
Ubesvart – ikke skrevet tekst	41
Bruke et rutenett	9
Dele opp bladet i kjente figurer	7
Bruke teknologi	1
Innskrive bladet i en eller flere regulære figurer	5
Skrive formler – ikke forklart hvorfor/hvordan	1
Finne omkretsen og bruke den til å beregne arealet	2
Måle lengde for å finne omkretsen	1
Andre forklaringer knyttet til lengdemåling uten at *bruken* av lengdemålingene blir forklart	4

Tabell 47: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 22 i 9. klasse

Elevene opplever denne oppgaven som vanskelig, det viser den store andelen som ikke har besvart oppgaven (41 %). I tillegg er det en stor gruppe elever som skriver forklaringer som er svært knappe eller uklare. Disse forklaringene lar seg ofte ikke kategorisere uten mange usikre tolkninger. Derfor er slike tekster ikke omtalt her (30 %).

Vi kan dele inn elevenes forklaringer i fire grupper:

- forklaringer som bygger på god metodisk forståelse: bruk av rutenett, oppdeling av figuren eller bruk av elektronisk programvare (PC)
- bruk av grove overslag
- bruk av formler
- måling av lengder

Blant elevene som viser god metodisk forståelse for arealberegningen, er det mest vanlig å foreslå å bruke et rutenett for å telle opp bladets areal. Enkelte elever forklarer nøye hvorledes rutenettet kan brukes, mens andre nøyer seg med å henvise til metoden. En annen metode er å dele opp bladet slik at en får regulære figurer som en på en enkel måte kan måle og dermed beregne arealene til. Forklaringene spenner fra å skissere hvilke geometriske former en kan dele bladet opp i, til mer skissepregede forklaringer. Noen få elever foreslår å beregne arealet ved hjelp av teknologi.

Noen elever som skriver om å måle lengder, hevder at en må finne omkretsen. Disse elevene tror at figurens omkrets også entydig bestemmer arealet. Denne typen tenkning har vi også pekt på i diskusjonen av oppgaveeksempel 21.

Noen forklaringer er basert på skisser av grove overslag. Noen elever foreslår å innskrive bladet i en eller annen regulær geometrisk figur, en sirkel eller en firkant, og så regne arealet av denne. Noen skriver at en da må trekke fra litt, men de antyder ikke hvorledes en skal beregne hvor stor del dette er. Overslagene blir således ganske grove, men eleven viser allikevel en tydelig forståelse for arealberegning.

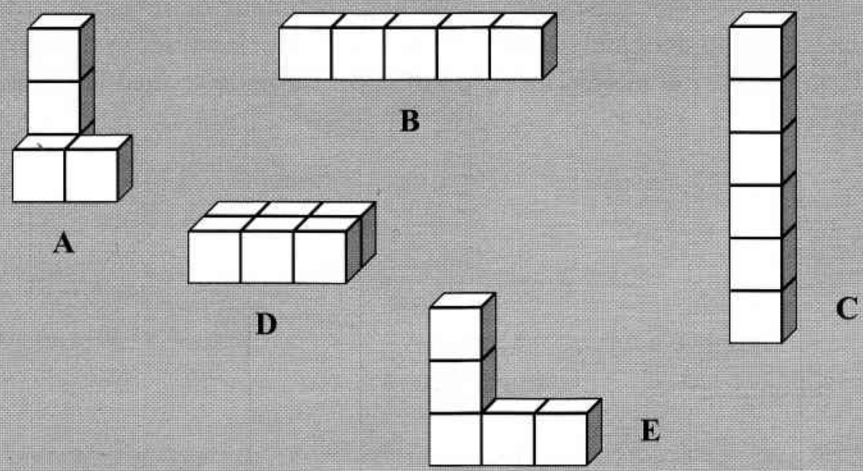
Noen elever skriver formler eller brokker av formler. Dette er formler som kan brukes til å regne arealet av regulære figurer som trekanter, rektangler og sirkler. Det er mulig at disse elevene tenker på lignende måte som den gruppen som er nevnt i avsnittet ovenfor, men dette framgår ikke av forklaringer som «$g \cdot h$».

4.2 Volum

Det er bare en oppgave i denne oppgavesamlingen som undersøker elevenes volumbegrep. I tillegg til oppgavesamlingen i geometri kan en bruke oppgavene og veiledningsheftet til «Måling og enheter», se Støren (2001).

Oppgave 9 er en enkel oppgave, der en ønsker å se om elevene teller antall terninger i tårnene, eller om de ser på terningsider, bredden på tårnet eller bruker andre kriterier som ikke forteller hvor stort volum figuren har. Ordet volum er brukt i oppgaveteksten.

Oppgave 9
Hver av terningene i de sammensatte figurene er like store.
Sett kryss ved den eller de figurene som har det største volumet.



Oppgaveeksempel 24: Oppgave 9 i 6. klasse

Oppgave 9	6. klasse
Ubesvart	5
Krysset av for både figur C og D	59
Krysset av bare for figur C	17
Krysset av bare for figur D	6
Krysset av for figur B og C	2
Krysset av for figur B, C og D	1

Tabell 48: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 9 i 6. klasse

To av «tårnene» har samme volum, seks klosser, mens de tre andre har volumet 5. 59 % av elevene har krysset av for begge figurene med volum 6. Blant dem som krysser av for bare en av disse, er det et klart flertall for figur C.

5 Tema IV: Speiling, symmetri, rotasjon og mønstre

I dette kapittelet vil vi diskutere elevenes forståelse av speiling, symmetri og rotasjon. Videre vil vi drøfte mønstre i noen grad. Når det gjelder å arbeide med mønstre, henviser vi til kapittelet med undervisningsaktiviteter. Koordinatsystemet blir tatt opp i forbindelse med at vi omtaler rotasjon om et punkt.

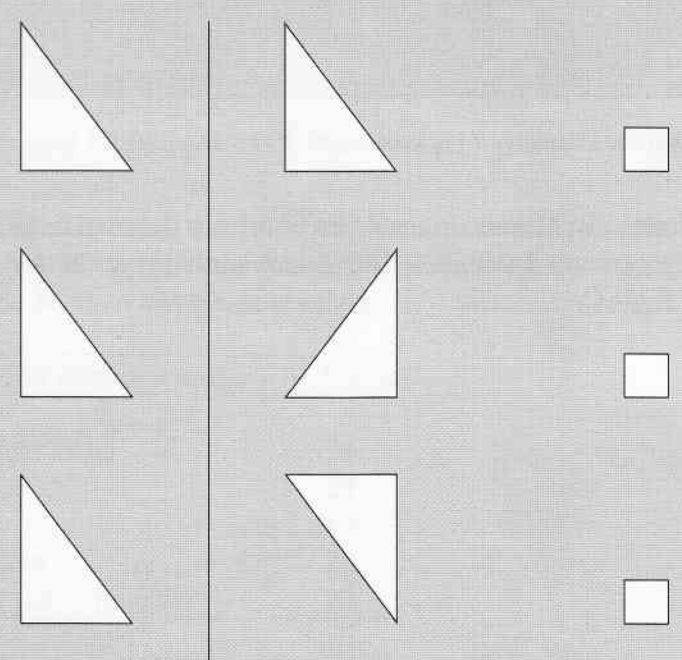
5.1 Speiling

Speiling	6. klasse	9. klasse
Gjenkjenne speiling	Oppgave 4	Oppgave 7
Speiling om en linje	Oppgave 13a–d	Oppgave 21a–d

Tabell 49: Oppgaver om speiling

I denne oppgaven ønsker vi å undersøke om elevene skiller speiling fra rotasjon og parallellforskyving. Det kan være naturlig å se tilbake på elevens besvarelse av denne oppgaven når vi seinere studerer de svarene han gir på de mer omfattende oppgavene om speiling.

Oppgave 4
Hvilke av tilfellene nedenfor viser et speilbilde av figuren til venstre? Sett kryss.



Oppgaveeksempel 25: Oppgave 4 i 6. klasse og oppgave 7 i 9. klasse

Oppgave 4	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	0	0
Figur B (Korrekt svar)	74	82
Figur A	12	9
Figur C	6	4
Figur B og A	4	1
Figur B og C	2	2

Tabell 50: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 4 i 6. klasse og oppgave 7 i 9. klasse

Vi ser at de fleste elevene kan identifisere hvilken av figurene som viser en speiling. Videre legger vi merke til at det er vanligst å forveksle parallellforskyving med speiling. Noen av elevene krysser også av for begge disse alternativene.

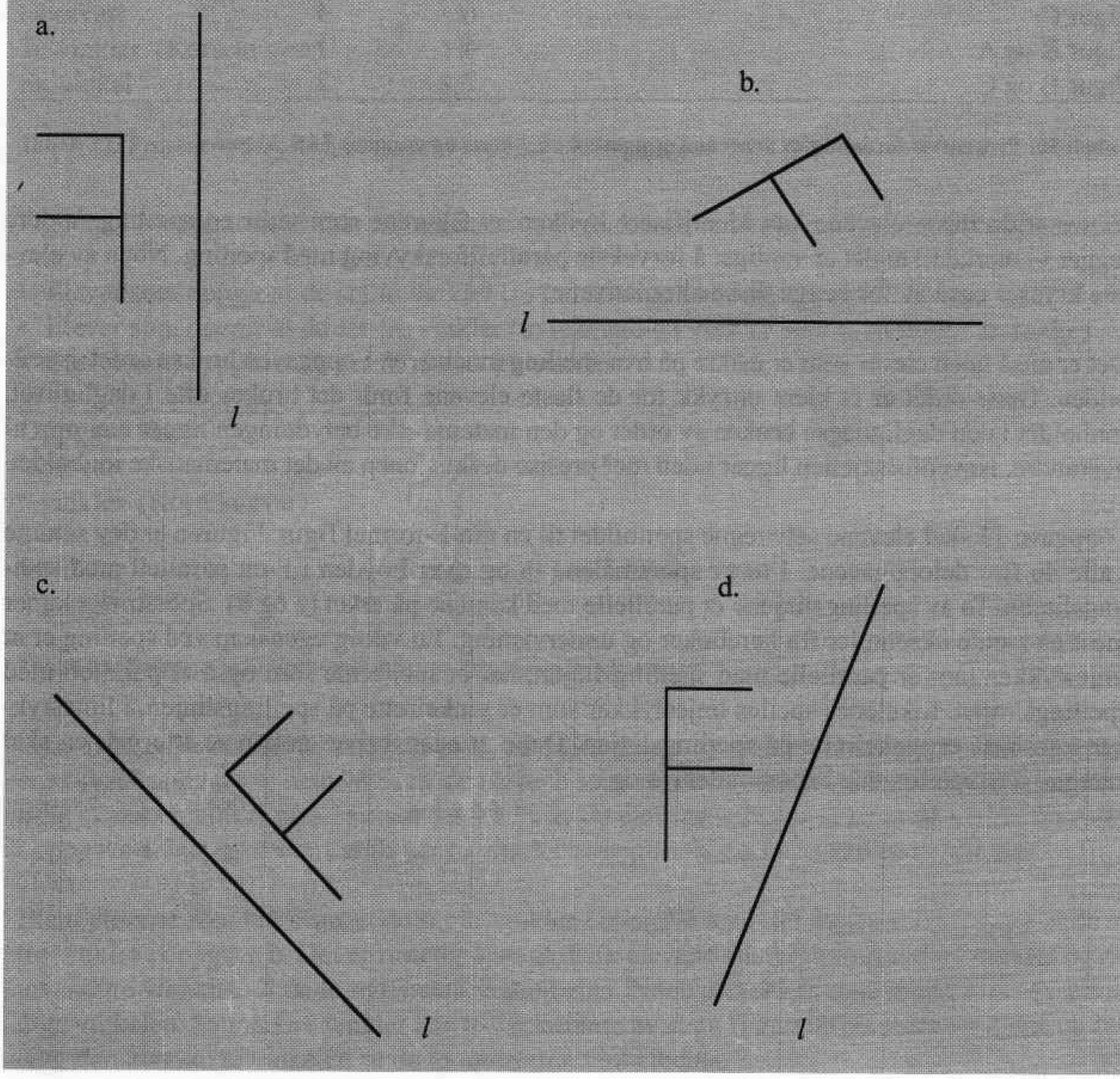
Det er altså noen elever som er usikre på hva speiling innebærer. I oppgaven brukes ordet «speilbilde». Dette ordet er et kjent uttrykk for de fleste elevene fordi det brukes ofte i dagliglivet. Innholdet i den dagligdagse bruken av ordet og den matematiske betydningen ligger nær opp til hverandre. Hovedforskjellen ligger i den mer presise definisjonen av det matematiske innholdet.

I oppgave 13 skal elevene selv tegne speilbildet til en gitt F-formet figur. Figuren er den samme i alle de fire deloppgavene. I to av spørsmålene (a og c) er høyden i F-en parallell med speilingslinjen. To av speilingslinjene er parallelle med kantene på arket (a og b). Spørsmål a ligner mest på kjente eksempler fra lærebøker og undervisning. En viktig egenskap ved speiling er at linjestykker som er parallelle med speilingslinjen, har et speilbilde som også er parallell med speilingslinjen. Likeledes speiles linjestykker som er vinkelrette på speilingslinjen, i linjestykker som også er vinkelrette på speilingslinjen. Dette er egenskaper en kan se etter når en skal kategorisere speilingene i spørsmålene a og c.

Oppgave 13

Hver av figurene som er tegnet i denne oppgaven, skal speiles om linjen *l*.

Tegn speilbildet for hver av figurene.



Oppgaveeksempel 26: Oppgave 13 i 6. klasse og oppgave 21 i 9. klasse

Vi presenterer først fordelinger av elevenes svar på spørsmålene a og c.

Oppgave 13a	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	6	16
Korrekt speilt	57	58
Avstandene til speilingslinjen er unøyaktige (i hovedsak godkjent)	8	9
Speilt figur er unøyaktig tegnet eller plassert	7	3
Figuren er parallellforskjøvet	8	3
Både speilingslinjen og figuren er speilt	5	4

Tabell 51: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 13a i 6. klasse og 21a i 9. klasse

I spørsmål a er det den lengste linjen i figuren som skal speiles parallell med speilingslinjen. Vi ser at nærmere 60 % av elevene på begge klassetrinn speiler figuren korrekt. I tillegg er det i underkant av 10 % som viser en tilnærmet korrekt speiling, men de tegner ikke speilbildet i korrekt avstand fra speilingslinjen, eller størrelsen av speilbildet er ikke lik størrelsen til den opprinnelige figuren. Det kan se ut som ikke alle elever har hatt tilgang til linjal, og det kan ha bidratt til unøyaktige speilte figurer. Omtrent 70 % av elevene på begge klassetrinn forstår prinsippene for speiling av figurer i denne enkle posisjonen. Vi finner i hovedsak to feiltyper i elevsvarene på dette spørsmålet. Den ene typen er at figuren blir parallellforskjøvet i stedet for speilt, og den andre er at en speiler både speilingslinjen og den opprinnelige figuren. Vi legger merke til at andelen av elever som ikke besvarer oppgaven, er mye høyere i 9. enn i 6. klasse.

En sammenligning av hvordan den enkelte elev svarte på oppgavene 4 og 13, viser at 79 % av de elevene i 6. klasse som krysset av for riktig svaralternativ i oppgave 4, *også* tegnet en godkjent speiling i spørsmål 13a. Tilsvarende tall for 9. klasse er 76 %.

Hvilken effekt har det så at speilingslinjen ikke er parallell med en sidekant på arket? Spørsmål c kan gi oss noe informasjon om dette.

Oppgave 13c	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	7	18
Korrekt speilt	49	55
Avstandene til speilingslinjen er unøyaktige (i hovedsak godkjent)	7	5
Speilt figur er unøyaktig tegnet eller plassert	15	6
Figuren er parallellforskjøvet	8	4
Både speilingslinjen og figuren er speilt	5	4

Tabell 52: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 13c i 6. klasse og 21c i 9. klasse

Av tabell 52 ser vi at andelen svar som er kodet som korrekt speilt, er litt lavere i dette spørsmålet enn i spørsmål a. Dessuten har vi en høyere andel av unøyaktig plassering sammenlignet med spørsmål a. Når vi studerer hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi en høy grad av konsistente svar mellom disse spørsmålene. For eksempel er det 78 % av de elevene i 6. klasse som speiler korrekt i a-spørsmålet, som *også* gir en korrekt speiling i c-spørsmålet. I tillegg er det 14 % av dem som speiler korrekt i a-spørsmålet, som utfører en speiling som er litt feilplassert i forhold til speilingslinjen. Alle disse elevene har en god forståelse av speiling i en linje når figuren er plassert som i denne oppgaven. I 9. klasse er det hele 86 % av de elevene som speiler korrekt i a-spørsmålet, som *også* gir en korrekt speiling i c-spørsmålet. Andelen av feilplasseringer i forhold til speilingslinjen er lavere i 9. klasse enn i 6. klasse. Tilsvarende konsistens i svarene finner vi også for de elevene som parallellforskyver.

Vi kan med stor sikkerhet hevde at retningen av speilingslinjen i forhold til kantene på arket har liten påvirkning på elevenes prestasjoner i speiling.

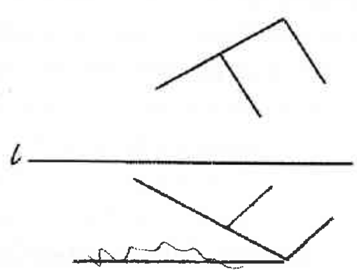
Oppgave 13b	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	8	18
Korrekt speilt	26	27
Avstandene til speilingslinjen er unøyaktige (i hovedsak godkjent)	2	0
Speilt figur er unøyaktig tegnet eller plassert	13	12
Speiler figuren om en linje parallell med høyden i figuren F	10	13
Speilt figur er parallell med speilingslinjen	3	2
Figuren blir forandret ved speilingen (forhold mellom linjer og vinkler)	3	3
Parallellforskyving	9	5
Ny figur er rotert i forhold til den gitte figuren	5	3

Tabell 53: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 13b i 6. klasse og 21b i 9. klasse

I spørsmålene b og d er ikke høydene i figuren som skal speiles, parallelle med speilingslinjen. Svarene på b-spørsmålet viser at omtrent 40 % av elevene på begge klassetrinn forstår prinsippene for speiling av figurer som er plassert slik at linjestykkene er verken parallelle med eller vinkelrette på speilingslinjen. Sammenlignet med en prosentandel på mer enn 70 for a- og c-spørsmålene viser det at figurens posisjon i forhold til speilingslinjen har stor innvirkning på elevenes svar.

Når vi studerer hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi at hele 96 % av de elevene som speilte korrekt på b-spørsmålet, *også* hadde vist en korrekt speiling i oppgave a, mens det motsatt var bare 42 % av dem som svarte rett på a-spørsmålet, som *også* hadde tegnet en godkjent speiling i b-spørsmålet. På bakgrunn av dette og lignende observasjoner når vi kombinerer elevenes svar på disse fire spørsmålene, kan vi hevde at retningen til speilingslinjen har en avgjørende betydning for elevenes løsningsfrekvens.

Enkelte elever endrer formen på figuren ved speilingen, slik elevsvar 26 er et eksempel på.



Elevsvar 26: Eksempel på at figuren endrer form under speilingen

Det er naturlig å tenke seg at vi vil finne tilsvarende effekt for spørsmål d. Det er to forhold som en kunne tenke seg ville ha innvirkning på elevenes svar i spørsmålene b og d. For det første er retningen til speilingslinjen i spørsmål d ikke parallell med noen av kantene på arket, og for det andre er det lengste linjestykket i F-en parallell med den ene siden av arket.

Oppgave 13d	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	7	21
Korrekt speilt	10	11
Avstandene til speilingslinjen er unøyaktige (i hovedsak godkjent)	2	1
Speilt figur er unøyaktig speilt eller plassert	4	8
Speiler figuren om en linje parallell med høyden i figuren F	29	29
Speilt figur er parallell med speilingslinjen	11	8
Figuren blir forandret ved speilingen (forhold mellom linjer og vinkler)	1	2
Parallellforskyving	10	6
Ny figur er rotert i forhold til den gitte figuren	4	2

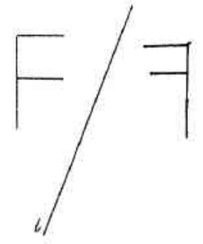
Tabell 54: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 13d i 6. klasse og 21d i 9. klasse

Når vi sammenligner fordelingen av elevenes svar på b- og d-spørsmålet, tabell 53 og 54, ser vi at andelen av elever som viser at de forstår prinsippene for speiling av figurer plassert slik at linjestykkene verken er parallelle med eller vinkelrette på speilingslinjen, har gått ned fra omtrent 40 % i b-spørsmålet til i underkant av 20 % i d-spørsmålet. Det ser altså ut til at den tilleggsutfordringen en møter i d-spørsmålet ved at speilingslinjen er tegnet skrått på arket, fører til en halvering av rette svar i forhold til b-spørsmålet.

Den største elevgruppen er de som speiler om en tenkt speilingslinje parallell med høyden i figuren. Denne linjen er parallell med sidekanten på arket (vertikalt), noe som nok bidrar til at dette oppleves som riktig. Om vi i tillegg regner med elever som lar speilbildet bli parallelt med speilingslinjen, er andelen elever som forsøker å skape parallellitet ved speiling, svært høy for denne oppgaven sammenlignet med de tre andre.

Elevsvar 27 er ett eksempel på løsninger der eleven har speilt om en (usynlig) vertikal linje.

d.



Elevsvar 27: Eksempel på speiling om en vertikal linje

I elevsvar 28 har eleven tegnet speilbildet slik at den vertikale delen av figuren er parallell med speilingslinjen.

d.

Elevsvar 28: Eksempel på at bildet av figuren blir parallelt med speilingslinjen

En del elever parallellforskyver figurene i stedet for å speile dem. Det er flere sjetteklassinger enn niendeklassinger som gjør dette.

Oppgave 13 Parallellforskyvinger	6. klasse	9. klasse
Spørsmål a	8	3
Spørsmål b	9	5
Spørsmål c	8	4
Spørsmål d	10	6

Tabell 55: Prosentvis fordeling av bruk av parallellforskyvinger på spørsmålene a–d

Andelen av elever som speiler alle figurene korrekt, er nesten den samme i 6. og 9. klasse. Det samme er andelen av elever som enten ikke besvarer oppgaven, eller som gjør feil på alle fire deloppgavene. Oppgaven er den siste eller den nest siste i heftene, slik at det er trolig at noen av elevene som ikke har besvart oppgaven, rett og slett ikke har rukket det.

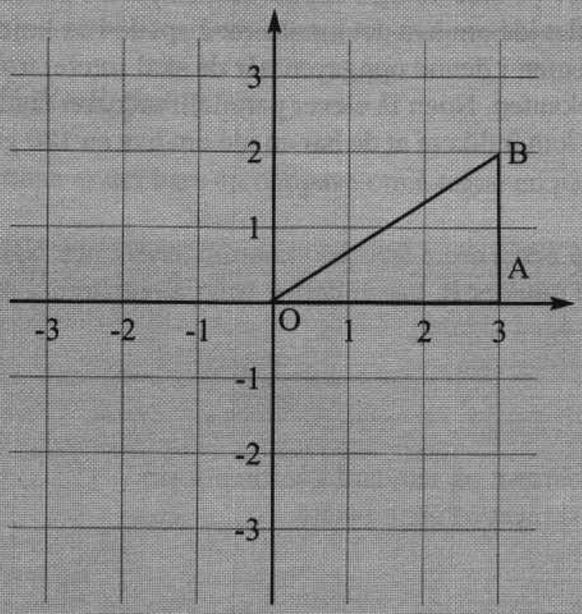
Oppgave 13	6. klasse	9. klasse
Elever som har speilt alle figurene korrekt	7	9
Elever som ikke har speilt *noen* figurer korrekt	30	22
Elever som ikke har besvart noen av delspørsmålene	6	14

Tabell 56: Prosentvis fordeling av elever som speiler alle eller ingen figurer korrekt, og elever som ikke har besvart noen av oppgavene på de to klassetrinnene

5.2 Rotasjon

I oppgavesamlingen er det med bare én oppgave som undersøker elevenes forståelse av rotasjon. Oppgaveeksempel 27 er brukt i 9. klasse.

Oppgave 12



Trekanten OAB skal dreies 180° om punktet O.

a. Tegn den nye plasseringen av trekanten inn i koordinatsystemet.

b. Hva blir de nye koordinatene til punktet B?

Svar: ________________

Oppgaveeksempel 27: Oppgave 12 i 9. klasse

I spørsmål a skal elevene tegne inn den nye plasseringen av trekanten. For å kunne plassere trekanten riktig må de kjenne til hva som ligger i det matematiske begrepet rotasjon. De må også vite hva det vil si å dreie en 180 graders vinkel. Det er rimelig å anta at koordinatsystemet i oppgaven kan skape vansker for en del elever, men samtidig er det enklere å tegne en nøyaktig figur når en har gitt et rutenett.

Oppgave 12a	9. klasse
Ubesvart	28
Korrekt tegnet figur, dreid 180°	20
Figuren er speilt om y-aksen	19
Figuren er speilt om x-aksen	3
Figuren er parallellforskjøvet	4
Elevene forlenger linjen OB, men tegner ingen ny figur	4

Tabell 57: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 12a i 9. klasse

Det er flere som har forsøkt å speile figuren enn å rotere den. Den store andelen av elever som ikke besvarer oppgaven, viser at de opplever den som vanskelig.

Blant de elevene som speiler figuren, er det mest vanlig å speile om y-aksen. Da speiler en på samme måte som i oppgaveeksempel 25 på side 56 og i oppgaveeksempel 26 på side 58. Disse elevene har vist at de har en godt utviklet idé om hva det innebærer å speile i en linje. Mange av disse elevene bruker den samme strategien i denne oppgaven når de skal rotere, trolig fordi de ikke vet hva det vil si å dreie denne trekanten. Noen få elever parallellforskyver figuren. Den er ofte flyttet ned i tredje kvadrant. Dette kan indikere at de har en idé om hva en 180 graders rotasjon vil føre til.

Mange elever gir andre løsningsforslag enn å dreie figuren i koordinatsystemet. Når det gjelder spørsmålet om de nye koordinatene til punktet B, har vi derfor valgt å registrere i hvilken grad de har skrevet korrekte koordinater til egen tegning.

Oppgave 12b	9. klasse
Ubesvart	29
Korrekte koordinater til egen tegning skrevet på standard koordinatform	8
Korrekte koordinater til egen tegning skrevet på annen måte	22
Forveksler x- og y-koordinatene	7
Kun korrekt x-koordinat	5
Kun korrekt y-koordinat	2
Skriver tre tall (hjørner)	7

Tabell 58: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 12a i 9. klasse

Svarene viser at elevene er usikre på konvensjonen for å skrive koordinatene til et punkt, ikke bare hvorledes det formelt skrives, men også hva koordinatene refererer til. Noen elever skriver for eksempel tre tall, «0–2–3», og mener sannsynligvis at hvert tall representerer et av hjørnene.

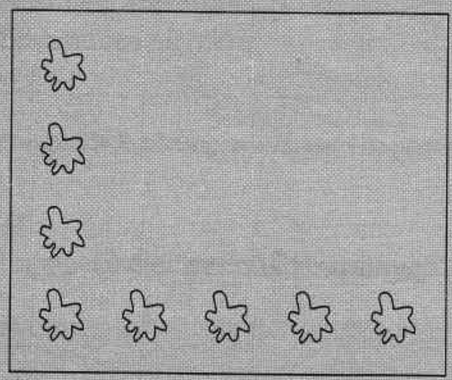
Blant elevene som har lest av punktet riktig, har noen gitt koordinaten på korrekt form, andre har «listet opp» koordinatene. En grunn til dette kan være måten spørsmålet er formulert på, eller at eleven skriver de to avlesingene som to svar, for eksempel: *«–3 og –2»*. Usikkerhet med hensyn til konvensjoner er trolig årsaken til at noen elever forveksler x- og y-koordinatene. Det er også en del elever som bare gir den ene koordinaten. Det er som regel x-koordinaten som er korrekt.

5.3 Mønstre

Det er bare en oppgave om mønstre i oppgaveheftene. Vi vil anbefale at lærerne lar elevene arbeide med mønstre ved å bruke fliser og brikker. Se også aktivitetene i del 2 av dette heftet. I tillegg har mange lærebøker fine aktiviteter der mønstre blir brukt til de ulike begrepene vi har behandlet i dette heftet.

I oppgaveeksempel 28 skal elevene fullføre et mønster bestående av rader og kolonner.

Oppgave 11
Tegningen viser et jordstykke hvor det er plantet frukttrær. Bonden ønsker å plante flere slike trær slik at radene blir fylt opp.



a. Hvor mange nye trær planter han? ____________

b. Vis ved regning eller forklar hvordan du kom fram til svaret.

Oppgaveeksempel 28: Oppgave 11 i 6. klasse

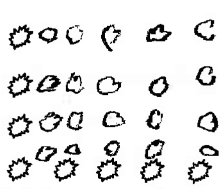
Oppgaveteksten forteller ikke hvorledes svaret skal gis. Besvarelsene viser at mange har tegnet inn flere trær i tillegg til å oppgi et tallsvar, men det er også mange elever som bare gir et tallsvar.

Oppgave 11	6. klasse
Ubesvart	2
12 (korrekt svar)	59
20	12
8	5
16	4
6	4

Tabell 59: Prosentvis fordeling av svarene i oppgave 13 i 6. klasse

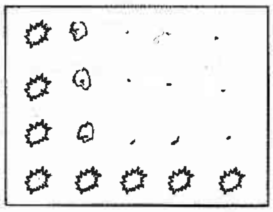
Det kan være at elever som har tegnet på illustrasjonen av oppgaven, har ment at dette er svar på oppgave 11b, hvor de blir bedt om å forklare hvordan de tenkte for å komme fram til svaret på oppgave 11a.

En del elever er usikre på hvorledes de skal tolke illustrasjonen: Hvor mange trær skal det være i en rad og hvor mange rader? Eksempelet nedenfor viser dette:



Elevsvar 29: Eksempel på elevsvar med 20 trær

Til tegningen har eleven skrevet *«20 trær. Jeg har tegnet nye slik at radene er fylt opp»*. Denne eleven har kommet fram til at det må plantes 20 trær, for han leser illustrasjonen slik at det skal plantes fire nye rader hver med fem trær. Andre elever har vansker med å tolke teksten selv om de plasserer inn korrekt antall trær:



a. Hvor mange nye trær planter han ? 12 Nye og til sammen 20

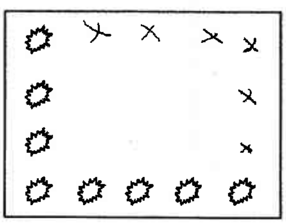
Elevsvar 30: Eksempel på korrekt forklaring

Elevenes forklaringer viser at de ser to ulike løsninger på denne oppgaven, uavhengig av hvor mange trær de mener bonden skal plante. I hovedsak kan vi skille mellom disse tilnærmingene:

- de som fyller opp jordet med trær
- de som planter trær rundt jordet

De fleste tegner rader med trær, men noen elever er ikke så systematiske, de tegner trær i et vilkårlig mønster eller forsøker å fylle flaten med så mange trær som mulig.

Det er også noen som leser illustrasjonene slik at de fortsetter å plassere trær langs randen på jordet. Det er noe varierende i hvilken grad elevene lar antall trær som plasseres på de ulike sidene, stemme overens med antallet som allerede er tegnet inn. Når elevene lager et mønster som visuelt sett tilpasses illustrasjonen i oppgaven, kan dette skyldes at de tolker illustrasjonen, ikke oppgaveteksten, for å finne ut hva de skal gjøre.



a. Hvor mange nye trær planter han ? 6 nye

Elevsvar 31: Eksempel på svar der elevene «rammer inn» jordet med trær

Vi ser også eksempler på at elevene forsøker å tegne flest mulig trær. Teksten er ikke satt i sammenheng med illustrasjonen. Noen elever har løst b-spørsmålet ved å tegne det antall trær de mener er riktig, på illustrasjonen i oppgaven, andre har skrevet og/eller tegnet i svarruten.

Hos de elevene som mener at det er nødvendig med 12 nye trær, finner vi fire ulike strategier:

- eleven har tatt utgangspunkt i antall rader og antall trær per rad, slik det er vist i illustrasjonen, og bruker uttrykk som for eksempel $5 \cdot 4 - 8$
- eleven stiller opp enkle regneuttrykk for å regne ut antall trær som skal plantes, i hovedsak $3 \cdot 4$, uten at han forklarer hvorledes han har kommet fram til regneuttrykkene

- forklaringer som viser ulike tellestrategier inklusive det å fullføre tegningen og telle på den
- påstander som *«jeg ser det»*

Det er vanskelig ut fra elevtekstene å si hva elever som kommer fram til at det trengs 20 trær, har tenkt. Disse tekstene er ofte svært knappe, ofte bare et oppstilt regneuttrykk:

- 5 · 4, som regel uten noen forklaring som forteller hvorfor eleven har stilt opp dette uttrykket
- påstander som *«jeg telte»*

Vi finner også svar der elevene har fylt opp jordet med trær og kommet fram til et annet antall enn 12 eller 20 nye trær. Ofte virker det som disse elevene har tegnet inn de nye trærne vilkårlig, og det kan være vanskelig å finne et mønster eller en sammenheng.

Oppgave 11b. Forklaringer	6. klasse
Ubesvart	7
12 trær: Et uttrykk som tar utgangspunkt i antall rader og antall trær per rad	6
12 trær: 3 · 4	15
12 trær: Tellestrategier	27
12 trær: «Jeg ser det»	4
20 trær: 5 · 4	9
20 trær: «Jeg telte»	2

Tabell 60: Prosentvis fordeling av forklaringer til 12 og 20 trær i oppgave 11b i 6. klasse

Elever som tenker seg at en planter en krans av trær, kan ha stolt for mye på inntrykket de får av illustrasjonen i oppgaven. Mange av disse elevene har tegnet trærne de ser for seg. Noen skriver tekst der de forsøker å forklare hvorfor det må være et visst antall trær. Elever som forklarer hvorfor det må være åtte eller 16 trær, bruker samme modell. Noen legger til åtte nye trær, mens andre også teller med de trærne som allerede er plantet.

DEL 2

IDEER TIL UNDERVISNINGSAKTIVITETER

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av ulike geometriske begreper. Analysen og diskusjonen av disse vanskene og misoppfatningene har stått sentralt i del 1.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på flere ulike måter i undervisningen. I KIM-heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning* (Brekke 1995) har vi diskutert diagnostisk undervisning, som har det særpreget at feil og misoppfatninger som elevene gjør, brukes på en konstruktiv måte. Diskusjoner av ideene som knytter seg til begrepene, og tid til å reflektere over det en gjør, står sentralt i denne arbeidsmåten. De fleste av aktivitetene er laget med dette som siktemål. Vi vil derfor tilrå at en leser kapittel 3 i introduksjonsheftet før en begynner med aktivitetene i denne samlingen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi i kapittel 2 ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner.

6 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom en ønsker at elevene skal forstå matematikk, slik at faget får mening for dem, må de få anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk is future thinking.

Tradisjonell undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil en assosiere diskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Å be elever presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og der disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel:

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsninger blir da assosiert med gruppen og ikke med den enkelte elev.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere slike diskusjoner. Muntlig arbeid er ofte begrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren etterfulgt av korte svar fra elevene. Elevene får lite anledning til å beskrive og utvikle egne ideer, og når slike anledninger byr seg, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn på innholdet i bidraget sitt. Nedenfor peker vi på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klassen.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det *utforskende stadiet* i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å stå imot trangen til å blande seg inn for å peke på at svaret er riktig eller galt. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist at klasser gjør det klart bedre på tester når læreren ikke for tidlig prøver å «avslutte» diskusjonene med å peke på det riktige svaret eller den riktige måten å tenke på for eleven. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det rette tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 *Være en ordstyrer eller tilrettelegger som*
- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte en som snakker
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer

2 *Enkelte ganger være en «utspørrer» eller «provokatør» som*
- introduserer en ny ide når diskusjonen er laber
- følger opp et synspunkt
- spiller «djevelens advokat»
- fokuserer på et viktig begrep
- unngår å stille multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar

3 *Ikke være en dommer eller «vurderer» som*
- vurderer alle svar med «ja», «godt», «interessant» eller lignende. Slikt hindrer ofte andre i å komme fram med alternative ideer og oppfordrer til en «ytre akseptabel» framføring i stedet for en utforskende dialog.

Hensikten med denne lista er ikke å vise at det alltid er upassende å evaluere elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med «spørsmålsgjetting», der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende dialog, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom en må evaluere, bør en gjøre det ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at dersom arbeidet blir avsluttet mens diskusjonen er i gang, argumenterer og tenker elevene fremdeles når de går fra timen.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, kan de ta mange former og ha ulike formål. Det er for eksempel forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der en skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når en har arbeidet en stund med for eksempel proporsjonsoppgaver. Nedenfor peker vi på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger er det spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i de ideene elevene har om det begrepet som blir behandlet, og de løsningene de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å ha misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som:
- Hvorfor tror du denne måten (en gal løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? (En kan sammenligne både elevsvar på ulike oppgaver og elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener du det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor og i kapittel 3.

7 Oppbygging av geometrisk kunnskap: van Hiele-nivåer

Ekteparet van Hiele arbeidet ved en montessoriskole i Nederland. I sin forskning fokuserte de på nivåer i geometriske aktiviteter. Pierre van Hiele formulerte strukturen med nivåene og prinsippene for hvordan elevene utvikles med hensyn til geometrisk tenkning.

Ifølge van Hiele er det slik at elevene gjennomgår fem nivåer under utviklingen av sin forståelse av geometri. Hver elev må utvikle sin tenkning fra ett nivå til det neste i rekkefølge, en kan ikke nå opp til et bestemt nivå uten å ha gjennomgått de tidligere nivåene.

Nivå 0: Eleven gjenkjenner navn, kan sammenligne og sortere geometriske figurer etter utseendet (for eksempel ulike typer firkanter, vinkler, kryssende eller parallelle linjer osv.).

Nivå 1: Eleven kan gruppere og analysere geometriske figurer ut fra egenskaper/deler og forhold mellom egenskaper og deler og oppdager empirisk egenskaper og regler til en gruppe geometriske figurer (eleven bruker bretting, måling, rutenett, gitter eller diagram).

Nivå 2: Eleven sammenligner og setter sammen tidligere oppdagede egenskaper og lager nye regler.

Nivå 3: Eleven beviser teoremer deduktivt og etablerer sammenhenger mellom nettverk av teoremer.

Nivå 4: Eleven etablerer teoremer i ulike postulatsystemer og analyserer og sammenligner disse systemene.

Nivåene er karakterisert ved eksempler på denne måten:

- På nivå 0 er objektene geometriske figurer.
- På nivå 1 opererer eleven med objekter som er klasser av figurer, og oppdager egenskaper som tilhører disse klassene.
- På nivå 2 er det egenskapene til klassene som er objekter. På dette nivået foregår en logisk systematisering av disse egenskapene.
- På nivå 3 er det systematisering av sammenhenger som er objekter.
- På nivå 4 er det begrunnelser for systematisering av sammenhenger som er objekter.

I grunnskolematematikken utvikles de tre laveste nivåene hos elevene, og det er spesielt disse nivåene en må legge til rette for i undervisningen. I de tre situasjonene som er beskrevet, er utgangspunktet en aktivitet der elevene har ark med ulike typer firkanter. Firkantene har ulik orientering. Elevene må klippe ut firkantene før de kan arbeide videre med å sortere og systematisere dem.

Nivå 0
På nivå 0 er det de konkrete utklippede figurene som er objekter. Eleven ser og erfarer de konkrete figurene som ligger på pulten foran ham. Når eleven uttaler seg om det geometriske i situasjonen, er det på grunnlag av dem og ikke andre tenkte figurer med de samme geometriske

egenskapene. Eleven sorterer figurene ved å se på dem og sammen-ligne. Når eleven skal argumentere for hvorfor to figurer hører til samme klasse, tyr han til argumenter som *«Kvadratene er like fordi de ser like ut»*.

Nivå 1

På det neste nivået beveger eleven seg ut over de konkrete figurene; her er objektene kategorier for figurer som for eksempel kvadrater og rektangler. Elevens tenkning er karakterisert ved at han gjenkjenner egenskaper og det som karakteriserer de ulike kategoriene. For eksempel kan eleven ha utsagn som:

«I et kvadrat:

- *er det fire sider*
- *er alle vinklene rette*
- *er alle sidene kongruente eller like lange*
- *er motsatte sider parallelle»*

Nivå 2

Nivå 2 er sannsynligvis det høyeste nivået en elev vil nå i løpet av grunnskoletiden. Mange elever stopper opp på nivå 1, og enkelte elever strekker seg ikke ut over nivå 0. På dette nivået har eleven klart for seg hvilke nødvendige egenskaper som karakteriserer de ulike kategoriene. Elevens tanker er strukturert ved at han kan formulere logiske sammenhenger mellom egenskaper og sette opp uformelle forklaringer. Eleven kan for eksempel sette opp nødvendige egenskaper ved et parallellogram og bruke disse egenskapene til å bestemme hvilke av de andre firkantene som tilfredsstiller disse betingelsene, og som derfor hører til gruppen parallellogram – selv om de til daglig betegnes med et annet «navn» (for eksempel kvadrat).

van Hiele påpeker også at hvert nivå har sitt eget sett av symboler og sitt eget språk.En sammenheng som er korrekt på ett nivå, kan være feil på et annet nivå. Tenk for eksempel på forholdet mellom et kvadrat og et rektangel. To personer som resonnerer på hvert sitt nivå, kan ikke forstå hverandre. Ingen av dem kan følge den andres tankeprosess.

Språk og språkstruktur er en kritisk faktor når eleven arbeider seg oppover i van Hiele-nivåene – fra konkrete strukturer (nivå 0) via visuelle geometriske strukturer (nivå 1–2) til abstrakte strukturer (nivå 3–4). van Hiele vektlegger betydningen av å bruke språket i undervisningen. Blant annet hevder han at i mange situasjoner der elevene har vanskeligheter, skyldes det at læreren bruker et språk som ligger på et høyere nivå enn det eleven forstår. Lærerens språk mangler innhold i forhold til elevens nivå.

Et viktig trekk ved van Hieles teori er at framgang fra ett nivå til det neste er avhengig av instruksjon. Erfaring med ulike typer av undervisningsopplegg påvirker denne framgangen. Det er også mulig at visse undervisningsmetoder hindrer framgang mot neste nivå. For eksempel kan det være slik at eleven får seg forelagt egenskaper for rektangler og pugger dem utenat istedenfor å oppdage disse egenskapene selv, eller eleven bare «kopierer» et bevis istedenfor å utvikle det selv eller i det minste tilføre noen resonnementer til beviset. van Hiele presiserer også at det er mulig å presentere undervisningsstoff som ligger over den aktuelle elevens nivå.

Ifølge van Hiele er det slik at framgang fra ett nivå til det neste har fem faser:

1) Informasjon
2) Tilrettelagt orientering/instruksjon
3) Forklaring
4) Fri orientering/instruksjon
5) Integrasjon

Fasene kan beskrives slik:

1) Informasjon: Eleven gjøres kjent med eller blir orientert om emnet eller temaet som han skal arbeide med (undersøker eksempler og ikke-eksempler).

2) Tilrettelagt orientering/instruksjon: Eleven utfører oppgaver som involverer ulike sammenhenger innenfor det emnet han skal arbeide med eller utvikle/utforme (bretter, måler, ser etter symmetri).

3) Forklaring: Eleven bevisstgjøres om sammenhenger – prøver å uttrykke dem i egne ord og lærer seg de begreper og symboler som er involvert i det aktuelle emnet (utnytter ideer om egenskaper ved figurer).

4) Fri orientering/instruksjon: Ved å gjøre flere sammensatte oppgaver lærer eleven å finne sitt eget system i et nettverk av relasjoner (kjenne til egenskaper for en kategori av former og undersøke disse egenskapene i forhold til en ny form, for eksempel trapes).

5) Integrasjon: Elevene oppsummerer alt de har lært om emnet, for deretter å reflektere over egne handlinger og oppnå en oversikt over det nye nettverket av sammenhenger som er tilgjengelige (oppsummering av egenskapene eller karakteristikaene ved en figur).

7.1 Karakteristiske trekk ved van Hiele-nivåene

- Nivåene er sekvensielle.
- Hvert nivå har sitt eget språk, sett av symboler og nettverk av sammenhenger.
- Det som er implisitt på ett nivå, er eksplisitt på det neste nivået.
- Temaer og emner som det undervises i over det nivået elevene er på, kan bli redusert til elevenes nivå.
- Framgang fra ett nivå til det neste er mer avhengig av gjennomført undervisning eller tilrettelagte instruksjoner enn av alder og biologisk modenhet.
- Elevene gjennomgår flere ulike faser på veien fra ett nivå til det neste.

I forhold til Piagets biologiske aldersrelaterte teori for kognitiv utvikling bygger van Hieles teori på relevant instruksjon. Eleven kan ikke tilegne seg innsikt på et visst kognitivt nivå uten at underliggende nivåer er forstått. Det blir derfor viktig for læreren å planlegge undervisningen i geometri på en slik måte at en legger til rette for aktiviteter på ulike nivåer, siden elevene i klassen representerer ulike nivåer.

8 Undervisningsaktiviteter

Dette kapittelet inneholder en del aktiviteter som er rettet mot de problemene som er tatt opp i del 1 av heftet. Hver aktivitet må ses på som en idé for videre utarbeiding og er ikke ment å være et fullstendig opplegg. Vi har forsøkt å gå noe i dybden på de ulike aktivitetene i stedet for å forsøke å dekke alle temaer som kan trekkes fram i geometri.

8.1 Å beskrive og kommunisere geometriske objekter

8.1.1 Firkanter – ungdomstrinnet

Felles for disse aktivitetene er at elevene kan arbeide med dem på ulike nivåer, og at de er lagt til rette slik at elevene kan utvikle sin forståelse av geometri.

I aktivitetene må elevene få mulighet til å

- først sortere på grunnlag av det en kan se (Hva ser ut til å høre sammen?)
- analysere og lage enkle regler om generelle felles trekk
- sette opp regler som entydig beskriver objektet en arbeider med
- formulere sammenhenger og utvikle systemer

Under aktivitetene er det viktig at elevene hele tiden får anledning til å uttrykke sine ideer verbalt, at de får fortelle om og beskrive det de ser og finner ut. En annen mulighet er at elevene skriver ned disse sammenhengene. Elevene må få bruke språket til å fortelle og forklare.

Målet med disse aktivitetene er å legge til rette for undervisning der elevene kan utvikle sin geometriske tenkning, og der de kan utvikle et redskap for å argumentere for og analysere geometriske sammenhenger. Elevene vil også få kjennskap til egenskaper ved ulike geometriske figurer – ulike firkanter.

Aktivitetene er tidkrevende og må gå over flere undervisningstimer (alle matematikktimene i to uker). Ønsker en å utvikle tenkning på nivå 1 og 2 hos elevene, må de få tid til å utvikle seg. Da må en legge til rette for situasjoner i klasserommet der elever undersøker sammenhenger og verbaliserer dem. Dette kan ikke påskyndes av læreren, men det er læreren som legger til rette for elevenes utvikling gjennom valg av undervisningsaktiviteter.

Aktivitet 1

Elevene får utdelt ark som det er tegnet mange ulike firkanter på (se vedlegg). Læreren kan legge til eller fjerne figurer. Det er viktig at det er mange av hver type, og at de har ulik størrelse og orientering. I dette tilfellet er det tegnet ulike kvadrater, rektangler, trapeser, parallellogrammer og «drager». Elevene kjenner begrepene kvadrat og rektangel fra undervisningen på barneskolen, men de vil ofte bedømme figurene på dette grunnlaget:

- Dette er et rektangel fordi det ser ut som et rektangel.
- Dette er et rektangel fordi to sider er lengre.

Hensikten med aktiviteten er å få elevene til å tenke på og arbeide med figurenes egenskaper i stedet for å bedømme dem visuelt. Samtidig ønsker en å hjelpe elevene til å skille mellom hva ulike egenskaper betyr rent matematisk.

Elevene blir bedt om å klippe ut og sortere firkantene. De vil ha ulike strategier for å gjøre dette. Noen vil sortere figurene i hauger, slik at figurer som ligner på hverandre, kommer i samme haug. Dette er elever som vil få flere grupper av figurer. Kanskje vet elevene at en av haugene er kvadrater og en annen er rektangler, uten at de kan forklare nærmere hvorfor. Elevene argumenterer med at figurene ligner på hverandre, derfor hører de til samme gruppe.

Enkelte elever vil sortere i kvadrater, rektangler og resten. Også disse elevene bruker en form for visuell bedømming og sorterer ut figurer som ligner på hverandre. Enkelte elever bruker egenskaper ved figurene for å skille mellom dem og sortere dem i grupper. Noen elever sorterer i to hauger: figurer med rette vinkler og figurer som ikke har rette vinkler. En kan også finne elever som sorterer figurene i grupper etter hvor mange parallelle sider figurene har. Disse elevene vil sortere kvadrater og rektangler i samme bunke.

Det må stilles krav til at elevene skal forklare hvorfor de har sortert i de gruppene de har valgt. Elevene bør skrive ned argumentene sine først. Siden kan en gå gjennom de ulike grupperingene i plenum i klassen. Det vil være en fordel å ha kopiert figurene over på overheadtransparenter slik at elevene kan vise fram for de andre i klassen hvilke figurer som de mener hører sammen, og forklare hvorfor de mener at disse utgjør en gruppe.

Det er en fordel for elevene om de arbeider i par i denne økta. Da har en noen å diskutere med og prøve ut formuleringer på, ved siden av at det er enklere å stå foran klassen og forklare hvorfor en har valgt den aktuelle grupperingen.

Det er viktig at en har et åpent og inkluderende klima i klassen. Læreren bør også gjøre det klart for elevene at en kan gruppere firkantene på ulike måter, og at en ønsker å få fram flest mulig av disse måtene. Da unngår en at en gruppering får merkelappen «korrekt» og en annen blir «feil».

Aktivitet 2
Klassediskusjon: Hvilken inndeling er hensiktsmessig? Hvordan kan vi beskrive firkantene som hører til denne gruppen, slik at vi beskriver dem best mulig?

Elevene har en tendens til å ramse opp flest mulig egenskaper. Dette kan en godt oppmuntre til. Det vil være en fordel om elevene formulerer disse listene skriftlig. Etter hvert vil enkeltelever oppdage at noen egenskaper kjennetegner flere grupper. For eksempel vil både kvadrater og rektangler ha to og to parallelle sider og bare rette vinkler. Også parallellogrammet har to og to parallelle sider.

Stiller enkeltelever spørsmål som *«Du lærer, er kvadratet et parallellogram?»*, bør en skrive disse spørsmålene på tavla slik at en kan undersøke dette nærmere seinere. Slike spørsmål oppmuntrer elevene til å være analytiske når de undersøker figurene.

En viktig side ved denne aktiviteten er å få elevene til å formulere disse egenskapene slik at de er egenskaper som gjelder *alle* kvadrater, *alle* rektangler osv. Noen elever vil formulere egenskaper som ikke er korrekte, eller som bare er delvis korrekte fordi de gjelder spesialtilfeller. Det er derfor viktig at en har en felles diskusjon i klassen om hvilke egenskaper ulike grupper av firkanter har, og hvilke egenskaper som gjelder alle figurer som hører til gruppen.

Aktivitet 3
Elevene undersøker: Du har en venn som er syk, og som ikke har vært på skolen. Han ringer til deg for å spørre om hva dere har arbeidet med på skolen. Du skal forklare hva et kvadrat er. Hvordan kan du forklare det slik at han ikke kan forveksle kvadratet med en annen figur, samtidig som du nevner så få egenskaper som mulig? Hvor mange egenskaper må du oppgi? Etter at elevene har arbeidet med å finne ut av dette i små grupper, bør en diskutere oppgaven i fellesskap.

Aktivitet 4
Vi undersøker hvilke figurer som er undergrupper av andre figurer. Har elever stilt spørsmål til dette tidligere i perioden, bruker en disse spørsmålene. Hvis dette ikke er tilfellet, kan læreren stille spørsmål til klassen. Aktuelle spørsmål kan være:

- Kan rektangelet være et parallellogram?
- Er rektangelet et kvadrat?
- Kan kvadratet være et rektangel?

For å besvare dette spørsmålet må en bruke figurenes egenskaper og se hvilke som utelukker hverandre, og hvilke som kan tilfredsstille kravene til en annen gruppe. Noen elever vil ikke makte å gjennomføre analyser på et slik nivå. De vil argumentere på det nivået de er på, og en kan finne elevsvar som *«Nei, rektangelet er ikke et parallellogram fordi parallellogrammet er skjevt»*. Noen få elever vil klare å lage et hierarki over figurene, der de ser hvilke figurer som er spesialtilfeller av andre figurer, men dette krever tenkning på et høyere nivå enn det de fleste elevene er på.

Ønsker en å gjennomføre aktiviteten på mellomtrinnet, kan en tenke seg at en i utgangspunktet arbeider med færre grupper av figurer, og at en dropper aktivitet 4.

8.1.2 Skjulte objekter
Hvordan kommuniserer vi at et geometrisk objekt er en terning eller en trekant? Svært ofte vil vi vise til en figur eller en tegning. Det kan imidlertid være nyttig å prøve å beskrive geometriske objekter uten at vi kan referere direkte til en billedlig framstilling. Da tvinges vi til å tenke over hvilke egenskaper objektet har, og hvordan vi kan kommunisere disse egenskapene.

En rekke aktiviteter kan knyttes til slike beskrivelser, for eksempel at vi skal beskrive et geometrisk objekt «over telefonen» til en annen person. Vi skal her ta for oss en aktivitet som kan gjennomføres i klasserommet.

Aktivitet 5: Kjennetegn ved romlegemer

Utstyr
En lukket pappeske som har hull på hver side slik at en kan stikke inn hendene fra hver sin side for å føle på objekter i esken.

Legemer til å putte inn i esken kan være kule(ball), terning, tetraeder/pyramide, sylinder, ulike typer av prismer osv.

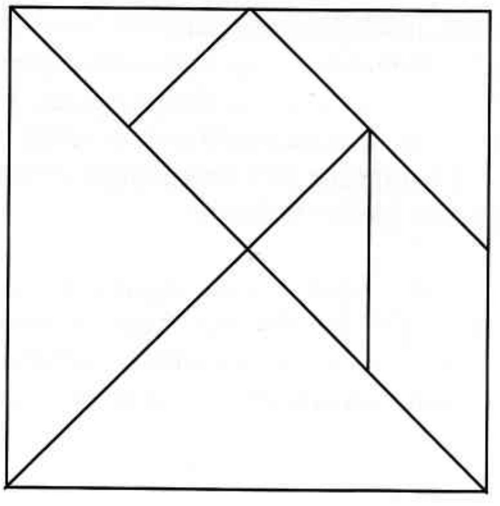
En elev har som oppgave å føle på et legeme i esken. De andre elevene i klassen stiller spørsmål etter tur. Eleven som har hendene i esken, skal forsøke å svare på spørsmålene. Klarer de da å komme fram til hva slags legeme det er? Den eleven som stiller spørsmålet, bør få sjansen til å gjette først. Deretter kan turen gå til andre som måtte ha ideer.

Mer kompliserte legemer kan brukes, for eksempel polyedre som terning, prisme, pyramide, tetraeder, oktaeder. Denne aktiviteten kan kombineres med at elevene lager modeller av disse legemene.

Det skulle være klart at det kan være mange varianter av denne aktiviteten. Det er ingenting i veien for at en for eksempel kan bruke «todimensjonale legemer» som trekanter, firkanter osv. i esken.

8.2 Tangram

Tangram er et gammelt puslespill, med uklare historiske røtter. Den tidligste kjente kinesiske boka om tangram er datert 1813, men puslespillet er nok mye eldre enn det. Her er det mange teorier, men vi kan regne med at det seinest stammer fra 1700-tallet. Opphavet til ordet tangram er også uklar. Tangram består av sju brikker som til sammen fyller ut et kvadrat:



Figur 1: Illustrasjon av et tangram

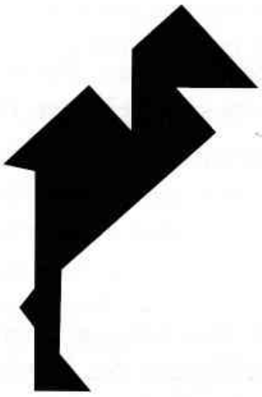
En kan få kjøpt tangrambrikker, men det er meget enkelt å lage et sett selv. Det bør være litt tykkelse på den pappen en bruker. Tangrambrikker kan en også lage av rester av finerplater.

På 1800-tallet ble det stor interesse for tangram i Europa og Amerika, sikkert på grunn av at handelsforbindelsene med Kina ble åpnet. Her bør det nevnes at i 1903 skrev amerikaneren Sam Loyd en «historie» om tangram – *The Eighth Book Of Tan*. Denne boka – som egentlig var fritt oppspinn når det gjaldt de historiske hendelsene – inneholdt over 600 mønstre som kunne legges.

Dette er kanskje den vanligste bruken av tangram: En får oppgitt en figur uten at en ser hvordan brikkene er lagt. Så skal en finne fram til hvordan en kan legge alle sju (!) brikkene for å danne figuren. (Det er en av de tradisjonelle tangramreglene at alle sju brikkene skal brukes.) Aktiviteter kan være:

- Prøv å finne på figurer ved å bruke alle brikkene (de bør ligne på noe).
- En kan lage konkurranser ved å se hvor lang tid en bruker på å lage en bestemt figur.
- Prøv om det kan finnes flere løsninger til en figur.

Det er ikke vanskelig å finne tangramfigurer. I litteraturlista er det en oversikt over noen bøker som inneholder eksempler på tangramfigurer.



Figur 2: Eksempel på omformet tangramfigur

Her skal vi imidlertid fokusere på et annet aspekt, nemlig hvordan tangrambrikkene kan brukes i geometriundervisningen. Det er særlig areal og forhold som vil være sentrale temaer. I disse aktivitetene vil vi ikke nødvendigvis bruke alle brikkene for å danne figurer. Vi kan gjøre mange beregninger når det gjelder tangrambrikkene, men et aspekt som er viktig når vi arbeider med yngre elever, er at vi kan arbeide med begrepene uten beregninger eller mål. La oss imidlertid først se på noen mål og beregninger som gjelder brikkene.

Vi ser at brikkene består av fem trekanter, ett kvadrat og ett parallellogram. Alle trekantene er 45–90–45, og vinklene i parallellogrammet er 45–135–45–135. Det er også klart at $\sqrt{2}$ spiller en stor rolle når det gjelder figurenes dimensjoner (hvis vi for eksempel regner med at lengden i kvadratet = 1 lengdeenhet). La oss ta utgangspunkt i at arealet av kvadratet er 1 arealenhet.

Noen betraktninger om areal:

- Hva er arealet av den største trekanten?
- Hva er arealet av den mellomste trekanten?
- Hva er arealet av den minste trekanten?
- Hva er arealet av kvadratet?
- Hva er arealet av parallellogrammet?

For eksempel kan vi resonnere slik: De to største trekantene er like store og utgjør til sammen halvparten av kvadratet. Altså har de hver arealet $1/4$. Hvis en vil unngå å bruke brøk, kan en ta utgangspunkt i at arealet av kvadratet er 16 (sidekant 4).

Svarene på disse spørsmålene er uttrykt ved enkle brøker, men som nevnt kan vi også knytte aktiviteter til dette som ikke bygger på beregninger. Slike aktiviteter er for eksempel direkte sammenligning av arealer. Ved å legge brikkene på hverandre finner vi:

De to minste trekantene har til sammen samme areal som kvadratet, og dette er også arealet av parallellogrammet. Altså har kvadratet og parallellogrammet samme areal. Igjen ved å kombinere de to minste trekantene finner vi at de til sammen har samme areal som den mellomste trekanten. Dette er nok den viktigste bruken av tangrambrikkene.

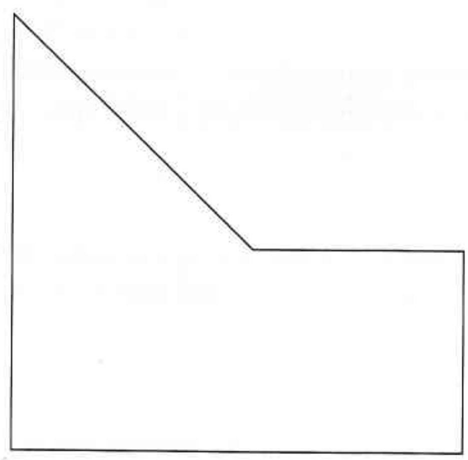
Aktivitet 6
Ta for deg et kvadrat som har areal lik halvparten av arealet til kvadratet som består av alle tangrambrikkene (se figur 1 side 77).
(Merknad: Sidekanten i dette kvadratet skal være i forholdet $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *(≈ 0,71) til sidekanten i kvadratet med alle tangrambrikkene.)*

Dekk dette kvadratet med for eksempel:
- to tangrambrikker
- fire tangrambrikker
- fem tangrambrikker

Det er mange mulige aktiviteter som kan utføres med tangrambrikkene. De er kanskje mest aktuelle når det gjelder den grunnleggende begrepsdannelsen. For eksempel kan vi utforske figurers form og se hvordan en trekant (eller andre figurer) kan være bygd opp av andre trekanter eller figurer. (Vi kan for eksempel undersøke hvor mange måter vi kan dekke en av de største trekantene med andre tangrambrikker på.)

Mer avansert bruk knytter seg til arealberegninger. Vi kan stille spørsmålet: På hvor mange måter kan du lage trekanter som har areal $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$? Også i dette eksempelet er det rimelig å tegne opp figurene slik at aktiviteten blir å legge brikker som dekker – som i eksempelet ovenfor. Dette kan en gjøre slik at det ikke er nødvendig å bruke et uttrykk eller en formel for å beregne arealet. Gjennom aktivitetene får elevene kjennskap til arealbegrepet.

Aktivtet 7
Lag en femkant som er kongruent til femkanten nedenfor. Finn et uttrykk for arealet til den figuren du har funnet.



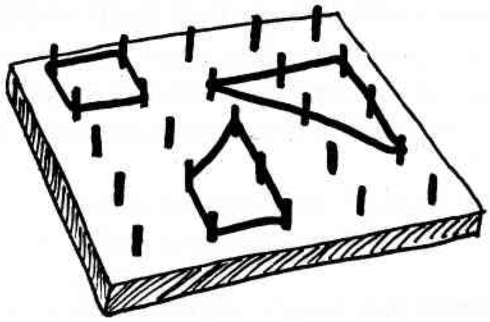
Figur 3: Eksempel på omformet tangramfigur

For eldre elever er det selvfølgelig mange andre typer av aktiviteter som kan være aktuelle. En utvidelse vil for eksempel være å stille spørsmål hvor det kanskje ikke er mulig å lage en figur:

- Er det mulig å lage et parallellogram med areal $\frac{3}{4}$?
- Er det mulig å lage en trekant med areal $\frac{3}{4}$?
osv.

8.3 Geobrett

Et geobrett er en treplate med spiker, slik det er vist på figuren.



Figur 4: Illustrasjon av et geobrett

Avstandene mellom spikrene i alle radene (både på langs og på tvers) er like. De skal danne et kvadratisk mønster. Geobrett kan ha ulike størrelser, men for de fleste formål er det tilstrekkelig med et brett som har 5 x 5 spikrer. Områder og figurer lages (markeres) ved at en strekker strikker (gjerne fargede) mellom spikrene. Det skal ikke være streker på brettet. Derfor bør en bruke en mal når en spikrer, og en slik mal er tegnet i vedlegg 1. Det finnes geobrett i salg, men det er enkelt å lage brett som er fullt brukbare.

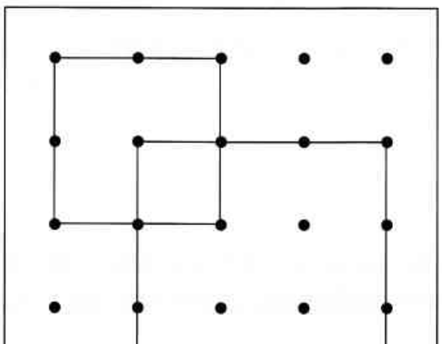
Et geobrett kan brukes til en rekke aktiviteter i geometri og enheter. Primære mål med å bruke brettet er å danne begreper og å gjennomføre geometriske resonnementer. I tilknytning til geobrettet kan en også tegne på papir med punkter (prikkpapir). I vedlegg bakerst i heftet finnes en kopieringsoriginal for å lage slike ark.

8.3.1 Fri eksperimentering på brettet

Elevene må bli kjent med brettet og noen av egenskapene. De kan finne fram til forskjellige former på figurer. Det er mulig å ta vare på de figurene som en kommer fram til, ved å tegne dem på prikkpapir. En aktivitet som gjerne kan gjøres innledningsvis, er å telle opp antall sider og hjørner på de figurene som en lager.

8.3.2 Rektangler (kvadrater) og trekanter

Figurer som en snart kommer i kontakt med på brettet, er kvadrater og trekanter. Kvadratene er vel de enkleste. Det gjelder særlig dem som har sidene parallelle med kantene på brettet.



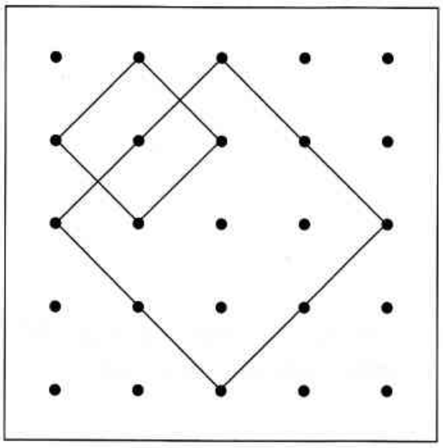
Figur 5: Eksempel på geobrett med firkanter med sidekanter parallelle med kantene på brettet

Aktivitet 8

- Hvilke størrelser kan en finne på slike kvadrater?
- Hvor mange kvadrater med sidekant 2 (2 x 2-kvadrater) kan en finne på brettet?

Ved disse og tilsvarende aktiviteter kan en eksperimentere med kvadrater av ulik størrelse. Videre kan en la elever arbeide med større geobrett (prikkpapir) og så stille dem noen av de samme spørsmålene, for eksempel hvor mange 3 x 3-kvadrater en kan finne på et 7 x 7-geobrett.

Det er også andre kvadrater en kan komme i kontakt med. På figuren nedenfor er det tegnet inn noen andre kvadratiske figurer.

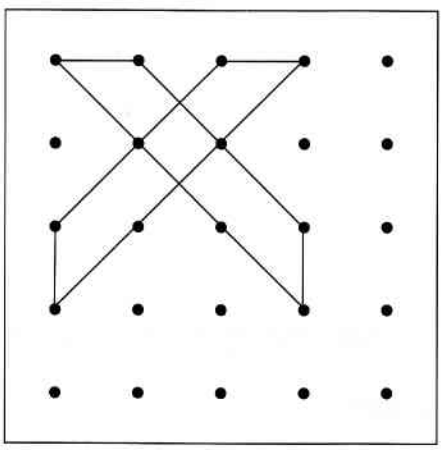


Figur 6: Eksempel på geobrett med firkanter der sidekantene ikke er parallelle med kantene på brettet

Aktivitet 9

Hvordan kan en avgjøre om dette er kvadrater? Geobrett er velegnet for å komme fram til arealet av ulike kvadrater. Vi kan ta utgangspunkt i «standardkvadratet», som vi sier har areal lik 1 (arealenhet). Hva blir da arealet av kvadratene i figuren ovenfor?

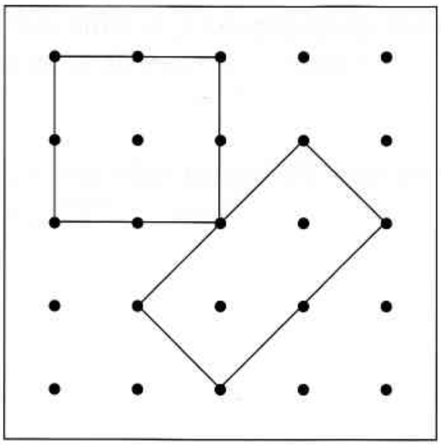
- En utfordrende oppgave kan være å lage et kvadrat med liten (minst) størrelse. Kan vi for eksempel lage et kvadrat med areal lik enheten?



Figur 7: Eksempel på geobrett der en kan utforske areal og omkrets

Forsøk å finne et uttrykk for arealet av kvadratet som framkommer på figuren ovenfor.

Det er klart at vi kan lage mange rektangler på geobrettet. Areal og omkrets er begreper som kan utforskes. For eksempel, på hvor mange måter kan vi lage rektangler som har areal lik 4 enheter? På hvor mange måter kan vi lage rektangler som har areal lik 6 enheter? Merk at vi her omtaler kvadrater (også) som rektangler.

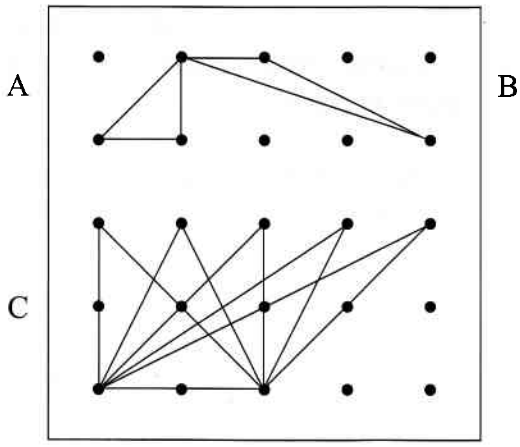


Figur 8: Eksempel på utforskingsoppgave

Disse aktivitetene kan bygge opp elevenes begreper om figurers form og areal. Tilsvarende kan vi ha aktiviteter om omkrets. Hva er for eksempel omkretsen til rektanglene som er vist ovenfor?

Aktivitet 10

De samme aktivitetene kan vi også bruke for trekanter:



Figur 9: Eksempel på geobrett med trekanter

Kan du lage en trekant med areal 3 enheter? En trekant med omkrets på 12 enheter? Og så videre.

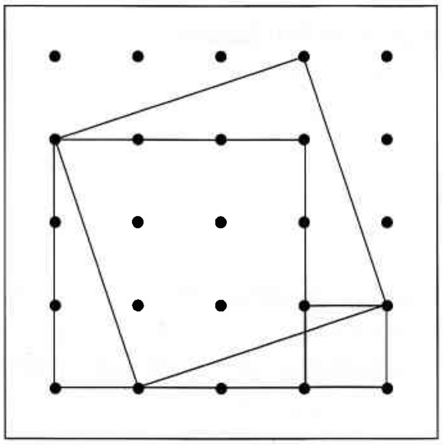
- Hvilken av trekantene A og B i figur 9 er størst?
- Hvilken av trekantene i C er størst?

8.3.3 Å resonnere på geobrettet

Geobrettet egner seg svært godt til å gjennomføre resonnementer om areal og omkrets. Å finne fram til like store arealer kan være en interessant aktivitet.

Aktivitet 11

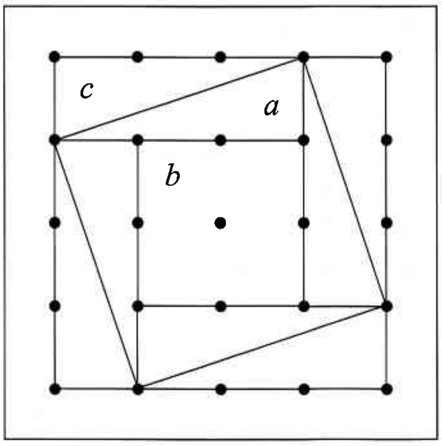
Vis at arealet av de to minste kvadratene er lik arealet av det store kvadratet.



Figur 10: Eksempel på utforsking på geobrett

Aktivitet 12

Også andre sammenhenger kan utforskes. For eksempel kan Pytagoras' setning finnes i figuren nedenfor.



Figur 11: Geobrett brukt til å bevise Pytagoras' setning

La a, b og c være som på figuren:

a = avstanden mellom to «spikrer» (= 1 lengdeenhet)
$b = (3a)$
c er diagonalen i rektangelet med sidekanter a og b.

Sidekanten i det ytterste kvadratet er $(a + b)$, arealet er derfor $(a + b)^2$. Arealet av trekanten med sider a, b og c er $1/2\ ab$. Arealet av det minste kvadratet i midten er $(b - a)^2$. Ved å se på arealene kan vi da sette opp:

$c^2 = (a + b)^2 \;-\; 4\; 1/2\; ab$
$c^2 = (b - a)^2 \;+\; 4\; 1/2\; ab$

Vi legger sammen og får:

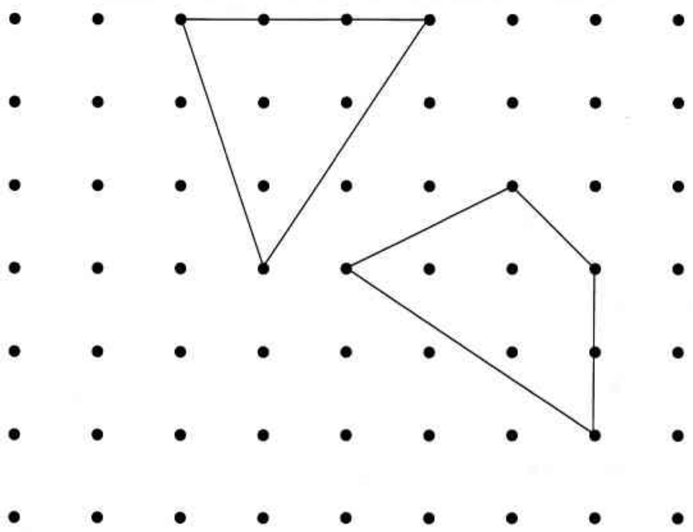
$2c^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2a^2 + 2b^2$ altså $c^2 = a^2 + b^2$

Det kan lages en rekke irregulære figurer på brettet, der en kan beregne areal og omkrets. Andre sammenhenger kan også utforskes. I *Boken om gometri på ett bräde* (Dunkels 1983) kan en finne noen flere gode utforskingsoppgaver.

8.4 Picks formel

Er det mulig å finne en sammenheng mellom areal av en geobrettfigur som en funksjon av antall gitterpunkter på omkretsen og antall gitterpunkter som er inne i figuren? Det er faktisk en slik sammenheng – som egentlig er ganske bemerkelsesverdig. Det kan legges til rette for eksperimentering for å finne denne sammenhengen med enkle midler.

Aktivitet 13
Utstyr som trengs, er geobrett eller prikkpapir. (Kopieringsoriginal for prikkpapir finnes i vedlegget.) Eksempler på areal av geobrettfigurer:



Begge figurene har fem punkter på randen og tre indre punkter. Kan du beregne arealet av disse to figurene på tradisjonell måte? For å utforske sammenhenger kan vi bruke følgende tabell:

Indre punkter	Punkter på randen	Areal

- Lag en serie geobrettfigurer som alle har samme antall punkter på randen, men forskjellig antall indre punkter. Lag tabell over det du finner.
- Hvordan endrer arealet seg når du øker antallet indre punkter med ett?
- Lag en serie geobrettfigurer som alle har samme antall indre punkter, men forskjellig antall punkter på randen. Lag tabell over det du finner.
- Hvordan endrer arealet seg når du øker antallet punkter på randen med ett?

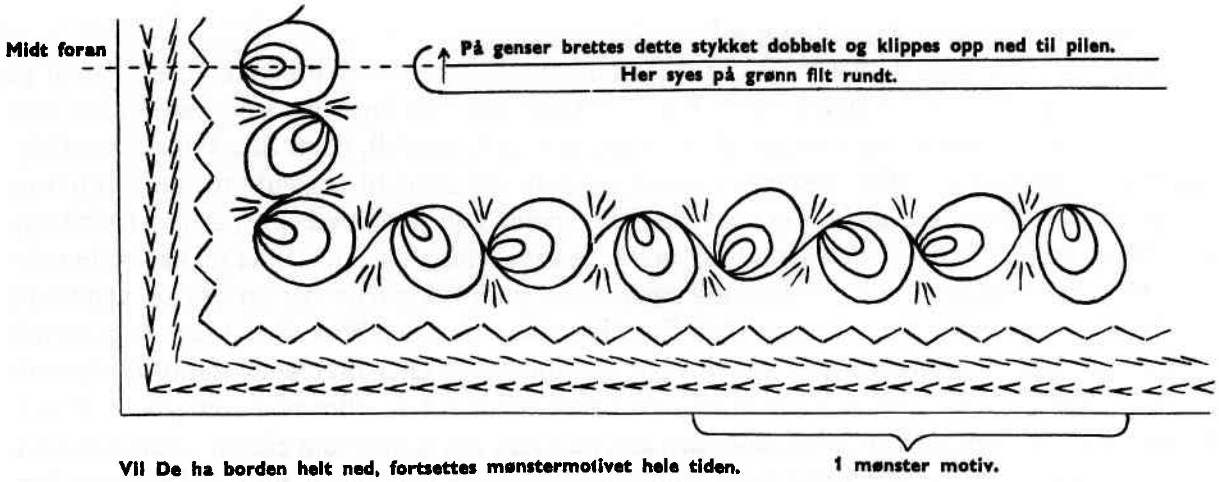
Kan du på dette grunnlaget komme fram til en sammenheng (regel) for arealet av en geobrettfigur?

Picks regel er følgende:
La A bety arealet, i antallet indre punkter og r antallet punkter på randen. Da er:

$A = i + r/2 - 1$

8.5 Mønstre

Gjennom arbeid med å undersøke og å lage mønstre kan elevene få praktisk erfaring med begreper som speiling, parallellforskyving og rotasjon. Også dette er aktiviteter som krever at elevene får bruke en del tid. Aktivitetene nedenfor kan gjennomføres i matematikktimene, eller de kan for eksempel være en del av et temaarbeid der matematikk og kunst og håndverk er to av fagene som omfattes av arbeidet.



Figur 12: Eksempel på mønster

8.5.1 Å undersøke mønstre

I denne aktiviteten er det fint å ta utgangspunkt i et lokalt mønster, for eksempel et vevd bånd til en lokal bunad, et mønster i en genser, en bord (frise) på en husfasade eller lignende. La elevene undersøke gjenstanden eller et bilde av gjenstanden. De må gjerne bruke et lite lommespeil eller en speilograf. Det er viktig at elevene beskriver det de observerer, med ord. Dette kan gjerne være hverdagslig i første omgang, slik som at «denne er snudd rundt, og seinere så kommer den om igjen». Dersom elevene undersøker ulike mønstre, kan en også be dem om å beskrive mønsteret de undersøker, for andre i klassen. Gjennom disse aktivitetene får elevene etter hvert behov for å uttrykke seg mer presist enn de kan gjennom hverdagsspråket, og en kan introdusere de matematiske begrepene.

Med eldre elever, som allerede kjenner til de matematiske begrepene, kan en undersøke og beskrive mønstre gjennom å bruke de korrekte matematiske termene.

8.5.2 Å tegne og konstruere mønstre

Elevene på ungdomstrinnet skal i kunst- og håndverksfaget lære noe om arkitektur. Har en bygninger i nærmiljøet med særpregede mønstre på fasaden, kan det å beskrive disse være en fin aktivitet som favner mål i læreplanen både i matematikk og i kunst og håndverk. Elevene kan også forsøke å tegne mønstrene selv for å presentere dem for andre. Elever på ungdomstrinnet kan forsøke å konstruere mønstrene for å lage en mal som er helt nøyaktig. For å få til dette må de først analysere figuren for å se hvorledes en lager mønsteret gjennom å speile, rotere og parallellforskyve.

8.5.3 Å lage egne mønstre

Båndmønstre med papir, saks og lim

En kan lage egne mønstre ved hjelp av ulike hjelpemidler. Det enkleste er å lage bånd-mønstre der mønsteret består av fargerike trekanter og firkanter som gjentas i borden. Elevene kan for eksempel gå sammen i grupper og bruke tangramfigurene som utgangspunkt. De vil ha behov for flere eksemplarer av hver figur. Disse figurene må lages slik at de er kongruente med tangrambrikkene, og gjerne slik at de har farger som gjør det enkelt å se mønsteret. Om elevene har tangrambrikker i kartong eller tre, kan de bruke disse som mal for å lage flere figurer i for eksempel farget papir eller tynn papp. Figurene kan siden limes opp på gråpapir.

Putemønstre med papir, blyant og speil

Elevene kan også lage mønstre som brukes som en del av et annet produkt. Et eksempel på dette er å lage mønster til dekor på en pute. Elevene må først lage noe som kan brukes som utgangspunkt for mønsteret, en rapport. Om en lager en krusedull, noen fine svinger med blyanten eller en mer stilistisk tegning, kan en siden bruke speil til å gjenta denne figuren og undersøke hvorledes en kan lage et pent mønster. Speilet kan settes ved siden av den første rapporten, og en kan se hvorledes det tar seg ut når en dreier litt på speilet. Eller en kan sette speilet i figuren og undersøke hvorledes utgangspunktet endrer karakter når en vrir og vender på speilet. Når eleven har funnet fram til en figur han liker, skal den brukes til å lage et passende mønster til puten. Mønsteret kan speiles, parallellforskyves eller dreies i forhold til utgangspunktet. Eleven kan enten lage en bord som løper rundt puten, eller noe som går over den. Borden kan ha form som en sirkel, eller den kan ha andre former dersom eleven foretrekker det. Når eleven er ferdig med å konstruere mønsteret, overfører han det til stoff ved hjelp av karbonpapir. Så kan eleven enten brodere mønsteret på puten eller male det med tekstilfarger.

8.6 Programvare for geometri

En figur eller konstruksjon på dataskjermen gir andre muligheter enn figurer og konstruksjoner på papir. På et ark kan vi tegne skisser eller utføre konstruksjoner med passer og linjal. Med et egnet dataprogram blir datamaskinen et tegne- og konstruksjonsredskap der vi har en rekke muligheter, for eksempel til å manipulere figurer eller lagre en konstruksjon.

Logo var et av de første «pedagogiske» programmene som var laget for tegning på skjerm. Det var enkelt å framstille figurer, som kunne være kompliserte å konstruere med passer og linjal. Styrken ved Logo var at en tegnet figurer ved å kommandere en liten trekant («skilpadde») på skjermen, som så etterlot seg et «spor». Dette skulle også vise seg å være en av svakhetene – denne formen for geometri var så ulik den geometrien en fikk fram med passer og linjal, at Logo etter hvert ble mindre aktuell i undervisningen. Det skal imidlertid ikke underslås at Logo kunne gi et bra grunnlag for å gjøre geometriske oppdagelser. Den enkleste var kanskje det å få tegnet en likesidet (likevinklet) trekant.

Kommandoen for dette var av formen:

gjenta 3 ganger
    fram «sidelengde»
    drei «vinkel»

Hvor stor skal «vinkel» være? Svaret er ikke 60 grader, men 120 grader (= 360/3). Vi må dreie den ytre vinkelen. Kommandoen ovenfor var også den kommandoen en kunne bruke – med visse opplagte modifikasjoner – for å tegne regulære mangekanter. En rekke overveielser om vinkler kunne på denne måten knyttes til de figurene som kom fram. Kommandoen viser også at sirkelen kan betraktes som en grense for mangekanter, for eksempel vil en 360-kant se ut som en sirkel.

Det har i seinere tid blitt utviklet en rekke programmer i såkalt dynamisk geometri. Med «dynamisk» forstår vi en geometri der vi kan manipulere figurer som er konstruert.

To slike programmer brukes mye i undervisningen – Cabri geometri og Geometer's Sketchpad (GSP). Programmene finnes både for PC og Mac. Programmene har mange felles trekk, og i denne sammenhengen vil vi behandle dem under ett. Versjoner for utprøving (såkalte *demoversjoner*) kan lastes ned fra Internett. Ved å bruke en demo-versjon kan en som regel ikke lagre figurer eller skrive ut, men å bruke dem gir en god mulighet til å gjøre seg kjent med programmene. Til slutt i dette avsnittet er det nærmere beskrevet hvordan en kan laste ned disse programmene.

I både Cabri og Geometer's Sketchpad kan en tegne med pekeredskap (mus) og konstruere ut fra menyer, der en kan velge mellom de vanligste konstruksjonene, som for eksempel å finne midtpunktet på et linjestykke. Vi har mulighet til å gjennomføre de samme konstruksjonene på dataskjermen som vi kan gjøre med passer og linjal.

8.6.1 Beskrivelse av noen aktiviteter som kan utføres ved hjelp av geometriprogrammer

I denne framstillingen vil vi konsentrere oss om noen muligheter i Cabri og GSP. Begge disse programmene gir omfattende muligheter for konstruksjoner og geometriske eksperimenter. Mange av oppgavene i testene kan utforskes med disse programmene. Vi skal her bare omtale noen få muligheter. Vi vil ikke gå inn på de konkrete kommandoene for å utføre operasjonene, men gi en framstilling som forhåpentligvis er tilstrekkelig for å gjennomføre en konstruksjon.

Speiling, symmetri
Vi så at mange av elevene hadde problemer med å speile en F om en linje. Det var en tydelig usikkerhet, spesielt når figurene eller linjene som skulle speiles, ikke var parallelle med speilingslinjen. Cabri og GSP kan utføre slike operasjoner direkte.

- På skjermen tegner eleven en F som består av linjestykker.
- Eleven tegner en linje som skal være speilingslinjen (kan også være et linjestykke).
- En av delene (linjestykkene) i F-en markeres.
- Fra menyen velges speiling (refleksjon), en peker på det markerte linjestykket (valg blir bekreftet av en melding på skjermen), en peker så på speilingslinjen og får bekreftet valg. Speilbildet av det markerte linjestykket tegnes av programmet.

En kan også speile mer kompliserte og sammensatte figurer, men for å se hvordan speilingsoperasjonen utføres, bør en ta en figur del for del. Dette gir en bedre følelse av selve operasjonen. Speiling av mer kompliserte figurer kan være neste skritt. Elevene kan gjøre dette i grupper foran datamaskinen. Dette er en aktivitet som egner seg bedre for gruppearbeid enn for individuelt arbeid.

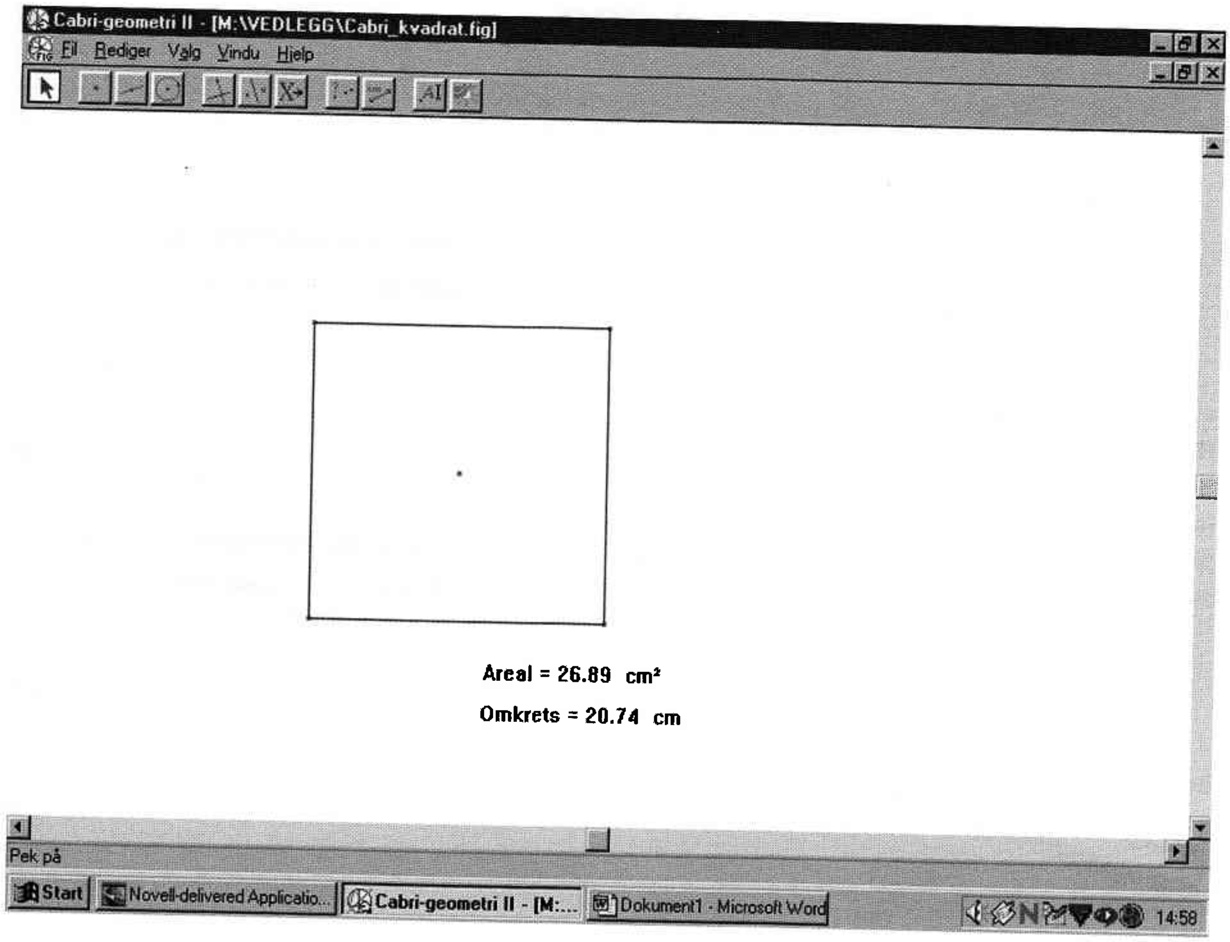
Programmene har også muligheter for rotasjon og parallellforskyving (translasjon). Framgangsmåtene blir noe annerledes enn for speiling. Dette kan være et godt utgangspunkt for en diskusjon. Hva betyr for eksempel parallellforskyving? Vi kan ikke parallellforskyve om en linje, men vi må gi en retning og en lengde – altså det som kalles «vektor» i programmene. Punkt 2 ovenfor blir da å tegne en vektor.

La elevene utforske og eksperimentere med speiling, parallellforskyving, rotasjon og avbildninger sammensatt av disse.

Et annet område der disse programmene egner seg godt, er når vi vil måle, for eksempel omkrets og areal av figurer eller områder. Omkrets og areal er funksjoner som er innebygd i programmene. Vi kan derfor utforske hvordan for eksempel omkrets og areal forandrer seg når en figur forandres.

Omkrets og areal
Mange elever har vansker med å skille mellom omkrets og areal. Dette viser også internasjonale undersøkelser. De programmene som vi omtaler her, gir gode muligheter for elevene til å eksperimentere med omkrets og areal til områder.

Aktivitet 14
Vi kan for eksempel tegne et kvadrat (regulær mangekant) i Cabri. Deretter kan vi velge fra en meny og få fram omkretsen til figuren og arealet til figuren. Vi kan få dem fram som benevnte tall på skjermen. Vi bør samtidig skrive inn forklarende tekst i tilknytning til de tallene som framkommer, for eksempel: «Omkrets = » og «Areal =»



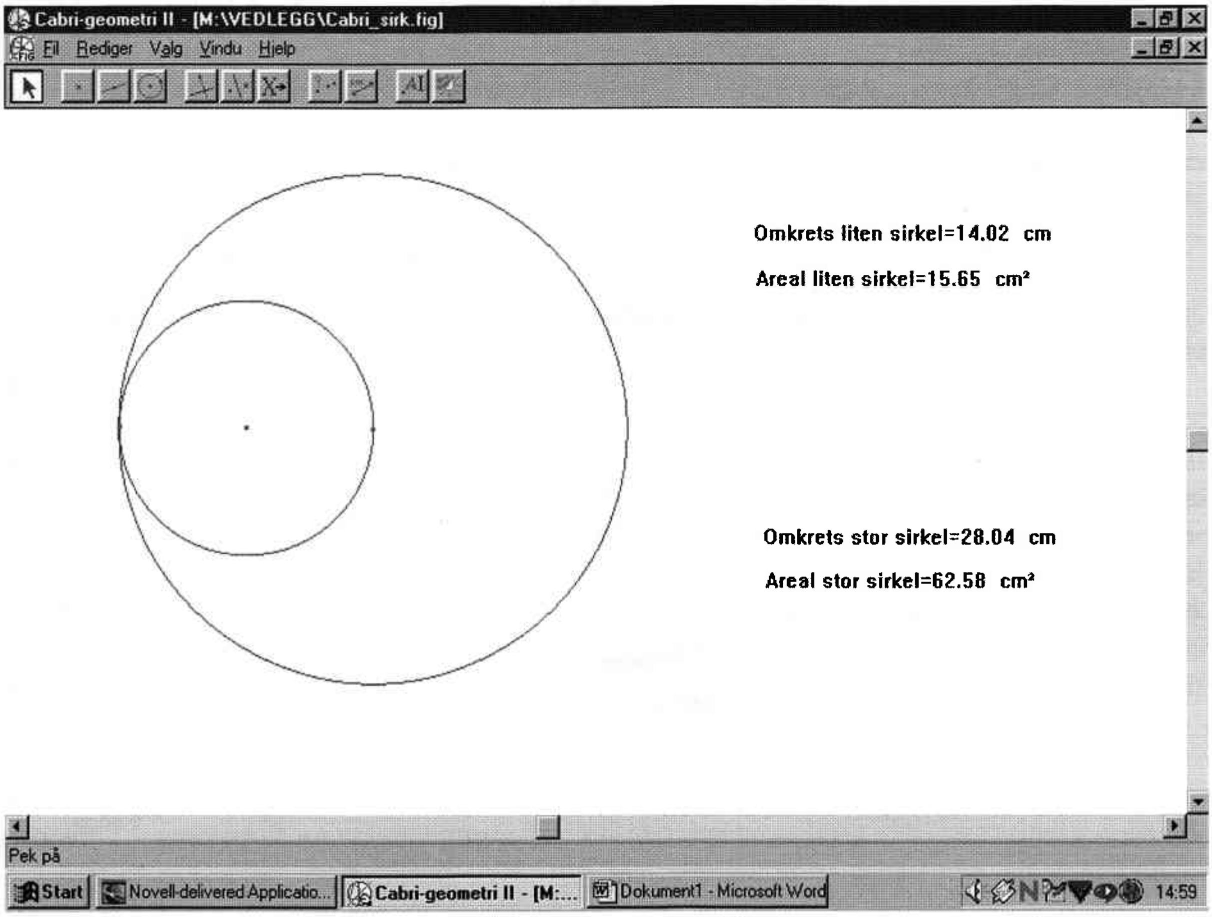
Figur 13: Eksempel på skjermbilde fra Cabri

Vi kan så «dynamisk» forandre størrelsen på kvadratet (for eksempel ved å dra i et hjørne) og observere hvordan både omkretsen og arealet forandrer verdi. Elevene kan diskutere hva som er sammenhengen mellom de to tallene.

Aktivitet 15

Hvordan forandrer det ene tallet seg (for eksempel omkretsen) i forhold til det andre? Her kan det være nyttig for elevene å ha en lommeregner tilgjengelig, slik at ikke regnearbeidet blir uoverkommelig.

Når det gjelder omkrets og areal av sirkel (oppgave 5 og 6 for 9. klasse), kan sammenhenger også utforskes. Elevene kan tegne to sirkler som er «koplet» på den måten at radien i den ene er diameteren i den andre. Når de forandrer størrelsen på den ene sirkelen, forandrer de også den andre. Ved at omkrets og diameter til begge sirklene blir vist på skjermen, kan elevene utforske sammenhengen.



Figur 14: Eksempel på skjermbilde fra Cabri

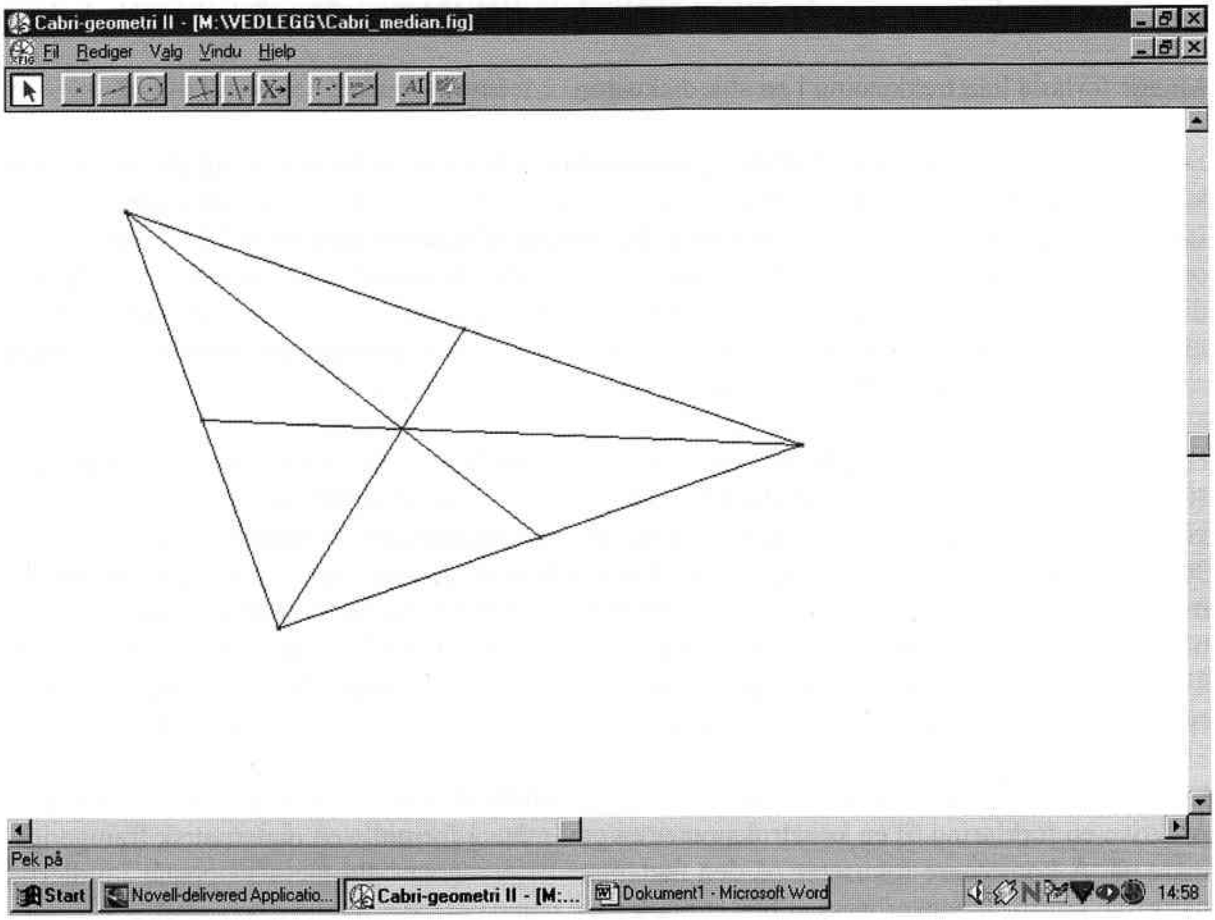
Slik det går fram av disse eksemplene, er det lagt inn dimensjoner (mål) på skjermen. Det er ikke alltid like lett å få fram «pene» tall som måltall på figurene. Dette kan vi imidlertid gjøre lettere ved å hente fram et koordinatsystem som er lagt inn.

Koordinatsystem

Vi kan enkelt hente fram et koordinatsystem ved å velge fra menyen. Koordinatsystemet i Cabri har enheter med lengde «1» (tilnærmet lik 1 cm) som normaloppsett (vi har muligheter til å forandre dette oppsettet). Det er så mulig å tegne figurer inn i koordinatsystemet. Oppgaver som kan utforskes ved bruk av koordinatsystem, er for eksempel oppgavene 11 og 12 for 9. klasse.

8.6.2 Bruk av dynamiske geometriprogrammer

En interessant egenskap er at en kan (dynamisk) forandre figurer ved å trekke i deler av dem, for eksempel trekke i et hjørne i en trekant. Har en derfor definert linjer eller lignende som bygger på (er koplet til) den figuren som deformeres, vil en kunne se hvordan egenskaper forandres eller er stabile. Et vanlig slikt eksempel er å se på medianene i en trekant. De ser ut til å skjære hverandre i ett punkt, og en kan observere hvordan denne egenskapen er konstant, når en forandrer trekantens form.



Figur 15: Eksempel på skjermbilde fra Cabri

Aktivitet 16

Gjør tilsvarende for de tre høydene i en trekant. Hva ser du? Gjør det samme for de tre midtnormalene i en trekant. Hva ser du? (Både høyder og midtnormaler er enkelt å konstruere i Cabri.)

Dynamiske geometriprogrammer er derfor godt egnet til eksperimentering og utforsking. En fordel er at elever kan arbeide i grupper. De kan diskutere forhold som de ser på skjermen. En aktivitet der elevene kan eksperimentere, er for eksempel følgende:

Tegn en vilkårlig (uregelmessig) firkant. Merk av midtpunktene på hver av sidene og tegn den firkanten som framkommer når midtpunktene forbindes. Ta så tak i et hjørne i den opprinnelige firkanten. Hva ser du når du drar i dette hjørnet?

Her vil det for mange reise seg et spørsmål: Er det riktig det jeg ser? Hvorfor er det slik? Kan jeg bevise det? Programmet gir ikke et bevis, men illustrerer en sammenheng eller egenskap. Geometrien har kanskje vært det området i skolematematikken der en har kommet i kontakt med matematiske bevis. Geometriprogrammene lar oss observere på skjermen og komme med hypoteser. For mange vil det være en naturlig fortsettelse å bevise det de ser på skjermen, men da med tradisjonelle metoder.

Ta for deg den hypotesen du kom fram til i aktiviteten ovenfor, og bevis hypotesen.

8.7 *Konstruksjoner med passer og linjal eller dataverktøy?*

Mange forhold kan trekkes inn i en slik diskusjon.

Som for alle dataprogrammer krever geometriprogrammene at en behersker de grunnleggende kommandoene, så en viss treningstid er nødvendig for effektiv bruk. En trenger videre maskinvare og programvare. En versjon av Cabri finnes også på «lommeregneren» TI-92, og den kan også lastes ned for TI-89 (med flash-minne). Geometer's Sketchpad har også versjoner tilpasset disse lommeregnerne. Dette er ingen fullgod erstatter for dataversjonen, men kan være en billig måte å bli kjent med programmet på. Vi må også trekke fram at det etter hvert finnes en mengde ressurser til undervisningen på Internett for alle slike programmer.

Hva så med tradisjonelle konstruksjoner med passer og linjal? Konstruksjoner har lang tradisjon i skolens geometriundervisning. Elevene kan oppøve nøyaktighet, og mange har gjennom konstruksjonsoppgaver fått innsikt i matematiske sammenhenger. Å konstruere en vinkel på 30° gir innsikt i størrelser til vinkler. Imidlertid falt bruk av slike verktøy også vanskelig for mange elever, og det har vært en bevegelse bort fra den mer formelle bruken av passer og linjal til en mer uformell tegning. I de diagnostiske oppgavene har vi i flere spørsmål bedt elevene om å tegne. Mange elevsvar viser at tegningene ofte er svært unøyaktige. Spesielt i oppgaven med speiling ser vi at mange elever har problemer med å komme fram til riktig avstand.

Konstruksjoner med passer og linjal kan være et viktig didaktisk redskap i undervisningen. Å skrive en forklaring til en konstruksjon er en god måte å formidle en matematisk framgangsmåte på. Å konstruere fokuserer på den matematiske prosessen. Problemer oppstår imidlertid når selve konstruksjonsprosessen blir et hinder for mange elever.

Imidlertid, geometri og geometriske konstruksjoner utføres i dag i vårt samfunn utenfor skolen, så å si utelukkende med dataverktøy. På denne bakgrunnen vil mange hevde at dataverktøyene også bør komme inn i undervisningen.

Den store matematikeren Carl Friedrich Gauss konstruerte som ganske ung den regulære 17-kanten, og han så på denne konstruksjonen som svært vesentlig. I dag «konstruerer» et dataprogram en 17-kant på en viss kommando. Men når dataprogrammene tegner figurer eller konstruerer, går et viktig matematisk element tapt. På den andre siden tar konstruksjonsprogrammene oss et skritt videre. Når konstruksjonene er automatisert, kan vi utforske sammenhenger. Vi kan for eksempel utforske medianenes skjæringspunkt i mange ulike trekanter.

Som et slags svar på spørsmålet i overskriften kan vi si at begge deler hører hjemme i skolens geometriundervisning.

9 Referanser

9.1 *Ressurser for geometri på Internett*

9.1.1 Tangram på Internett

Det finnes en mengde ressurser for tangram på Internett. Som for mange andre temaer virker mulighetene omtrent uendelige. Nedenfor har vi bare listet opp to mulige adresser som kan være et utgangspunkt for videre søking, men som også inneholder en rekke aktiviteter og referanser.

- http://www.ex.ac.uk/cimt/puzzles/tangrams/tangint.htm

- http://forum.swarthmore.edu/trscavo/tangrams.html

De som liker å utforske, kan oppgi søkeordet «tangrams» for en av de vanlige søkemotorene. Referansemengden er overveldende.

9.1.2 Geobrett på Internett
Det finnes flere ressurser for geobrett på Internett, for eksempel:

- http://mathforum.com/trscavo/geoboards/

Med denne siden som utgangspunkt kommer en videre til sider der en kan få skrevet ut ark med prikkpapir (jf. vedlegget bakerst i heftet).

- http://mathforum.com/trscavo/geoboards/dotpaper.html

9.1.3 Programvare for geometri på Internett
Her finnes det mye. Vi vil først beskrive noe mer detaljert hvordan en går fram for å laste ned såkalte demo-versjoner:

Hvordan få tak i demo-versjoner?

For Cabri
Gå til denne internettadressen (for PC):

- http://www.cabri.net/produits/cabripc-e.html

Nederst på siden finner du avmerket: a limited evaluation demo
Klikk på teksten og følg anvisningene som kommer på skjermen.

For Geometer's Sketchpad
Gå til denne internettadressen:

- http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html

Du finner følgende tekst som du kan klikke på (for PC):

Download Sketchpad (version 3.10*) for Microsoft Windows

Klikk på teksten og følg anvisningene som kommer på skjermen.

Filene er komprimerte, men det er mulig på samme måte å laste ned programmer for å dekomprimere disse programmene.

For begge programmene er det også mulig å laste ned ulike typer av dokumenter, som bruksanvisninger og andre ressurser.

I en artikkel i tidsskriftet Tangenten skrev Anne Berit Fuglestad en oversikt over noen av mulighetene. Artikkelen er i sin helhet lagt utpå Tangentens hjemmeside:

- http://www.caspar.no/Tangenten/2000/anneberit003.html

Her finnes også referanse til en rekke internettadresser som er lagt ut som dynamiske dokumenter (dvs. at de kan åpnes fra artikkelen).

9.2 Litteratur

Brekke, G. (1995) *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter (nå Læringssenteret)
Dahl, K. (2000) *Kvadrater, hieroglyfer og smarte kort.* Oslo: omnipax
Dunkels, A. (1983) *Boken om gometri på ett bräde.* Malmö: Gleerups
Ford, B.E. (1990) *The Master Revealed – A Journey with Tangrams.* Vallejo, CA: Tandoras Box Press
Fuglestad, A.B. (2000) Internettressurser. Dynamisk geometri. *Tangenten*, nr. 3
Lehet, J.L. (1998) *A Sage's Journey.* Waterford, CT: MathMaverick Press
Loyd, S. (1968) *The Eighth Book of Tan.* New York, NY: Dover.
(Ny utgave av klassikeren fra 1903)
Picciotti, H. (1999) *Geometry Labs.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press
Read, R.C. (1965) *Tangrams, 330 Puzzles.* New York, NY: Dover
Rosing, N.K. (2000) *Den matematiske krydderhylle.* Trondheim: Midt-nordisk vitensenter.
Spikell, Mark A. (1993) *Teaching Mathematics with Manipulatives: A Resource of Activities for the K-12 Teacher.* Boston: Allyn and Bacon
Støren, H. (2001) *Veiledning til måling og enheter.* Oslo: Læringssenteret

9.2.1 To interessante internettadresser

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html
(Internettside for matematikkens historie, ved St. Andrews-universitetet i Skottland)

http://www.wcape.school.za/malati/
(University of Western Cape, Sør Afrika – en viktig internettressurs)

VEDLEGG

Prikkpapir