Bokmål

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Veiledning til måling og enheter

F og I

Læringssenteret
2001

Kartlegging
av
matematikkforståelse

Helge Støren

Veiledning til måling og enheter

F og I

Trykk: GAN Grafisk AS

ISBN 82-486-0840-9

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo og Telemarksforsking-Notodden har etter oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet utarbeidet de diagnostiske oppgavene med veiledningsmateriell.

Forord

Dette veiledningsheftet er skrevet av Helge Støren som en del av KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen). Prosjektet blir utført på oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet av Telemarksforsking-Notodden (TFN) og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS).

Prosjektet er en del av departementets opplegg for vurdering i skolen og har flere formål:

- Utvikle en integrert prøve- og etterutdanningspakke som kan brukes av lærere som ledd i intern vurdering.
- Utvikle prøvemateriell av diagnostisk karakter som kan danne utgangspunkt for konkrete undervisningstiltak innenfor deler av faget.
- Kartlegge holdninger og forestillinger elever har til matematikk og undervisning i faget.
- Beskrive hele spekteret av elevprestasjoner innenfor ulike områder av faget, ikke bare minimum kompetanse.

I tillegg til dette veiledningsheftet er det tidligere utviklet veiledningshefter til diagnostiske oppgaver innenfor områdene:

Tall og tallregning
Funksjoner
Algebra

Det er også utviklet et hefte, *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som diskuterer matematisk kompetanse og arbeidsmåter i faget.

Heftet *Matematikk på småskoletrinnet* er et veiledningshefte som ikke er basert på innsamlede data fra diagnostiske oppgaver. Dette heftet presenterer og diskuterer viktige sider ved den faglige utviklingen hos elever på småskoletrinnet innenfor faglige emner i matematikk. Alle heftene er tilgjengelige fra Læringssenteret.

Et veiledningshefte til diagnostiske oppgaver innenfor området *Geometri* for grunnskolen er under utarbeiding. Det samme gjelder tre hefter for videregående skole, *Tall og tallregning, Geometri* og *Måling og enheter.*

Det arbeides også med et hefte som er basert på tanker om matematikkfaget hos elever og lærere.

Innhold

Innledning

Dette veiledningsheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til diagnostiske oppgaver rettet mot begreper som er knyttet til måling og enheter. Oppgavene er prøvd ut, og data er samlet blant elever i 6. og 9. klasse. Oppgavene er samlet i egne hefter og kan brukes fra 5. til 10. klasse.

Veiledningsheftet bygger på heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,* som inneholder en generell diskusjon av matematisk kompetanse, læring i matematikk, arbeidsmåter i faget og bruk av diagnostiske oppgaver. Det er mulig å gjøre seg nytte av de diagnostiske oppgavene i undervisningen uten først å lese introduksjonsheftet. Vi tilrår likevel at det blir brukt noe tid på dette. En klargjøring av følgende spørsmål har en sentral plass i introduksjonsheftet:

- Hva er misoppfatninger?
- Hva er diagnostiske oppgaver?
- Når fungerer oppgaver diagnostisk?
- Hvordan bruke de diagnostiske prøvene i klasserommet?
- Hvilke pedagogiske konsekvenser får våre kunnskaper om misoppfatninger?
- Hvordan undervise med basis i kunnskap om den enkelte elevs misoppfatninger?

Del 1 i dette veiledningsheftet går gjennom de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som kan ligge til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger fra en nasjonal standardisering.

Prøvene og analysen retter søkelyset mot noen sider av elevers forståelse av forskjellige sider ved målinger i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisning, slik at elevene kan utvikle så solide begreper som mulig.

Analysen er på ingen måte uttømmende. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere dype studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdannelse innenfor dette temaet. Et slikt arbeid har resultert i en hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk (Nortvedt 1998).

Del 2 inneholder en samling undervisningsaktiviteter med kommentarer og rettledninger som er rettet mot noen av de vanskene som de diagnostiske oppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren, ved siden av å ha god oversikt over elevenes kunnskaper, selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver lages, og hvordan man kan tilpasse undervisningsopplegg til de begrepene og erfaringene som elevene har.

DEL 1

ANALYSE AV DIAGNOSTISKE OPPGAVER

Måling og enheter

I denne delen blir ulike begreper knyttet til målinger og enheter analysert og diskutert med bakgrunn i en nasjonal standardisering.

Det deltok 105 femteklasser og 90 niendeklasser i standardiseringen. På disse klassetrinnene var det henholdsvis 2106 og 2150 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulike størrelser. Prøvene ble gjennomført i januar og februar 1998. Blant de elevene som besvarte prøvene, har vi trukket ut ca. 900, etter fødselsdato i måneden. Det er disse elevene som danner grunnlaget for analysen:

891 i 6. klasse og 891 i 9. klasse

Da oppgavesamlingene inneholdt flere oppgaver enn det vi kunne forvente at elevene rakk å besvare i løpet av en skoletime, ble oppgavene organisert i to hefter. Noen oppgaver var med i begge hefter. Det betyr at vi for noen oppgaver baserer vår analyse på 891 elevsvar og for andre oppgaver på rundt 450 elevsvar. For hver oppgave angir vi hvor mange elevsvar som ligger til grunn for analysen.

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved måling og bruk av enheter og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver kommenterer vi under ett. I kodeboka har vi tatt med både de vanligste feilsvarene vi fant under en forprøve, og interessante feilsvar vi har funnet i andre undersøkelser. I framstillingen i dette kapittelet kommenterer vi noen av svar-alternativene for de aktuelle oppgavene.

1 Måling og enheter

Emnet måling og enheter har tilknytningspunkter til alle andre emner i matematikk. Likevel skiller regning med måling og enheter seg fra de øvrige emnene først og fremst ved å ha praktiske formål. Langt på vei kan man si at tallære, geometri og algebra er støttedisipliner til praktisk regning. Men den praktiske regningen har også sin egen teori, som bare knytter seg til måling og enheter. Denne teorien kommer til anvendelse på de områdene man bruker matematikk i praktiske problemstillinger.

Dette heftet tar for seg 5. til 10. klasse. Bjørnar Alseth tar i veiledningsheftet *Matematikk på småskoletrinnet,* som ble utgitt i 1998, også opp måling og enheter. Alseth påpeker at man ikke bare skal legge vekt på kunnskaper og ferdigheter. Det er viktig å arbeide med hensikten med målinger, nemlig kommunikasjon av størrelser, slik at de kan meddeles fra en person til en annen eller tas med til andre situasjoner. Dette er ikke mindre viktig på høyere klassesteg, når elevene kanskje er mindre opptatt av aktivitetene i seg selv (lek) og mer opptatt av nytten av læringsarbeidet.

1.1 L97

Læreplanen (L97) anviser arbeid med måling og enheter delvis til hovedområdene matematikk i dagliglivet (på alle trinn), til rom og form (småskoletrinnet) og geometri (mellomtrinnet og ungdomstrinnet). Måling og enheter kan omfatte en rekke størrelser fra natur og samfunn. Med størrelser mener vi egenskaper som det er mulig å sette tall på. Det kan være heltall eller desimaltall. Dette veiledningsheftet tar ikke for seg svært mange av disse størrelsene. Vi behandler for eksempel ikke arbeid med penger, temperatur, masse og tetthet, som alle er områder som er nevnt i læreplanen.

1.1.1 Måling

Allerede i andre klasse starter det formelle arbeidet med måling ved at man skal trene på måling og vurdere størrelser. I tredje klasse skal man lese av tall på skalaer, og i fjerde klasse skal man arbeide videre med måling og måleredskaper. Det skal øves i å velge hensiktsmessige måleredskaper, bruke dem og lese av skalaer. Videre finner vi at i åttende klasse skal man arbeide mer med størrelser og enheter, i niende arbeide mer med vanlig brukte enheter, enkle og sammensatte, og i tiende står det nevnt at eleven skal vurdere bruk av måleinstrumenter og vurdere måleusikkerhet.

1.1.2 Lengde

Elevene begynner med tid og lengde. I tredje klasse skal de sammenligne lengder og avstander. I femte klasse skal de prøve ut og få erfaringer med sammenhenger mellom enheter for avstand og i sjette klasse undersøke egenskapene til de ulike typene av firkanter og trekanter, blant annet måle og beregne omkrets. Videre skal elevene øve på å bruke standardenheter for lengde og lære seg å velge og bruke ulike måleredskaper og måleinstrumenter. I sjuende klasse skal elevene trene videre på å beregne omkrets av firkanter, trekanter og andre mangekanter. I åttende klasse skal man arbeide videre med mål og med å velge hensiktsmessige måleredskaper og enheter for lengde.

1.1.3 Areal og volum

I tredje klasse skal elevene også vinne grunnleggende erfaringer med areal og volum og bruke areal- og volumenheter. I fjerde klasse skal de bruke kvadratmeter og kvadratcentimeter, arbeide med alminnelige volummål, spesielt kubikkdesimeter som liter, og finne volum. I femte klasse prøver elevene ut og får erfaringer med sammenhenger mellom enheter for volum.

Fra sjette klasse arbeider elevene med å finne fram til hvordan vi kan beregne arealet av rektangler og trekanter. De øver på å bruke standardenheter for areal og volum og å velge og bruke ulike måleredskaper og instrumenter. I sjuende klasse skal elevene få videre trening i å beregne areal av firkanter, trekanter og andre mangekanter. De skal arbeide med egenskapene til rett prisme og sylinder, spesielt hvordan vi kan beregne overflate og volum.

I åttende klasse skal elevene vinne erfaringer med å lage og undersøke mønstre, for eksempel dekke flater ved hjelp av mangekanter. De skal arbeide videre med å finne ut og beregne areal og volum av enkle og sammensatte figurer. I niende klasse arbeider elevene videre med å undersøke overflate og volum av forskjellige romfigurer, blant annet rett prisme og sylinder, og får erfaring med formlene for overflate og volum av kule.

1.1.4 Tid

I andre klasse skal elevene arbeide med klokka og tid. I fjerde klasse tar de for seg kalenderen. I femte klasse arbeider man mer med tid, tidsenheter og kalendere, og i sjette klasse med størrelser og enheter knyttet til tidsberegning. I sjuende klasse skal elevene søke informasjon om sekstitallsystemet og se sammenhengen med tid – døgn, timer, minutter og sekunder.

1.1.5 Fart

For sjuende klasse står det at man skal arbeide med noen sammensatte enheter og størrelser, for eksempel fart.

1.1.6 Vinkler

I fjerde klasse skal elevene gjøre erfaringer med viktige vinkelmål. I sjette klasse skal man gjøre erfaringer med vinkel som dreining omkring et punkt og som to stråler ut fra et punkt og bli kjent med vinkelmål. I niende klasse skal elevene arbeide med vinkler i mangekanter, spesielt innholdet i og begrunnelsen for setninger om vinkler i trekanter og firkanter.

1.2 Sammenheng mellom enheter

På 1900-tallet har det skjedd en radikal sanering av måleenhetene i verden, også i Norge. Høydepunktet var innføringen av SI-systemet, som vi omtaler i et eget avsnitt senere. I hovedsak består arbeidet i

- å få felles grunnenheter uavhengig av landegrenser og fagdisipliner
- å få dekadisk inndeling av enhetene
- å unngå definisjoner som medfører bruk av proporsjonalitetskonstanter i beregningene

Uttrykket *sammenheng mellom enheter* kan henspille både på ulike enheter for samme størrelse og på hvordan enheter for forskjellige størrelser forholder seg til hverandre.

1.2.1 Myntenheter

La oss se på to eksempler på den første bruken, hentet fra arbeid med myntenheter og enheter for fart. Penger er mål for materielle verdier. Enhetene vi bruker i Norge, er kroner og øre (1 kr = 100 øre). I Storbritannia bruker man pund og pence (1£ = 100 pence). Når kursen på britiske pund er 12,50, betyr det at en vare som i britiske pund er verdt £ 100,00, i norske kroner er verdt kr 1 250,00. En vare som koster £ 7,54, koster kr 94,25. (Vi finner prisen i norske kroner ved å multiplisere antall britiske pund med 12,50.)

Verre var det tidligere, da ett pund bestod av 20 shilling og en shilling bestod av 12 pence. Omregningen fra kroner og øre kunne da ikke skje ved enkel multiplikasjon. (Tilsvarende forhold var det lenge også for lengdemål, vekt osv.) Ved å gå over til dekadiske enheter i pengesystemet i Storbritannia har man forenklet sammenhengen mellom britiske pund og andre (dekadiske) myntenheter. Ikke minst i skolematematikken har dette medført at et tidligere mye omtalt problem ble borte. Verdifull tid kan i stedet brukes til annen læring.

1.2.2 Fart

Fart måles til vanlig enten i km/h (kilometer per time) eller i m/s (meter per sekund). Hvis du beveger deg 1,0 m/s, kan farten også oppgis som 3,6 km/h fordi du dermed beveger deg 3600 m på en hel time. 1,0 m/s er altså like raskt som 3,6 km/h. Speedometrene i biler kunne derfor like gjerne bruke enheten m/s.

Hvorfor velger man noen ganger å bruke m/s og andre ganger km/h? Valgene gjøres ut fra situasjonen som størrelsen skal brukes i. Det er lite hensiktsmessig å bruke m/s når vi bruker timer som tidsenhet. *Hvor langt kommer jeg på to timer når jeg kjører med en fart på ca. 20 m/s?* Dette spørsmålet kan få mange voksne til å hente fram lommeregneren og likevel få problemer. Hvis vi i stedet hadde gitt farten som ca. 72 km/h, ville nok de fleste kunne gi et raskt og riktig svar. Farten oppgis i egne enheter. For enkelhets skyld er disse enhetene kalt m/s eller km/h. Dermed henspiller de på enhetene for strekning og tid.

Hvis vi bruker enhetene m, s og m/s, får vi måltallet for strekning, S, ved å multiplisere måltallet for fart, v, med måltallet for tid, *t*.

Vi skriver

1. $S = v \cdot t$

Hvis vi derimot holder oss til km/h som enhet for fart, m som enhet for strekning og s som enhet for tid, vil vi skrive

2. $S = \frac{1}{3,6} \cdot v \cdot t$

Faktoren $\frac{1}{3,6}$ knytter de to enhetene for tid sammen.

1.2.3 Forenklinger gjennom SI-systemet

Det er åpenbart enklere å bruke den første av formlene ovenfor. Da slipper vi å ta med proporsjonalitetskonstanten $\frac{1}{3,6}$ ved hver utregning. SI-systemet, som ble vedtatt i 1960, sørger for at enhetene samsvarer slik at man oftere kan bruke formler av typen 1 enn av typen 2.

Når man vokser opp med det nye SI-systemet, kan man lett ta det som en selvfølge. Nye generasjoner slipper stort sett å regne om fra centimeter, meter og kilometer til tommer, fot og miles. Tilsvarende problemer med masseomregninger og hulmål unngår man også. Men samtidig mister man også den tilskyndelsen slike problemer gir til å reflektere over hva de variable størrelsene står for, og enhetenes størrelse og inndeling. Det gir dermed mindre ballast for å forstå hvordan enhetene til mindre observerbare størrelser knyttes sammen, for eksempel i varmelære og elektrisitetslære.

1.3 Måltall har alltid en usikkerhet

Forestillingen om at all matematikk handler om nøyaktige tall og nøyaktige svar på problemer, synes grunnfestet hos mange. Mer spesifisert synes en utbredt oppfatning både hos elever og hos noen lærere å være:

- Det finnes alltid et *riktig* svar.
- Det finnes bare *ett* riktig svar.
- Matematiske svar er *sikre.*
- *Alle* matematiske uttrykk er *nøyaktige.*
- Eventuell unøyaktighet i måltall skyldes avrunding.

Dette er misoppfatninger som bør angripes systematisk. Når det gjelder *måling og enheter,* har særlig de to siste forestillingene interesse. Men også de tre første er svært aktuelle for praktiske problemstillinger som *måling og enheter* er knyttet til.

Hvordan kan slike forestillinger oppstå? La oss ta for oss misoppfatningen at *alle matematiske uttrykk er nøyaktige.*

- Språkbruken både i daglig tale og i undervisningen kan trolig forklare en god del av denne misoppfatningen. Det er enklere å bruke uttrykk som å måle nøyaktig enn å si å *måle så nøyaktig som du kan.* I dagens skole synes presis uttrykksmåte mindre verdsatt enn tidligere.

- Forståelsen av tallsystemet blir ufullstendig når elevene lærer å bruke måleredskaper som metermål. Ikke alle elever forstår med en gang at de må bruke stadig flere desimaler for å angi tall mer og mer nøyaktig. Nettopp gjennom oppgaver med måling kan elevene få øynene opp for at det kan være behov for stadig mindre enheter, og dermed bli motivert for å forstå desimalsystemet.

- Måling gjennom telling av enheter kan muligens også bidra til en slik misoppfatning. Når man har telt de minste enhetene (for eksempel millimeter), kan man sitte igjen med en forestilling om at «det gikk akkurat opp».

- Troen på at enheten alltid går opp i den målte størrelsen, forsterkes når man bruker penger i innføringen av måltall. Her har vi til vanlig tellbare enheter. Vi kommer likevel til problemstillinger der vi har behov for å dele opp de minste enhetene (ørene) ytterligere. Det gjelder når vi regner om fra ett lands myntenheter til et annet lands. Elevene får imidlertid erfaringer med dette forholdsvis sent i skolegangen.

Vi ser at undervisningen kan ha stor betydning for om en misoppfatning forsterker seg, eller om den avsløres og svekkes. Se mer om dette i veiledningsheftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matemaikk.* Også blant lærere er det en vag forståelse av usikkerhetsbegrepet. Vi skal derfor se på fire vesentlige grunner til at alle måltall er beheftet med usikkerhet.

1.3.1 Systematiske målefeil

Ved målinger kan det oppstå feil knyttet til både tilfeldigheter og systematisk feil målemetode. Fra historien kjenner vi til at noen kjøpmenn som tok imot varer fra bønder og fiskere, bevisst brukte måleredskaper som gav feil resultat. Hvis man bruker et metermål som er kortere (eller lengre) enn en meter, vil måltallet vi får, systematisk bli for stort (eller for lite). Måleredskapet kan med andre ord være årsak til målefeil.

Men også *bruken* av måleredskapet kan systematisk være feilaktig. La oss bruke som eksempel tidtaking under et friidrettsstevne. Når vi bruker manuelle stoppeklokker for å ta tida på 60 m, setter vi vanligvis klokkene noe forsinket i gang, både fordi det tar noe tid før lyden når en tidtaker som står 60 m fra starteren (ca. 0,2 s), og fordi tidtakerne ikke reagerer momentant. Vi stopper klokkene mer korrekt når løperne går over målstreken, fordi vi ser at de nærmer seg, og kan forutsi passeringen. Dermed vil vi systematisk gi noe for gode tider.

Vi kan redusere den systematiske målefeilen hvis vi kjenner årsaken til den. Hvis vi går tilbake til eksempelet og ikke venter på lyden, men starter klokkene med det samme vi ser røyken fra startpistolen, tar signalet forsvinnende liten tid fram til tidtakeren. Reaksjonstida vil likevel medføre at den målte tida blir noe for god. Bruk av elektronisk tidtaking fjerner også den feilkilden.

Men også avanserte målemetoder kan ha feil. De senere årene har vi sett at muligheter for systematisk feil ved fartsmålinger har ført til en rekke tvister etter fartskontroller i trafikken. Justervesenet har ansvaret for at Norge har en måleteknisk infrastruktur og kan kalibrere instrumenter for måling av lengde, volum/hulmål, masse, temperatur, elektrisk spenning og elektrisk motstand.

1.3.2 Tilfeldige målefeil

La oss gå tilbake til eksempelet med å ta tida på et sekstimetersløp på en friidrettsbane. Hvis flere tidtakere tar tida på samme løper, blir klokkene sjelden stoppet på samme hundredels sekund. Delvis kan dette skyldes at tidtakerne har ulik reaksjonshastighet ved start. Noen av tidtakerne kan dermed vanligvis gi bedre tider enn andre. Men nøyaktigheten hos den enkelte tidtakeren kan også variere. Her er det altså variasjoner fra menneske til menneske og fra måling til måling hos den enkelte tidtakeren. Dette blir avslørt fordi klokkene er langt mer nøyaktige enn tidtakerne. Det lar seg i praksis ikke gjøre at samme person tar gjentatte målinger av det samme sekstimetersløpet. Derfor bruker man ofte flere tidtakere på samme løper for å redusere store tilfeldige utslag.

Når det gjelder andre målinger, for eksempel lengdemåling og veiing, er gjentakelse vanligvis mulig. Hvis samme person gjør samme lengdemåling gjentatte ganger, kan tilfeldige målefeil demonstreres. Det er en aktuell oppgave i skolen, slik at elevene får egen erfaring med denne typen feilkilder.

Gjennomsnittet av flere uavhengige målinger er normalt et mer sikkert uttrykk for den målte størrelsen enn resultatet av en enkelt måling. Ved hjelp av spredningsmål som variasjonsbredde eller standardavvik kan vi gi uttrykk for hvor stor usikkerhet som knytter seg til måltallet.

Målingsteorien, som bygger på statistikk, forteller noe om hvordan usikkerheten i gjennomsnittet avhenger av tallet på målinger, og hvordan usikkerheten i summen av to måltall eller produktet av måltall er avhengig av usikkerhetene i de enkelte tallene. Vi går ikke inn på dette her.

1.3.3 Objektets form og matematiske modeller

Bredden av et golv vi ønsker å måle, kan i de fleste rom variere med flere millimeter. Golvene er vanligvis ikke strengt rektangulære. Ofte kan objektene ha en form som gjør det vanskelig å definere størrelsen (bredden av rommet) klart. I slike tilfeller er kanskje ikke usikkerheten først og fremst knyttet til målingen. Når måltallet oppgis, bør usikkerhet knyttet til definisjonen av den målte størrelsen også vurderes. Det er for eksempel meningsløst å oppgi kjøreavstanden mellom to byer til nærmeste meter.

En matematisk modell er en beskrivelse av forhold i den virkelige verden. Vi kaller modellen matematisk hvis beskrivelsen bruker matematiske uttrykksformer fra geometri, algebra, statistikk osv. En matematisk modell er god i den grad den bidrar til å løse et problem eller hjelper oss med å formidle informasjon.

Utsagnet *jorda er kuleformet* kan som svar til et barn være tilstrekkelig presist til at barnet oppfatter at du mener at jorda ikke er plan. På et mer avansert nivå kan *kuleform* være upresist. Spørsmålet kan da være hvordan jorda skiller seg fra matematisk kuleform.

Utsagnet *luftas tetthet avtar med høyden over havet* er også en matematisk beskrivelse, i hverdagsspråk. Mer presise beskrivelser kan ofte best foretas ved innføring av symboler for de variable: d for tetthet, h for høyde osv. Vi kan si at d er en funksjon av h, og gjerne beskrive denne funksjonen ved hjelp av en formel. Hvis d er omvendt proporsjonal med h, kan funksjonen ha formen **d = k / h,** hvor k er en konstant. Vi kunne eventuelt gi en graf som beskriver sammenhengen.

Matematiske modeller beskriver virkeligheten og gjør det mulig å foreta vurderinger og beregninger. Konklusjonene vil ha en usikkerhet avhengig av hvor godt modellene beskriver virkeligheten. Ofte kan flere modeller være aktuelle. Det betyr ikke at den ene nødvendigvis er bedre (riktigere) enn den andre. I skolens matematikkundervisning har vi tradisjonelt arbeidet forholdsvis lite med å utvikle modeller ut fra situasjoner vi skal arbeide med. I naturfagundervisningen har nok dette vært vanligere.

1.3.4 Avrunding

I enkelte framstillinger i skolebøker settes måltallenes usikkerhet lik den unøyaktighet som følger av at desimaltallene må avrundes. Det er bare delvis riktig. Avrundingsfeilen i et desimaltall kan være opptil fem enheter av den første desimalen som strykes. Når vi leser størrelsen 3,24 m, antar vi at lengden er målt til mellom 3,235 og 3,245 m. Vi kan skrive dette som 3,24 m ± 0,005 m.

For forståelsen av usikkerhet og avrunding er det tjenlig å bruke begrepet relativ usikkerhet. Relativ usikkerhet finner vi ved å dividere usikkerheten i måltallet med måltallet. Ofte oppgis den relative usikkerheten i prosent.

Eksempel:
Anta at måltallet 3,532 kg har en usikkerhet på 0,01 kg. Relativ usikkerhet er da 0,01 : 3,532 ≈ 0,003 eller 0,3 %.

I norsk skolematematikk har den relative usikkerheten tradisjonelt liten plass. Men når vi arbeider med begrepet *gjeldende siffer*, er det egentlig relativ usikkerhet vi tar for oss. Antallet gjeldende siffer er enkelt å definere, hvis tallet er gitt med desimaler. Hvis vi derimot har et helt tall som slutter med en eller flere nuller, kan vi ha et problem.

Eksempel:
3,53 kg har tre gjeldende siffer. 3,530 kg har fire gjeldende siffer.
Men hvor mange gjeldende siffer er det i 3530 g? Spørsmålet er om 0-en «bare» er plassholder. Mer informasjon ligger i skrivemåten $\mathbf{3{,}53 \cdot 10^3}$ g. Dette skiller seg fra $\mathbf{3{,}530 \cdot 10^3}$ g ved at det siste uttrykket har fire gjeldende siffer, det første har tre.

La oss gå tilbake til formålet med målinger: *kommunikasjon av størrelser.*

Det første spørsmålet vi bør stille når vi vurderer hvor mange siffer vi skal avrunde til, er: *Hvor stor nøyaktighet har vi behov for?* Hvis vi kan akseptere en usikkerhet på 1 %, trenger vi ikke mer enn tre siffer i måltallet. Vi kan runde bort det fjerde sifferet, men det vil være uhensiktsmessig å runde bort det tredje. Dette kan vi vurdere uavhengig av andre usikkerhetsvurderinger knyttet til måltallet.

Hvis vi derimot ønsker så stor nøyaktighet som mulig på måltallet, bør vi starte med å vurdere usikkerheten knyttet til målefeil og matematisk modell. Hvis vi for eksempel antar at denne usikkerheten er på 0,1 %, bør vi beholde så mange siffer at avrundingsfeilen ikke gir noe vesentlig bidrag til den samlede usikkerheten. Det kan man si er tilfellet hvis avrundingsfeilen er på mindre enn 1/3 av en annen kjent usikkerhet. I eksempelet ovenfor med 0,1 % kjent usikkerhet bør vi derfor holde oss til fire gjeldende siffer og runde bort det femte.

For å gå tilbake til eksempelet vi innledet dette delkapittelet med, er usikkerheten etter avrunding *minst* 0,005 m. Målemetoden og objektets form avgjør om usikkerheten er større. **En god regel er å bruke en desimal mer enn det målemetoden og formen skulle tilsi. Dermed kan vi unngå at avrundingsfeilen gir et vesentlig bidrag til usikkerheten i måltallet.**

I norsk grunnskoletradisjon er dette lite utbredt. Vi tar gjerne bare med ett usikkert siffer og forenkler usikkerhetsvurderingene til bare å gjelde avrundingsfeil.

1.4 Regning med måltall

Måltall kan brukes til ulike beregninger. Man kan for eksempel beregne arealet av en rektangulær golvflate ved å multiplisere lengde med bredde. Siden det er usikkerhet i måltallene, vil denne usikkerheten forplante seg til produktet. Tilsvarende gjelder for andre beregninger (addisjon, subtraksjon og divisjon). Ved vurderingen av usikkerheten i sluttsvaret kan man i grunnskolen velge forholdsvis enkle overslag:

- Multiplikasjon og divisjon: Den relative usikkerheten i svaret er lik den største av de relative usikkerhetene i måltallene. (Dette gir litt for små anslag.) I praksis (norsk tradisjon!) betyr dette at man i svaret angir like mange gjeldende siffer som man har i måltallet med færrest gjeldende siffer.

- Addisjon og subtraksjon av to tall: Usikkerheten til svaret kan anslås til å være summen av usikkerhetene i måltallene. (Dette gir litt for store overslag.) Her bruker vi i stedet usikkerheten til den addenden som har størst usikkerhet (det vil i norsk tradisjon si så mange desimaler som i tallet med færrest desimaler). Merk her skillet mellom tallet på gjeldende siffer og tallet på desimaler.

Eksempel:

Vi skal beregne farten på en syklist. Vi har målt en strekning på 100 m og tar tida syklisten bruker på denne strekningen. La oss anta at usikkerheten i lengdemålingen er 5 cm. Vi måler tida til 12,2 s. Usikkerheten er 0,3 s.
$s = 100{,}00 \text{ m} \pm 0{,}05 \text{ m}$ (Tradisjon: $s = 100{,}0$ m)
$t = 12{,}2 \text{ s} \pm 0{,}3 \text{ s}$ (Tradisjon: $t = 12$ s)

Tradisjonell beregning: $v = s : t = 100{,}0 : 12 \text{ m/s} \approx 8{,}3 \text{ m/s}$

Alternativ beregning: $v = s : t = 100{,}0 : 12{,}2 \text{ m/s} \approx 8{,}2 \text{ m/s} \pm 0{,}2 \text{ m/s}$

Det er en vurderingssak hvilken betraktningsmåte som egner seg best. Var det riktig å velge to gjeldende siffer i tidsangivelsen og i svaret? Svaret vil da bli 8,3 m/s og en antatt usikkerhet på 0,05 m/s. Hva med tre gjeldende siffer eller bare ett?

Den alternative betraktningsmåten ville gi nesten det samme svaret. Men informasjonen om usikkerheten i svaret er langt bedre. Du ser svakhetene i de to betraktningsmåtene bedre når du gjør beregningene med større og mindre usikkerhet i tidsmålingen, eventuelt også når du lar syklisten bruke noe under 10 sekunder.

1.5 SI-systemet

Det internasjonale enhetssystemet ble vedtatt av *Generalkonferansen for vekt og mål* i 1960. SI-systemet tar utgangspunkt i sju grunnenheter. Det er ampere (A), candela (cd), kelvin (K), kilogram (kg), meter (m), mol (mol) og sekund (s). Øvrige enheter kan defineres ved hjelp av disse. Enkle eksempler er:

- hertz (Hz): $\mathbf{s^{-1}}$ (for frekvens)
- newton (N): $\mathbf{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$ (for kraft)

Enheter som er definert ved hjelp av grunnenhetene, kalles *avledede enheter.* Ikke alle avledede enheter har egne navn eller symboler, slik som for frekvens og kraft. Fart kunne for eksempel ha hatt en egen enhet definert som $\mathbf{m \cdot s^{-1}}$.

Avledede enheter synes i noen grad å bli forvekslet med «sammensatte enheter», slik dette uttrykket brukes i norsk skolematematikk. Det er en vanlig misoppfatning at størrelser med sammensatte enheter må betraktes som mindre grunnleggende enn størrelsene som grunnenhetene er knyttet til. Dette tar vi opp i et senere kapittel.

Som lærere bør vi imidlertid være oppmerksomme på at ikke alle størrelser er like direkte observerbare uten bruk av instrumenter. Lengde er lettere å observere enn fart og akselerasjon. Masse er lettere å observere enn tetthet. Elevene har lettere for å forestille seg – og arbeide med – størrelser som de kjenner fra egen erfaring, som de selv har observert eller manipulert.

Forståelse av fart og akselerasjon vil normalt komme gjennom erfaringer, gjerne på egen kropp, og ikke gjennom formelle definisjoner.

Språkbruken kan være viktig når man drøfter erfaringene. Hva er forskjellen på disse spørsmålene:

1 Per og Ola løper i 10 sekunder. Per løper fortere enn Ola. Hvem kommer lengst?
2 Per og Ola løper i 10 sekunder. Per kommer lenger enn Ola. Hvem har størst fart?

Spørsmål 1 inviterer til en konklusjon om at $\mathbf{s = v \cdot t}$.
Spørsmål 2 inviterer til en konklusjon om at $\mathbf{v = s / t}$.

I det første tilfellet er lengden den avledede størrelsen. I det andre tilfellet er farten den avledede. Poenget er at både tid, fart og lengde lar seg avlede av de to andre størrelsene. Slik er det også med en rekke forhold innenfor naturvitenskapene og samfunnsvitenskapene. Bruk av uttrykk som *sammensatt størrelse* og *avledet enhet* er ofte mer egnet til å tilsløre enn til å avklare de underliggende forholdene i praktisk regning.

Spørsmålet bør snarere være om vi kan gi direkte erfaringer med størrelsene, og om vi har instrumenter som direkte måler disse størrelsene.

2 Lengde

Kan det sies at begrep om noen størrelser er viktigere enn andre for å forstå verden omkring oss? I våre dager ville kanskje noen hevde at tida og tidsmålinger er grunnleggende for all aktivitet. Selv ville vi nok ha nevnt lengder og lengdemål først. Lengdevurdering kommer trolig også tidligere enn andre målinger for de fleste barn. Den uformelle målingen som skjer gjennom sammenligning av lengder, danner basis for å forstå viktige sider av både lengde og måling.

2.1 Lengdebegrepet

Som voksne har vi lett for å glemme vår egen utvikling av lengdebegrepet. Begrepet er blitt vårt eget, og vi behandler det med den største selvfølgelighet. En analyse av begrepet kan i noen grad avspeile den utviklingen det enkelte barnet har i forhold til lengde. Det er derfor på sin plass å minne om hvilke holdepunkter man kan ha for barns tilegning av lengdebegrepet.

Alseth (1998) foreslår at elevene får utvikle målingsbegrepet gjennom å bruke fingrer og andre tilgjengelige redskaper som kvister. Først senere brukes standardenheten meter.

2.1.1 Konservere

For voksne er det liten tvil om at *en lengde er den samme uavhengig av hvordan vi deler den opp i enheter, eller i hvilken retning vi måler.* Når barnet innser dette, har det nådd en viktig milepæl i å tilegne seg lengdebegrepet.

2.1.2 Transitivitet

Med transitivitet mener vi at *vi kan sammenligne to lengder, for eksempel ved å måle den ene med en snor og så flytte snora over til den andre.* I bunn og grunn er dette forutsetningen for at måling skal ha noen hensikt.

2.1.3 Sammenligning og ordning

Sammenligning av størrelser forutsetter en forståelse av at størrelser kan ordnes. Barna oppdager snart at hvis Kari er høyere enn Lise og Lise er høyere enn Anne, så er Kari nødvendigvis høyere enn Anne. Det er ikke like lett å innse at hvis Per er høyere enn Tor og Per er høyere enn Nils, kan vi ikke uten videre si hvem som er høyest av Tor og Nils.

2.1.4 Addisjon og subtraksjon

Lengder kan adderes til hverandre og subtraheres fra hverandre.

- *Disse taustumpene er «så lange» til sammen.*
- *Nils er «så mye høyere» enn Tor.*
- *Kari kaster «så mye lenger» enn Lise.*

Både barn og voksne har en tendens til å generalisere denne kunnskapen. Vi oppdager at den gjelder for lengder, senere også for arealer, volum og en rekke andre størrelser. Men hva med temperaturer? Det er en utfordring at vi ikke på en meningsfull måte kan addere to temperaturmålinger, når de måles i celciusgrader. Når barn oppdager dette, kan de bli i tvil om gyldigheten av addisjon også på andre områder. Barn bør få vite at celciusskalaen har et «tilfeldig» valgt nullpunkt. Derfor egner ikke målingene seg for addisjon. Men temperaturdifferanser har en mening!

Mange har vel observert at når barn spiller et terningspill og skal «flytte fem fram», kan det ta tid før de forstår at de ikke skal telle med den ruten man står i. Slik kan det også være med lengdemåling. Ikke sjelden plasserer et barn 1-tallet på linjalen ved det ene endepunktet når det måler et linjestykke med en linjal.

2.1.5 Lage enheter

Vi kan finne en enhet, for eksempel lengden av en fot, måle lengdene ved å telle antall fot og sammenligne tallene. I lek er dette vanlig. Bruk av kroppen som lengdeenhet har den fordelen at man alltid har måleredskapene tilgjengelige. Barna oppdager likevel meget raskt at det å telle fot, skritt, fingerbredder osv. ikke blir nøyaktig, siden for eksempel ikke alle skritt er like lange. Vanligvis begynner barna å bruke mindre enheter, for eksempel fingerbredder, når de ser at de store enhetene ikke går opp i den målte lengden. Da oppdager de at heller ikke fingerbredden alltid går opp.

All måling medfører unøyaktighet (usikkerhet). Bruk av standardiserte måleredskaper reduserer måleusikkerheten. For at barna bedre skal forstå dette, bør de ikke arbeide med enheter som er så små at usikkerheten synes å forsvinne. Det kan fort skje når man bruker avanserte måleredskaper. Egendefinerte enheter stiller elevene stadig overfor utfordringer knyttet til målingenes nøyaktighet.

2.1.6 Standardiserte enheter

Det er trolig viktig for forståelsen av standardiserte enheter at barna har arbeidet med egendefinerte enheter før de standardiserte presenteres for dem. Tidlig introduksjon av målebånd og meterstaver kan dermed være til hinder for begrepsutviklingen. Barnas lek kan danne grunnlag for utviklingen av begrepene, hvis leken har en slik karakter at «uformell» måling er nødvendig. Men det er viktig at barna etter hvert forstår hensikten med standardiserte enheter, at de er konstante over tid og rom. De bør også utvikle begrep om størrelsen av de vanligste enhetene, gjerne sammenlignet med kroppsdeler.

2.1.7 Telle og måle

Innføringen i måling skjer ved at man teller enheter. Forståelsen av at måling er «noe mer» enn telling, forutsetter at vi har begrep om kontinuitet. Lengde er en kontinuerlig variabel. Det finnes ingen enheter små nok til at man ved telling kan måle enhver lengde. Når vi bruker desimaltall for å angi lengder, må vi ha et uendelig antall desimaler for å angi lengdene nøyaktig. (Her skiller ekte måling seg fra regning med penger. I økonomien har man definisjoner og regler som gjør at dette problemet kan unngås.) Kontinuitet synes vanskelig å begripe for mange barn i barneskolen. I kapittel 8 ser vi litt nærmere på dette.

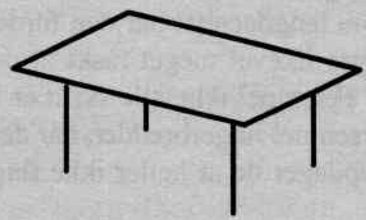
2.1.8 Direkte begrep av lengdeenheter

Vi bruker stadig lengdemål i det daglige. Derfor er det viktig at vi har en noenlunde klar forestilling om enhetenes «absolutte» størrelser og om forholdet mellom enhetene, det vil si «relative» størrelser. Hvordan kan vi danne oss et bilde av om elevene har slik kjennskap til de «absolutte» størrelsene? Det enkleste er å be dem bruke enhetene til å si noe om lengder i kjente situasjoner.

2.2 Oppgaver med lengdemåling og lengdeenheter

2.2.1 Absolutt forståelse av de metriske enhetene

Høyden og størrelsen av et bord vil variere en del. Likevel kan vi si at et spisebord i Norge er slik at vi kan sitte inntil det med knærne under det. Alle har erfart det. Men hvor høyt er det egentlig? Det vet barna. Spørsmålet nedenfor dreier seg derfor ikke om kunnskap om bord, men om barna har en oversikt over viktige måleenheter.



Oppgave 1, 6. klasse
Dette er en tegning av et spisebord.
Omtrent hvor høyt tror du det er i virkeligheten?
Sett kryss.

- ☐ 10 mm
- ☐ 1 cm
- ☐ 10 cm
- ☐ 1 m
- ☐ 10 m

Oppgaveeksempel 1

Spørsmålet var det første i heftet for 6. klasse, og nesten alle elevene svarte på det. 82 % av elevene svarte riktig (1 m). Om lag halvparten av dem som svarte feil, foreslo 10 cm.

Oppgave 1, 6. klasse (N = 891)	**6. klasse**
Ubesvart	0
1 m (Riktig svar)	82
10 cm	8

Tabell 1: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 1, 6. klasse

Når feilsvarene var så mange at det gjelder ca. fem elever i en klasse på 20–30, kan det tyde på at de er usikre på den grunnleggende lengdeenheten. Men på dette alderstrinnet er også mange usikre i en skriftlig prøvesituasjon. Det er vanligvis noen som er usikre på om *m* betyr *meter.* Hva betyr nå egentlig *cm?* En utprøving hvor læreren stiller eleven det samme spørsmålet muntlig, kan gi færre feilsvar.

Spørsmålsstillingen kan også snus. I oppgave 6 (A) skal elevene selv komme med gode eksempler på en lengde på omtrent en meter.

Oppgave 6, 6. klasse.

Omtrent hvor lang er en meter? Sett kryss.

- ☐ Fra albuen til fingerspissen
- ☐ Fra golvet til hoftehøyde
- ☐ Høyden av ei dør
- ☐ Høyden av en kjøkkenbenk
- ☐ Bredden av en hånd
- ☐ Bredden av en vei

Oppgaveeksempel 2

Tabell 2 nedenfor viser at ca. 80 % av elevene enten har svart *fra golvet til hoftehøyde, høyden av en kjøkkenbenk* eller begge deler. Dette er de riktige svarene. Ca. 20 % svarte altså feil på dette spørsmålet. Dette er omtrent en like stor del som i oppgave 1 (A). Det vanligste feilsvaret er *fra albuen til fingerspissen.*

Oppgave 6, 6. klasse (N = 434)	**6. klasse**
Ubesvart	0
Høyden av en kjøkkenbenk (Riktig svar)	26
Fra golvet til hoftehøyde (Riktig svar)	42
Både fra golvet til hoftehøyde og høyden av en kjøkkenbenk (Riktige svar)	13

Tabell 2: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 6, 6. klasse

Det er vanlig å bruke kroppen for å konkretisere lengdemål fra 1 mm til 1 m. Kroppen har vi med oss. Til en viss grad kjenner vi den. Oppgaven nedenfor tar for seg slike mål:

Oppgave 13, 6. klasse.

Per vil lage seg huskeregler for lengdemål. **Sett kryss.**

a. 1 mm er omtrent

- ☐ bredden av en hånd
- ☐ et langt skritt
- ☐ tykkelsen av lillefingeren
- ☐ tykkelsen av en negl

b. 1 dm er omtrent

- ☐ bredden av en hånd
- ☐ et langt skritt
- ☐ tykkelsen av lillefingeren
- ☐ tykkelsen av en negl

Oppgaveeksempel 3

Oppgave 13a, 6. klasse (N = 434)	6. klasse
Ubesvart	3
Tykkelsen av en negl (Riktig svar)	73
Tykkelsen av lillefingeren	12
Et langt skritt	7

Tabell 3: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 13a, 6. klasse

Oppgave 13b, 6. klasse (N = 434)	6. klasse
Ubesvart	8
Bredden av en hånd (Riktig svar)	56
Tykkelsen av lillefingeren	23
Et langt skritt	7

Tabell 4: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 13b, 6. klasse

Flest elever, 73 %, kunne angi at 1 mm er omtrent tykkelsen av en negl. Omtrent halvparten av dem som svarte feil, ca. 12 %, valgte tykkelsen av lillefingeren og 7 % et langt skritt. Færre elever, 56 %, kunne angi at 1 dm er omtrent bredden av en hånd. Omtrent halvparten av dem som svarte feil, ca. 23 %, valgte også her tykkelsen av lillefingeren. Det er god grunn til å arbeide mye med de absolutte størrelsene på enhetene. I kapittel 8 kan du se mer på dette.

2.2.2 Forholdet mellom lengdeenheter

Lengdeenhetene har et innbyrdes forhold. Definisjonene kan være vanskelige å huske. Forståelsen av og kunnskapen om dette kan undersøkes på flere måter. Oppgaven nedenfor er den enkleste måten å spørre på.

Oppgave 4, 6. klasse.

Hvor mange millimeter går det i en meter? Sett kryss.

- ☐ 1 000 mm
- ☐ 100 mm
- ☐ 10 mm
- ☐ 1 mm

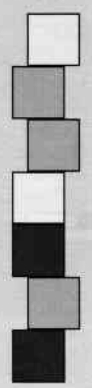
Oppgaveeksempel 4

Omtrent 70 % visste at det går 1000 mm i en meter. 100 mm var det feilsvaret som var vanligst (19 %).

Oppgave 4, 6. klasse (N = 434)	6. klasse
Ubesvart	1
1000 mm (Riktig svar)	72
100 mm	19
10 mm	7

Tabell 5: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 4, 6. klasse

Kunnskapen om forholdet mellom lengdeenhetene viser seg også i evnen til å bruke dem i ulike situasjoner. I oppgave 3 i 6. klasse vil det trolig ikke være noe problem å regne ut at tårnet er 70 cm høyt. Utfordringen ligger i å uttrykke dette med de andre enhetene.



Oppgave 3, 6. klasse

Per bygger et tårn av 7 klosser som hver er nøyaktig 10 cm høy.
Hvor høyt blir tårnet? Sett kryss.

- ☐ 7,0 cm
- ☐ 7,0 dm
- ☐ 7,00 mm
- ☐ 0,7 m
- ☐ 7,0 m

Oppgaveeksempel 5

Vi ser av tabell 6 at omtrent 60 % svarte enten 7,0 dm, 0,7 m eller begge deler, som var riktige svar. Omtrent like mange valgte å bruke benevningen dm som m.

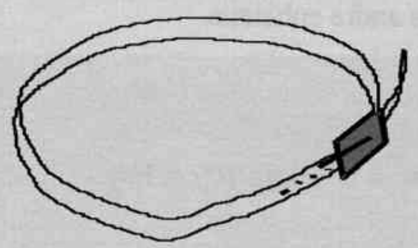
Oppgave 3, 6. klasse (N = 891)	6. klasse
Ubesvart	2
7,0 dm (Riktig svar)	26
0,7 m (Riktig svar)	30
7,0 dm og 0,7 m (Riktige svar)	4
7,0 cm	20
7,0 m	12

Tabell 6: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 3, 6. klasse

Ved å eliminere «opplagte feil» ville det ikke være vanskelig å tippe ett av de riktige svarene. Den viktigste informasjonen i svarfordelingen er kanskje at bare ca. 4 % av elevene klarte å angi begge de riktige svarene. Av de elevene som svarte feil, valgte halvparten, ca. 20 %, 7,0 cm. Foruten ren tipping kan det være flere grunner til å velge et slikt svar. Elevene velger et svar som har samme benevning som oppgaven (centimeter), de kan vurdere på tegningen (ca. 5 cm), eller de kan tro at 7,0 cm er 7 ganger så mye som 10 cm, det vil si at de har problemer med desimaltall. Det er overraskende at hele 12 % av elevene tror at tårnet er 7 m høyt, når hver av de 7 klossene er bare 10 cm.

Svarene på oppgavene ovenfor viser at det er stor usikkerhet blant 11 år gamle elever når det gjelder størrelsen på måleenhetene. Det tyder også på at det er større usikkerhet med hensyn til enhetene desimeter og millimeter enn meter.

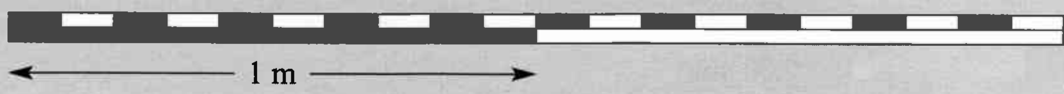
Den neste oppgaven viser både en gjenstand som skal måles, og en målestav gitt som et bilde, langt fra den virkelige størrelsen. Denne var med for begge klassetrinnene.



Oppgave 2, 6. klasse og oppgave 1, 9. klasse

Beltet til Håvard er 1 m og 4 cm langt.

Tegn hvor langt beltet blir hvis vi strekker det ut langs linjalen under.



Oppgaveeksempel 6

Sju–åtte prosent har ikke svart på denne oppgaven. Det kan tyde på at de ikke har klart å forestille seg situasjonen som beskrives i teksten. Poenget med oppgaven var å se hvordan elevene markerer de 4 cm. Utfordringen ligger i at målestaven er inndelt i meter og desimeter.

I 6. klasse klarte 36 % å markere *tydelig mellom 1,0 m og 1,1 m,* som godtas som riktig svar. I 9. klasse klarte 67 % å markere riktig. Den hyppigste feilen var å markere 1,4 m, med henholdsvis 23 % og 16 % på de to trinnene. Det viser usikkerhet når det gjelder rekkefølgen i inndelingen meter – desimeter – centimeter.

Oppgave 2, 6. klasse og oppgave 1, 9. klasse (N = 891)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	8	7
Mellom 1,0 og 1,1 (Riktig svar)	36	67
Omtrent 1,4	23	16
Mellom 1,45 og 2	14	3

Tabell 7: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 2, 6. klasse og oppgave 1, 9. klasse

2.2.3 Måling

En viktig ferdighet ved måling er å starte med 0. Mange elever gjør feil her. Det henger sammen med at læring av måling starter med å telle enheter. Etter hvert bør man frigjøre seg fra telling for å lese av på en skala. Overgangen medfører at man forstår at det ikke er delestrekene på skalaen man teller. I lengdemål markerer delestrekene at man for eksempel går fra en centimeter til den neste. Det er intervallene som markerer enhetene (centimeter). Den første delestreken skal derfor ikke regnes med. Oppgave 5 (A) kan gi en indikasjon på om eleven starter med 1.

Oppgave 5, 6. klasse.

Hvor langt er linjestykket hvis merkene på linjestykket viser centimeter? ....

Oppgaveeksempel 7

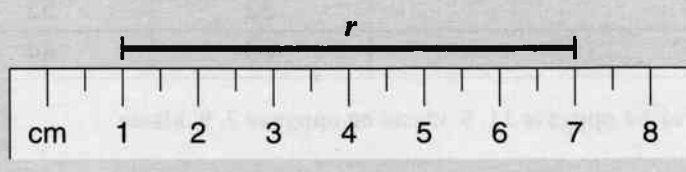
Omtrent 50 % av elevene svarte korrekt, 10 cm eller 1 dm. (Ytterligere 10 % viser at de har tenkt riktig, men glemt å ta med benevning.) Omtrent 10 % av elevene har startet med å telle fra 1. Linjestykket i oppgaven er med hensikt tegnet slik at skalaen ikke blir helt riktig. Det avslører at 9 % av elevene har brukt vanlig linjal og målt linjestykket. De har fått ca. 10,4 cm. Disse elevene viser at de kan måle, men de har problemer med å akseptere informasjonen som er gitt i oppgaven.

Oppgave 5, 6. klasse (N = 434)	**6. klasse**
Ubesvart	7
10 cm eller 1 dm (Riktig)	50
11 cm (eller 11)	10
Har målt med linjal. Svar ca. 10,4 cm	9
1 m	6

Tabell 8: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 5, 6. klasse

En annen oppgave, 16 i 6. klasse og 2 i 9. klasse, inviterer mer direkte til at elevene gjør feilen å måle fra 1, og ikke fra 0. Denne situasjonen er nærmere vanlig måling enn i oppgave-eksempel 7 over ved at linjalen er lagt ved siden av linjestykket, riktignok på en uhensikts-messig måte.

Oppgave 16, 6. klasse og oppgave 2, 9. klasse



Hvor langt er linjestykket *r*? ....

Oppgaveeksempel 8

Bare 50 % av elevene i 6. klasse svarte 6 cm (riktig) eller 6. Men 79 % av elevene i 9. klasse gav de samme svarene. Det vanligste feilsvaret var 7 cm eller bare 7. Ca. 25 % i 6. klasse og 15 % i 9. klasse gav et slikt svar. Det tyder på usikkerhet i bruk av linjalen til måling. Heller ikke denne figuren var tegnet i riktig skala, og 9 % i 6. klasse brukte egen linjal til å måle lengden av linjestykket. Det er omtrent som i oppgave 5 ovenfor. I 9. klasse var det langt færre som målte med egen linjal.

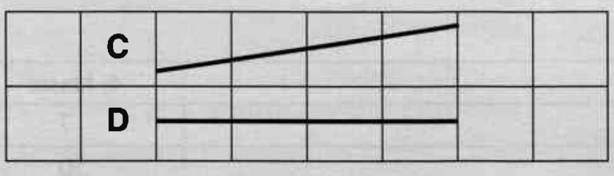
Oppgave 16, 6. klasse (N = 434) og oppgave 2, 9. klasse (N = 891)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	4	1
6 cm (Riktig) eller 6	50	79
7 cm	25	15
6,4 cm, har målt med linjal	9	1

Tabell 9: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 16, 6. klasse og oppgave 2, 9. klasse

2.2.4 Å flytte og sammenligne

Svarene på oppgaven nedenfor kan tolkes på ulike måter.

Oppgave 11, 6. klasse og oppgave 7, 9. klasse



Ovenfor ser du to linjestykker, C og D.
Sett kryss.

- ☐ C er lengre enn D.
- ☐ D er lengre enn C.
- ☐ C og D er like lange.
- ☐ Vi kan ikke si noe om hvilket linjestykke som er lengst.

Oppgaveeksempel 9

Oppgave 11, 6. klasse (N = 434) og oppgave 7, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	2	1
C > D (Riktig)	32	52
D = C	63	44

Tabell 10: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 11, 6. klasse og oppgave 7, 9. klasse

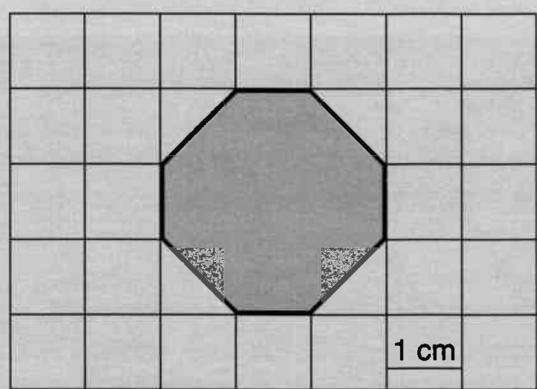
Mønsteret av kvadratiske ruter (1 cm) gjør det lett å sammenligne lengden av linjestykkene C og D. Hvordan vet vi at C er lengre enn D?

La oss ta utgangspunkt i D. Hvis venstre endepunkt holdes fast og vi dreier linjestykket mot urviseren, vil høyre endepunkt ikke bare gå oppover, men også mot venstre. Endepunktet vil forlate den markert vertikale linja i rutemønsteret. Når D er parallell med C, vil høyre endepunkt ikke lenger nå fram til linja i rutemønsteret. Altså må D være kortere enn C. (C er lengre enn D.)

Passeren er et tjenlig redskap til å vise dette. Elevene har sikkert selv erfart at det å «holde» en lengde ved hjelp av utstrakte armer kan være vanskelig. Introduksjonen av passeren for å «holde på» en lengde mellom de to spissene gir mening både i oppgaver som er nevnt ovenfor, og når man senere skal «definere» sirkelen som *alle punktene med samme avstand fra sentrum.* Vi ser at henholdsvis 32 % og 52 % av elevene på de to klassetrinnene ser at C er lengre enn D, mens henholdsvis 63 % og 44 % mener at de er like lange.

Linjestykkene er tegnet slik at ved bruk av vanlig linjal vil elevene i begge tilfellene måle til 4,0 cm. Elevene som «kontrollmåler», vil dermed lett svare at linjestykkene er like lange. Vi skjønner at det ikke er selvsagt for elevene at «avstanden mellom parallelle linjer måles langs en normal til linjene», eller at «avstanden mellom et punkt og en rett linje måles langs normalen». Å forklare avstanden som «den korteste veien» mellom to objekter er litt diffust for mange.

Usikkerheten med lengder av linjestykker som går i ulike retninger, illustreres også med en mer praktisk oppgave, oppgaveeksempel 10. Denne oppgaven er mer sammensatt og forutsetter at elevene tolker oppgaven slik at de kan finne omkretsen ved å legge sammen sidene.



Oppgave 7, 6. klasse og oppgave 3, 9. klasse

Lengden rundt kanten er:

- ☐ 8 cm
- ☐ mer enn 8 cm
- ☐ mindre enn 8 cm
- ☐ vi kan ikke vite det

Oppgaveeksempel 10

For elever som ser at diagonalene i de kvadratiske rutene er lengre enn sidene i kvadratet, må omkretsen bli større enn 8 cm. Henholdsvis 34 % og 49 % av elevene på de to klassetrinnene svarte dette.

Oppgave 7, 6. klasse (N = 434) og oppgave 3, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	3	2
Mer enn 8 cm (Riktig)	34	49
8 cm	24	29
Mindre enn 8 cm	28	17
Vi kan ikke vite det	9	3

Tabell 11: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 7, 6. klasse og oppgave 3, 9. klasse

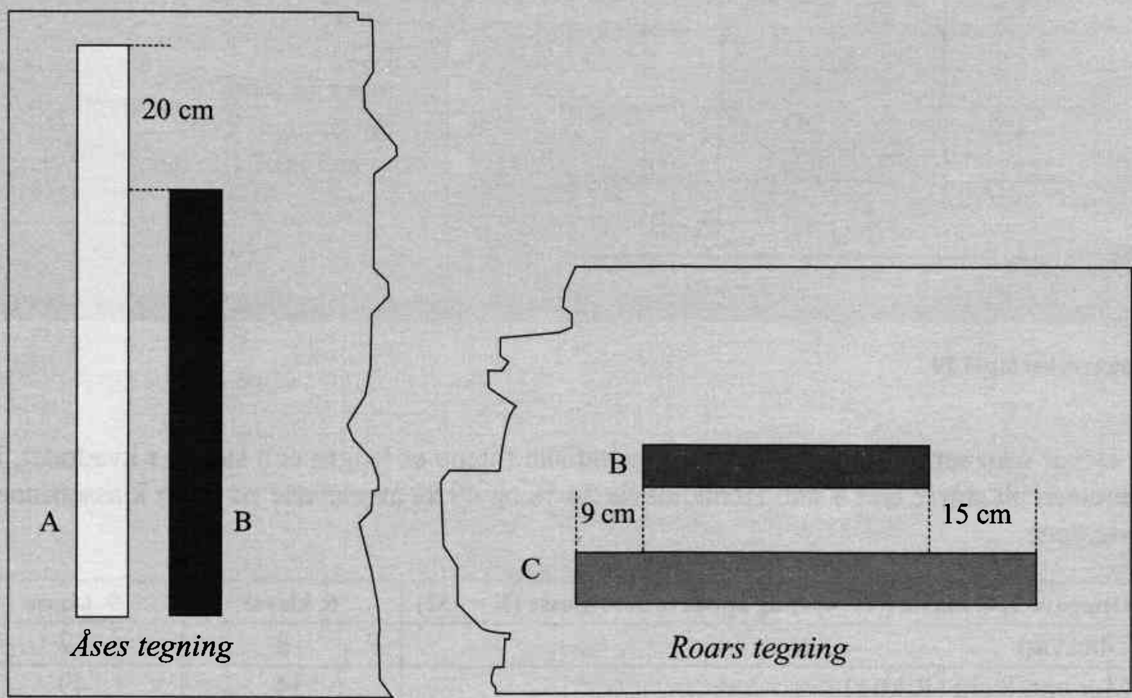
Omtrent hver fjerde elev på begge trinn svarte at omkretsen er 8 cm, noen flere i 9. enn i 6. klasse! Omtrent like mange elever svarte at omkretsen er mindre enn 8 cm, færre i 9. klasse enn i 6. klasse. Dette tyder på at over halvparten av elevene har problemer med å «flytte med seg det 1 cm lange linjestykket» og sammenligne med sidene i figuren.

Denne oppgaven er tegnet i riktig skala. Oppgaven kan dermed tilsløre at en del av elevene som svarer riktig, likevel har det problemet vi har nevnt ovenfor. Ved hjelp av linjal kan de måle diagonalen til ca. 1,4 cm. Ved å sette mål på sidene kommer de fram til riktig svar.

I oppgaven ovenfor ønsket vi å undersøke om elevene er i stand til å flytte med seg et mål (1 cm) omkring i figuren og sammenligne med linjestykkene som danner omkretsen. Når forholdsvis få svarte riktig, kan det skyldes at de ikke hadde denne evnen, men det kan også skyldes at det å beregne en omkrets er et problem for mange.

Oppgavene som er gjengitt i oppgaveeksemplene 7 til 10, er hentet fra Dickson, Brown & Gibson (1984). De refererer til en stor matematikkundersøkelse i England på begynnelsen av 1980-tallet, CSMS-undersøkelsen. I oppgave 5 i 6. klasse (A) har denne undersøkelsen 79 % riktige svar for tolvåringer. De norske resultatene er betydelig lavere, også når aldersforskjellen på ett år tas i betraktning. For oppgavene i de andre oppgaveeksemplene samsvarer de norske resultatene godt med CSMS-undersøkelsen.

Oppgave 8, 6. klasse og oppgave 4, 9. klasse



Åse og Roar har tre bordbiter.
Åse legger to av bitene, A og B, ved siden av hverandre og lager en tegning.
Roar tegner bitene B og C.

Vi ser at B er kortere enn både A og C.
Hva kan du si om lengden av A og C?

- ☐ A og C er like lange.
- ☐ A er lengre enn C.
- ☐ C er lengre enn A.
- ☐ Det er ikke mulig å vite hvilken som er lengst.

Oppgaveeksempel 11

Denne oppgaven gir en annen tilnærming til problemet. Her er to situasjoner gjengitt i forskjellig målestokk. I de to situasjonene er det en felles referanse for lengdene ved at bord B inngår i figurene. For øvrig er lengdene målsatt, men ikke i samme skala. I denne oppgaven får elevene ingen nytte av å bruke linjal. Hvis elevene måler på tegningen, finner de at A er større enn C. Omtrent fire av fem elever i 6. klasse (11 år) og to av fem elever i 9. klasse (14 år) svarte dette. Ca. 11 % i 6. klasse og ca. 47 % i 9. klasse svarte riktig, at C er lengre enn A.

Oppgave 8, 6. klasse (N = 434) og oppgave 4, 9. klasse (N = 452)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	2	5
C > A (Riktig)	11	47
A = C	5	3
A < C	80	41
Det er ikke mulig å vite hvilken som er lengst	3	3

Tabell 12: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 8, 6. klasse og oppgave 4, 9. klasse

Det er god grunn til å spørre om en så komplisert oppgave måler det den er ment å måle. Er oppgaven for omfattende til at 11 år gamle elever kan få oversikt? Ser de kanskje ikke at bord-bit B går igjen i begge figurene? Hvilke andre grunner kan det være til at elevene svarer feil?

Vi bad elevene i 9. klasse forklare hvorfor de svarte som de gjorde. Omtrent en firedel av elevene gav ingen forklaring. Ca. 41 % tok utgangspunkt i at B var felles, og at tillegget til B var 24 cm for C og 20 cm for A. Dermed måtte C være lengre enn A. Ca. 8 % viste til at de hadde målt. Av andre svar er en stor gruppe *«Vi ser det»*. Noen tar bare utgangspunkt i tallene og viser til 20 cm og 15 cm, men overser de 9 cm i den andre enden av C.

Oppgave 4b, 9. klasse (N = 452)	**9. klasse**
Ubesvart	24
Viser til at 24 cm > 20 cm (Riktig)	41
«Vi ser det»	6
Måling (med linjal)	8

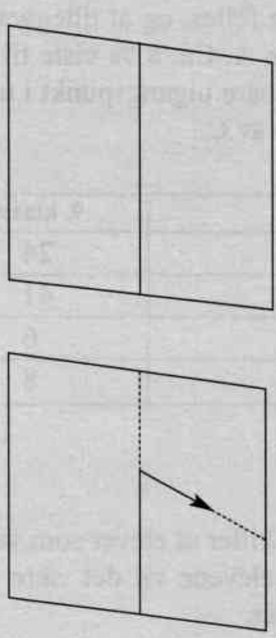
Tabell 13: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 4b, 9. klasse

For 14 år gamle elever synes dermed oppgaven å fungere bra. Den skiller ut elever som viser at de har tilegnet seg transitivitet i forhold til lengder. For de andre elevene vil det være svært aktuelt med samtaler, hvor de muntlig kan forklare hvordan de tenker.

3 Areal

Er det plass nok her til bildet? Ikke sjelden er det tilstrekkelig med et raskt overblikk for å få nødvendig informasjon om et areal. Da ser man gjerne på lengde og bredde hver for seg. Størrelsen vurderes i forhold til yttermålene. Formen kan også spille inn i vurderingen. Noen ganger er ikke kunnskap om største lengde eller største bredde nok. *Hvor mange fliser må jeg ha til denne veggen? Hvor mange kg plenfrø trenger jeg til denne delen av hagen?* Da må vi finne arealet.

Arealbegrepet synes uklart for mange elever. Slik som andre begrep utvikles arealbegrepet over tid gjennom erfaringer og refleksjon. Hvordan kan vi legge forholdene til rette for at elevene skal utvikle viktige sider ved begrepet, slik at de for eksempel ser at areal og lengde ikke er det samme, men at arealet angir størrelsen på en flate (to dimensjoner)? Hvilke problemstillinger motiverer elevene til å bruke areal, slik at de utvikler arealbegrepet? Alle elever har erfaringer fra situasjoner utenfor skolen. Lek kan fremme behovet for å vurdere både størrelse og form på et areal. Mange voksne (kanskje særlig menn) husker trolig leken «Å kappe land».



Å kappe land

To deltakere risser opp to «land» inntil hverandre på hardtrampet bakke. Arealene bør være omtrent like store.

Deltaker 1 stiller seg i sitt land og kaster kniven slik at den står i motstanderens land. Han risser langsetter knivbladet, slik at landet deles i to. Deltaker 2 må gi fra seg den ene delen.

Deltaker 2 stiller seg i det som er igjen av sitt land, og kaster kniven i landet til deltaker 1. Og så videre.

Den vinner som klarer å avgrense motstanderens land så mye at han ikke kan stå i det uten å tråkke på en av grensene.

Aktivitet 1

Hvis man ikke ønsker å bruke kniv, kan man bruke en annen gjenstand som angir retning, for eksempel en liten pinne. I denne leken er størrelsen av arealet det sentrale. Men formen kan også avgjøre om man har plass til å sette foten i eget land. Linjene som stadig forskyves, danner grensene (omkretsen), men har for øvrig liten betydning. Stadig vekk må arealenes størrelse vurderes, både når man skal gi fra seg en del av landet, og når man skal sikte på et sted å kaste kniven. Det er arealet man spiller om.

I skolen kan vi også starte med å legge opp til enkle situasjoner. Et vanlig råd er å arbeide med å dekke flater med arealenheter som ikke er kvadratiske, siden kvadratet senere skal definere arealenhetene. Når elevene har innsett at areal eksisterer, blir neste skritt å kunne danne seg et bilde av størrelsen. Vi voksne har gjennom skolegangen lært oss ulike beregningsmåter. Det er sjelden man teller arealenheter i dagliglivet. Hvis vi har behov for å kjenne arealet til en flate, sammenligner vi det oftest med mangekanter og sirkel.

Rektangelet er den mest brukte figuren i arealberegning. Vi har lært oss til å multiplisere lengde og bredde.

$\mathbf{A = l \cdot b}$

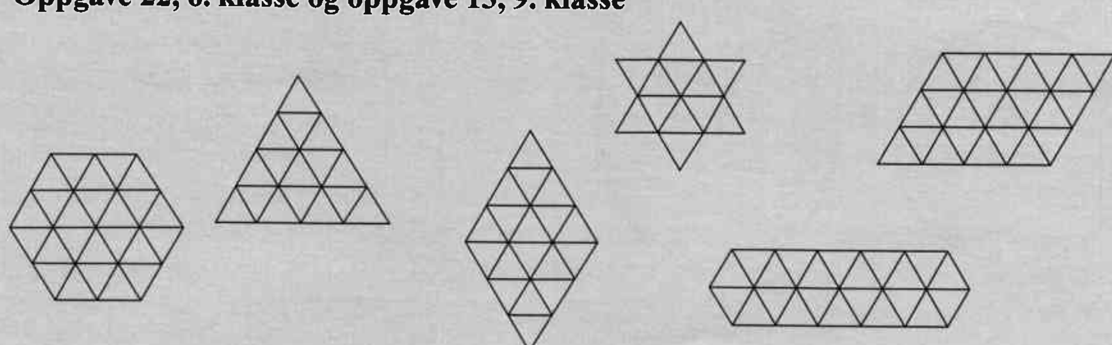
Hvis lengden og bredden oppgis i meter, kommer rektangelet ut i kvadratmeter. Formelen viser tydelig (for dem som kan lese formler) at det er to dimensjoner som avgjør størrelsen av arealet. For å arbeide inn denne forståelsen kan det være aktuelt med oppgaver hvor man går ut fra et bestemt areal, men endrer formen på figuren.

Etter hvert som vi venner oss til å regne ut et areal, blir vi kanskje mindre bevisst at areal, som andre målbare størrelser, bygger på enheter som vi kan telle sammen. Men også for areal gjelder det at full forståelse forutsetter at areal oppfattes som en kontinuerlig størrelse. For å vurdere om elevene oppfatter areal som et eget begrep, er det vanlig å la dem få problemstillinger hvor det ikke er lett å gjøre beregninger på grunnlag av lengdemål. Ofte bruker man da flateenheter som kan telles direkte.

3.1 Telling av arealenheter

Oppgave 22 i 6. klasse og oppgave 13 i 9. klasse undersøker om elevene er i stand til å vurdere areal gjennom telling av enheter.

Oppgave 22, 6. klasse og oppgave 13, 9. klasse



Sett en ring rundt de to figurene som har likt areal.

Oppgaveeksempel 12

Oppgave 22, 6. klasse (N = 457) og oppgave 13, 9. klasse (N = 437)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	6	8
A og F (Riktig svar)	51	63
B og C	6	5
F og C	12	5

Tabell 14: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 22, 6. klasse og oppgave 13, 9. klasse

Vi ser at ca. 51 % av elevene i 6. klasse og ca. 63 % av elevene i 9. klasse finner riktige figurer. Det er selvsagt mulig å tippe riktig uten å telle. Formen på figurene gjør at man fort tipper feil. Det må antas at de fleste elevene som har svart feil, ikke har telt. (Men noen kan ha telt feil.) Liten forskjell i størrelse forklarer valget av B og C, mens tilnærmet formlikhet kan forklare at noen velger F og C.

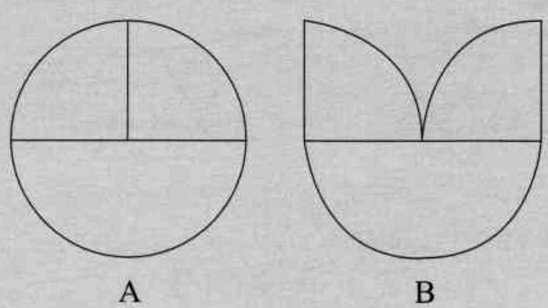
Ut fra svarene kan det synes som om omtrent halvparten av elevene ikke velger å telle like enheter når det ikke er aktuelt med beregning. Oppgaven er hentet fra Dickson, Brown & Gibson (1984). De viser til at mindre enn 70 % av femtenåringer i USA har svart riktig på en tilsvarende oppgave. Dette svarer godt til våre resultater for elever på 11,5 år og 14,5 år.

3.2 Konservering

Hva skjer med arealet til en figur som deles opp og settes sammen på en ny måte? Spørsmålstillingen kan påvirke svarene. Oppgave 12 i 6. klasse (B) går egentlig ut på at man klipper av to firedeler av sirkelen og setter dem tilbake etter at de har byttet plass.

Oppgave 25, 6. klasse

Se på de to figurene nedenfor.



Hva kan du si om arealene? Sett kryss.

- ☐ A har større areal enn B.
- ☐ B har større areal enn A.
- ☐ A og B har like store areal.
- ☐ Vi kan ikke si hvilket areal som er størst.

Oppgaveeksempel 13

De fleste ser at arealet er det samme, men 23 % av elevene i 6. klasse mener at arealene ikke er like store.

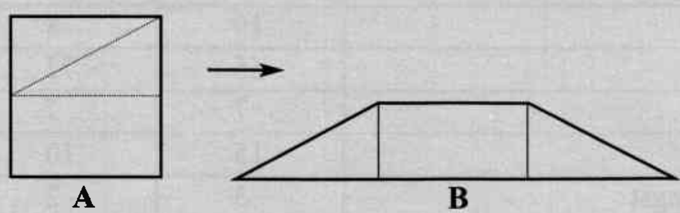
Oppgave 25, 6. klasse (N = 457)	6. klasse
Ubesvart	2
A = B (Riktig svar)	61
A > B	13
B > A	10
Vi kan ikke si hvilket areal som er størst	8

Tabell 15: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 25, 6. klasse

Oppgave 10 i 6. klasse og oppgave 6 i 9. klasse synes å legge enda klarere opp til at arealene er like store ved at det uttrykkelig står at det er de samme delene som danner den nye figuren.[1] Til gjengjeld kan man ikke like direkte sammenligne figurene.

Oppgave 10, 6. klasse og oppgave 6, 9. klasse

Jeg deler firkanten **A** opp i tre stykker og setter delene inntil hverandre, slik at det blir en ny figur, **B.**



Sett kryss.

- ☐ Arealet av A er større enn arealet av B.
- ☐ A og B har like store areal.
- ☐ Arealet av B er større enn arealet av A.
- ☐ Vi kan ikke si hvilket areal som er størst.

- ☐ Det er lenger rundt A enn rundt B.
- ☐ Det er like langt rundt A og B.
- ☐ Det er lenger rundt B enn rundt A.
- ☐ Vi kan ikke si hvilken vei som er lengst.

Oppgaveeksempel 14

[1] Strengt tatt er dette feil. Vi må speilvende en av trekantene for å kunne sette sammen den nye figuren.

Nå er det under halvparten, 48 %, av elevene i 6. klasse og 71 % av elevene i 9. klasse som svarer riktig.

Oppgave 10a, 6. klasse (N = 434) og oppgave 6a, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	8	3
A = B (Riktig svar)	48	71
A > B	9	4
B > A	30	18
Vi kan ikke si hvilket areal som er størst	4	3

Tabell 16: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 10a, 6. klasse og oppgave 6, 9. klasse

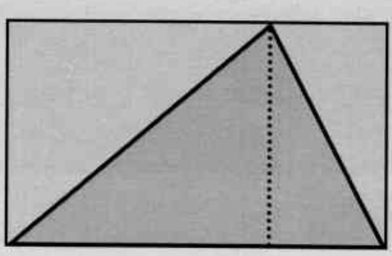
Figurenes form har i stor grad påvirket svarene, for 30 % i 6. klasse og 18 % i 9. klasse mener at den langstrakte figuren hadde størst areal.

Elevene ble også spurt om omkretsen. B har betydelig større omkrets enn A. Noen få elever svarte at omkretsen på de to figurene var like stor. Kanskje er det for noen en overgeneralisering av konservering. 55 % i 6. klasse og 72 % i 9. klasse svarte riktig. Henholdsvis 15 % og 10 % av elevene på de to klassetrinnene mener at omkretsen av A er større enn omkretsen av B.

Oppgave 10b, 6. klasse (N = 434) og oppgave 6b, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	19	8
B > A (Riktig svar)	55	72
A = B	7	7
A > B	15	10
Vi kan ikke si hvilken vei som er lengst	3	2

Tabell 17: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 10b, 6. klasse og oppgave 6b, 9. klasse

Oppgave 14 i 6. klasse og oppgave 15 i 9. klasse (B) kan ha enkelte likhetstrekk med den forrige. Nå skal arealet vurderes når halvparten av et rektangel fjernes. Det er ikke umiddelbart klart for alle elever at det er nettopp dette som skjer.



Oppgave 27, 6. klasse og oppgave 25, 9. klasse

Arealet av hele rektangelet er 20 cm^2

Hvor stort er arealet av den grå delen? .... cm^2

Oppgaveeksempel 15

Det var forholdsvis mange elever som ikke svarte på denne oppgaven, 16 % i 6. klasse og 21 % i 9. klasse.

Oppgave 27, 6. klasse (N = 457) og oppgave 25, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	16	21
10 (Riktig svar)	32	45
20	7	2
Måler med linjal og regner ut arealet. Svar i området 7– 8 cm^2	2	6
12–13 e.l. Måler omkretsen av trekanten	12	8
15–16 Måler omkretsen av rektangelet	4	4

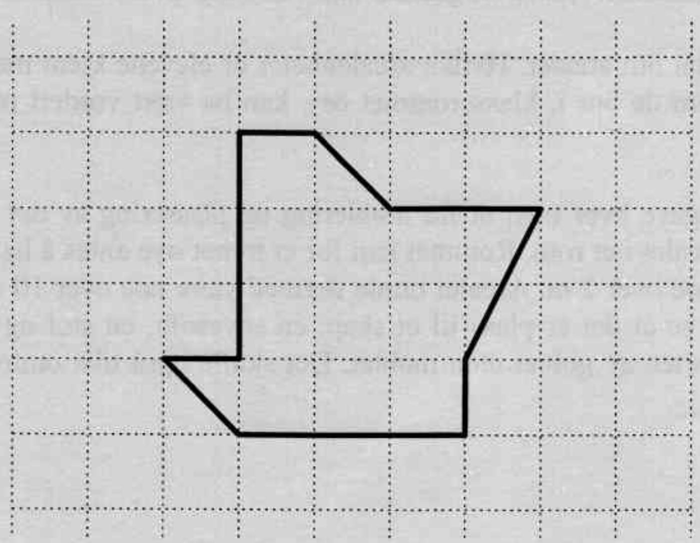
Tabell 18: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 27, 6. klasse og oppgave 25, 9. klasse

Det var bare henholdsvis 32 % og 45 % av elevene på de to klassetrinnene som svarte korrekt, 10 cm^2. En del elever, spesielt i 9. klasse, synes å ha målt med linjal og regnet ut et areal som ligger i området 7–8 cm^2. De andre svarene kan ha kommet fram ved at elevene har målt omkretsen av trekanten og av rektangelet.

Dickson, Brown & Gibson (1984) viser til at 47 % av elleveåringer og 50 % av femtenåringer i USA har svart riktig på en tilsvarende oppgave. Det svarer godt til våre resultater for elever på 14 år. Forholdsvis få av elleveåringene våre har svart riktig.

Er elevene i stand til å arbeide med deler av arealenheter uten at disse enhetene gis i form av desimaltall? Oppgaven nedenfor innbyr elevene til å telle, men slik at de skal regne med delte ruter.

Oppgave 24, 6. klasse



Rutene ovenfor er på 1 cm^2.

Hvor stort er arealet til figuren som er tegnet inn? ....

Oppgaveeksempel 16

Oppgaven ble bare gitt til 6. klasse. Noen teller bare med de hele rutene og får svaret 10. Noen flere teller med alle de aktuelle rutene, men tar ikke hensyn til at noen av dem er delt. De får dermed 14 som svar. Til sammen er det ca. 7 % som dermed ikke regner med deler av enheten.

49 % av elevene tar med deler av rutene og teller sammen til 12 (cm^2). I tillegg har en del fått 11 eller mellom 11 og 12. Disse elevene har trolig arbeidet med deler av enheten, men regnet feil.

Svaret 15 kan man få ved en feilaktig vurdering av omkretsen til figuren. (Randen av figuren passerer gjennom eller følger sidekantene til 15 ruter.) Det tyder også på at en stor del av elevene på dette klassetrinnet har problemer med å skille mellom omkrets og areal.

Oppgave 24, 6. klasse (N = 457)	**6. klasse**
Ubesvart	10
12 cm^2 eller 12 (Riktig svar)	49
Mellom 11 og 12 (cm^2)	7
11 cm^2 eller 11	4
15 cm^2 eller 15	19

Tabell 19: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 24, 6. klasse

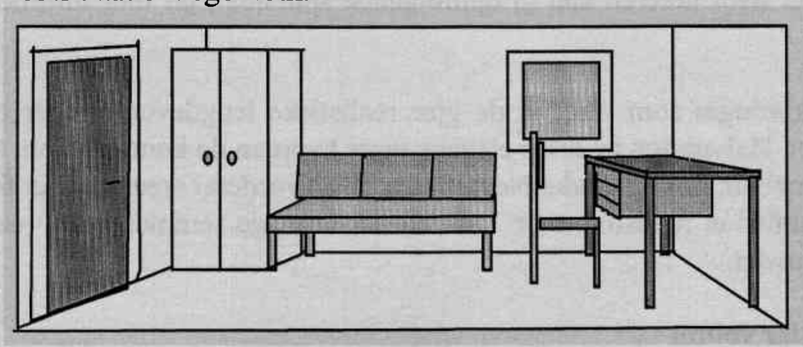
3.3 Arealmål

Elevene får etter hvert forestillinger om hvor store enhetene de arbeider med, er. Mange kan mer eller mindre nøyaktig anslå lengder. Lengdemål brukes mye, og man lærer seg til å assosiere med kroppsdeler. Høyden på et menneske bedømmes gjerne forholdsvis nøyaktig, i det minste hvis man står framfor vedkommende. Andre lengdemål kan være mer problematiske.

Vi blir sjeldnere stilt overfor spørsmål om arealer. Hvilke arealenheter er elevene kjent med? Bordplaten, et skriveark, rommet som de bor i, klasserommet osv. kan ha vært vurdert med hensyn til hva man kan få plass til.

På neste side har vi gjengitt en oppgave hvor man ut fra møblering og plassering av dør og vindu skal gi en vurdering av golvarealet i et rom. Rommet kan for et trenet øye antas å ha en lengde på ca. 5 m og en dybde på noe over 2 m. Arealet burde dermed være noe over 10 m^2. Men vurdert ut fra møblene kan vi se at det er plass til et skap, en sovesofa, en stol og en skrivepult. Fortsatt er om lag halvparten av golvet uten møbler. Det skulle også tilsi omtrent 10 m^2.

Oppgave 20, 6. klasse og oppgave 17, 9. klasse
Torill har sitt eget rom.



Det er plass til et skap, en sovesofa, en stol og et skrivebord.

Omtrent hvor stor golvflate tror du rommet kan ha? .... m²

Oppgaveeksempel 17

Oppgave 20, 6. klasse (N = 457) og oppgave 17, 9. klasse (N = 459)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	4	21
1-5	26	8
6-10	30	24
11-15	11	22
16-20	9	12
21-25	2	6
26-	16	8

Tabell 20: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 20, 6. klasse og oppgave 17, 9. klasse

Av elevene i 6. klasse svarer 26 % 5 m^2 eller mindre. I 9. klasse foreslo ca. 8 % et slikt svar. Noe under halvparten av elevene på begge klassetrinnene gav et «realistisk» tall mellom 6 og 15 m^2, henholdsvis 41 % og 46 %. Usikkerheten blant elevene viser seg også ved at ca. 18 % i 6. klasse og 14 % i 9. klasse foreslo mer enn 20 m^2. Grunnen til at hele 20 % av elevene i 9. klasse unnlot å svare, er trolig at det på dette trinnet var et følgespørsmål: **Forklar hvordan du fant dette svaret.**

Oppgave 17b, 9. klasse (N = 459)	9. klasse
Ubesvart	44
Realistisk lengdevurdering med addisjon; riktig multiplisert	10
Realistisk lengdevurdering; riktig multiplisert	10
Realistisk arealvurdering av elementene; summering	2
Urealistisk lengdevurdering; riktig multiplisert	5
Urealistisk lengdevurdering; uriktig multiplisert	1
Sammenligner med eget rom	2

Tabell 21: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 17b, 9. klasse

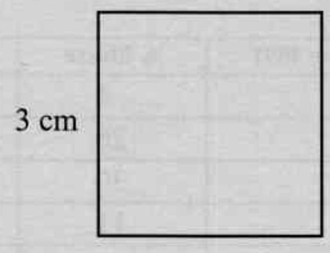
Det var ikke enkelt å vurdere svarene til de noe over halvparten som forsøker å gi en forklaring. Delvis er svarene knappe, og delvis er de vanskelige å kategorisere. En situasjon hvor elevene kan gi muntlig forklaring, eller hvor læreren kan gi oppfølgende spørsmål, gir mer informasjon.

Ca. 20 % av elevene gir forklaringer som viser at de gjør realistiske lengdevurderinger og multipliserer for å finne arealet. Halvparten av disse elevene viser hvordan de kommer fram til lengde og bredde ved å se på møbler, dør og vindu. Noen få (ca. 2 %) vurderer arealbehovet for hvert enkelt møbel og når fram til et realistisk svar. Omtrent like mange sammenligner med eget rom og anslår arealet ut fra det.

3.3.1 Areal er ikke lengde eller volum

En del elever har problemer med å skille mellom lengde, areal og volum. Spesielt kan begrepet omkrets av en figur være vanskelig for mange. Med oppgaven nedenfor prøver vi å finne ut om elevene skiller mellom begrepene omkrets og areal.

Oppgave 9, 6. klasse



a Hvor stor er omkretsen av kvadratet?...........

b Hvor stort er arealet av kvadratet? ....

Oppgaveeksempel 18

Oppgave 9a, 6. klasse (N = 434)	**6. klasse**
Ubesvart	8
12 eller 12 cm (Riktig svar)	68
3 (cm, cm^2)	9
9 (cm, cm^2)	4

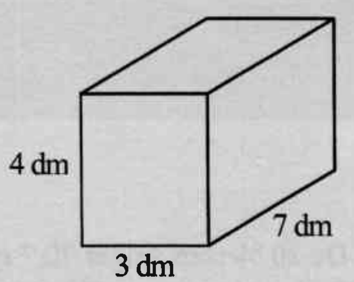
Tabell 22: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 9a, 6. klasse

Oppgave 9b, 6. klasse (N = 434)	**6. klasse**
Ubesvart	19
9 (cm^2) (Riktig svar)	10
9 cm	21
3 (cm, cm^2)	12
12 (cm, cm^2)	18

Tabell 23: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 9b, 6. klasse

68 % av elevene i 6. klasse svarer enten 12 cm eller 12 for omkretsen. Det er også 18 % av elevene som svarer 12 (cm eller cm^2) for arealet. Når vi undersøker hvordan hver enkelt elev har besvart disse to spørsmålene, finner vi at tre firedeler av dem som svarer 12 for arealet, også gir det samme svaret for omkretsen. Det viser igjen at mange elever har vansker med å skille mellom omkrets og areal. Bare 10 % regner ut arealet riktig og gir riktig benevning.

En tilsvarende oppgave er brukt i en undersøkelse blant elleveåringer i USA, der 37 % svarte riktig. Det er betydelig flere enn for elleveåringene våre. I den amerikanske undersøkelsen var imidlertid benevningen oppgitt (What is the area of this square? ...... cm^2). Det var trolig til stor hjelp for noen av elevene. Vi trenger gjerne arealmål for å vite hva vi kan plassere på et avgrenset område, eller hva som skal til for å dekke et område.



Oppgave 29, 9. klasse

Guri vil dekke *hele boksen* med kvadratiske fliser. Flisene er på 1 dm^2.

Hvor mange fliser trenger hun? ....

Oppgaveeksempel 19

Omtrent hver fjerde elev i 9. klasse unnlot å svare på oppgaven. Omtrent 11 % regnet ut arealet for hver enkelt sideflate og la sammen. Av disse elevene var det noen få som bare tok med de tre synlige sideflatene. Det vanligste feilsvaret var 84 (25 %). Dette svaret kom fram ved at man multipliserte de tre tallene på figuren. 5 % adderte de tre tallene og fikk 14, mens ytterligere 3 % av elevene tydeligvis så på figuren som en sekskant i papirplanet, regnet ut omkretsen av denne sekskanten og fikk svaret 28. Denne svarfordelingen tyder på at arealbegrepet er vagt hos mange av elevene.

Oppgave 29, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	26
122 (Riktig)	10
84	25
14	5
28	3

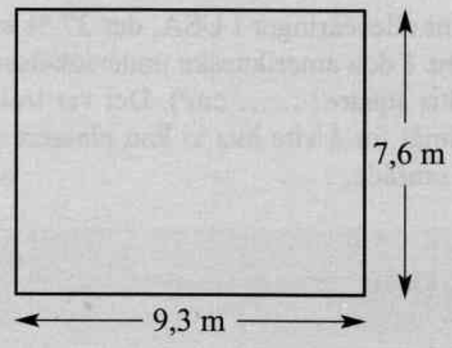
Tabell 24: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 29, 9. klasse

3.4 Måleusikkerhet og gjeldende siffer

I innledningen ble usikkerhet i måltall behandlet. Oppgaven nedenfor forutsetter at elevene etter norsk tradisjon oppfatter lengdemålene gitt med to siffers nøyaktighet (to gjeldende siffer). I hvilken grad gir dette utslag på usikkerheten i arealet som er regnet ut?

Oppgave 12, 9. klasse

Per Olav vil vite arealet av et rektangelformet hus. Han måler lengden og bredden utvendig.



Per Olav er i tvil om hvordan han skal angi arealet. **Hjelp ham ved å sette kryss foran det beste forslaget.**

- ☐ $A = 71\ m^2$
- ☐ $A = 70{,}7\ m^2$
- ☐ $A = 70{,}68\ m^2$

Oppgaveeksempel 20

Ca. 13 % av elevene i 9. klasse velger 71 m^2, som er riktig svar. De 20 % som velger 70,7 m^2, kan muligens blande inn regler for addisjon. Langt de fleste, 63 %, velger svaret 70,68 m^2. Disse elevene gjør trolig ingen vurdering av usikkerheten.

Oppgave 12, 9. klasse (N = 452)	**9. klasse**
Ubesvart	2
71 m^2	13
70,7 m^2	20
70,68 m^2	63

Tabell 25: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 12, 9. klasse

4 Volum

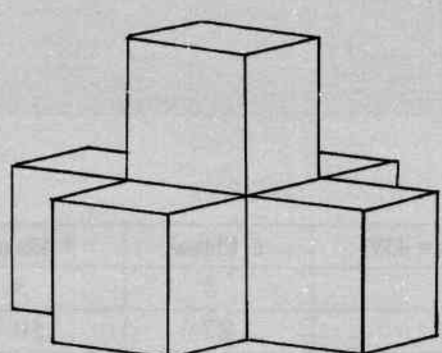
Volumbegrepet omfatter både forestillingene om at gjenstander tar plass i rommet, og at gjenstander kan gi plass til for eksempel en væske. Tidligere var det vanlig å snakke om både volum og hulmål. Ordet hulmål er mindre brukt i dag. I noen sammenhenger brukes kapasitet, som er en direkte oversettelse av det engelske *capacity.* I L97 brukes bare ordet volum.

På samme måte som en del elever blander sammen omkrets og areal av en plan figur, har enkelte elever vansker med å skille mellom overflate og volum av en gjenstand. Areal er mål på en todimensjonal utstrekning, det vil si en del av *planet.* Volum er mål på en tredimensjonal utstrekning, det vil si en del av *rommet.*

4.1 Romsyn

Volumbegrepet forutsetter at man forestiller seg noe bak den synlige overflaten av gjenstanden; det er snakk om en tredje dimensjon. Uten en slik forestilling er det trolig vanskelig å arbeide meningsfylt med problemstillinger knyttet til volum og hulmål. I oppgave-illustrasjoner må de tre dimensjonene reduseres til to på arket. For elever som har problemer med å oppfatte romfigurer, kan en slik reduksjon muligens gjøre det vanskelig å forstå oppgaven.

Man nærmer seg lengdemål med å telle lengdeenheter, arealmål med å telle arealenheter. Tilsvarende nærmer man seg volummål med å telle volumenheter. Også her kan man arbeide med eller uten standardiserte enheter. Når først standardiserte enheter benyttes, har man den kulturelle arven at hulmål ofte angis i liter og desiliter, mens andre volum angis i kubikkdesimeter og kubikkmeter. De to neste oppgavene kan i noen grad avsløre om elevene har en forestilling om det som ligger bak – om de tenker i tre dimensjoner.



Oppgave 21, 6. klasse

Per bygger med klosser.

Hvor mange tror du han har brukt?

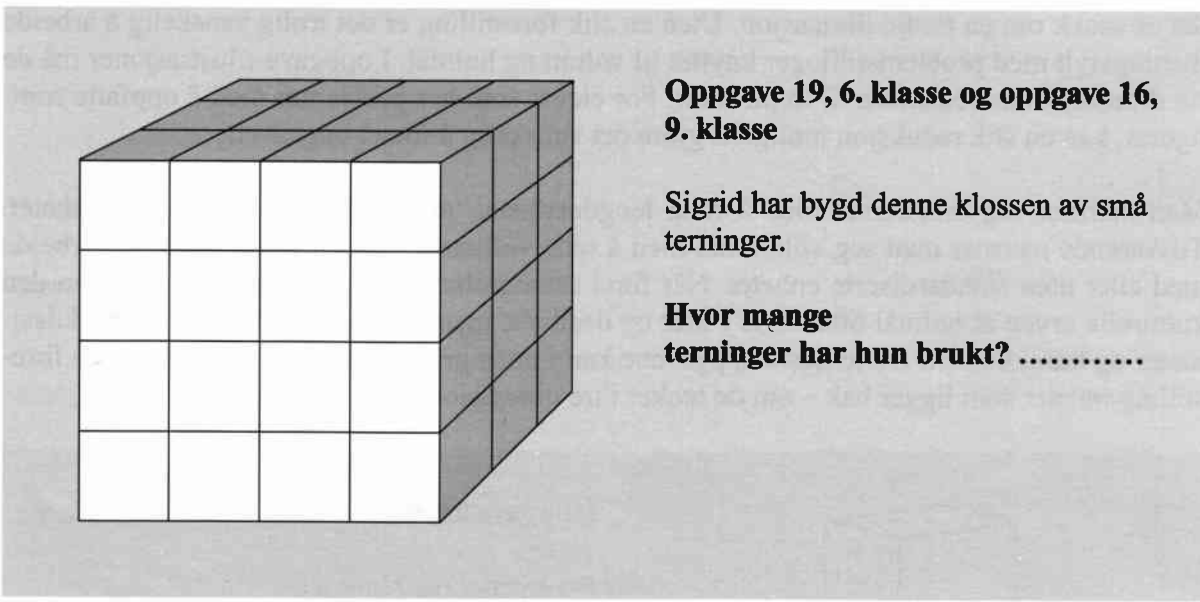
Oppgaveeksempel 21

Omtrent 66 % i 6. klasse forstår at det må være en kloss i midten av grunnplanet. De elevene som ikke ser for seg denne klossen, kan ha problemer med å forestille seg at det «indre» av en gjenstand er med på å gi den et volum. Hvis elevene som svarer 5, blir bedt om å forklare hvordan de har tenkt, vil trolig en del av dem rette opp svaret til 6. Andre igjen vil hevde at klossen i midten (eller en annen kloss) er dobbelt så stor som de øvrige. Slik oppgaven er formulert, er dette i og for seg riktig. (Sånn sett ville Per hatt nok med fire klosser!) Det viktige er å finne ut hvilke elever som ikke ser at det må være noe i det skjulte rommet.

Oppgave 21, 6. klasse (N = 457)	6. klasse
Ubesvart	2
6 (Riktig svar)	66
5	29

Tabell 26: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 21, 6. klasse

Oppgaven nedenfor tester også evnen til å «se i rommet». Her er en overflatetenkning mer nærliggende enn i den forrige oppgaven. En vanlig strategi for å beregne volum av slike figurer er å tenke seg lag med klosser, enten horisontalt eller vertikalt inndelt. Så multipliserer man med antall lag. Figuren er såpass omfattende at man fort kan gjøre en slurvefeil når det gjelder størrelsen, og dermed få for mange lag innover. Dette kan også skyldes eventuell erfaring med å se på slike rette prismer som terninger.



Oppgaveeksempel 22

Oppgave 19, 6. klasse (N = 457) og oppgave 16, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	3	3
48 (Riktig svar)	27	50
64	5	5
40	7	3
80	7	6

Tabell 27: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 19, 6. klasse og 16, 9. klasse

27 % av elevene i 6. klasse og 50 % av elevene i 9. klasse ser for seg hvordan klossen er bygd opp. De svarer 48, som er korrekt svar. Noen finner dette svaret ved å multiplisere $4 \cdot 4 \cdot 3$. Andre ser for seg horisontale eller vertikale lag, som de adderer. Omtrent 5 % på begge

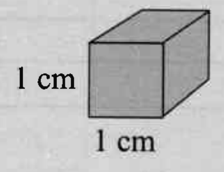
trinnene har svart 64. Trolig har disse elevene regnet med fire lag med terninger innover. De har i så fall hatt en riktig betraktningsmåte. Det er 14 % i 6. klasse og omtrent 9 % i 9. klasse som svarer enten 40 eller 80. Tallet 40 får man ved å telle de synlige rutene. 80 får man ved også å se for seg rutene på baksiden. Disse elevene har dermed gjort en beregning av overflaten av klossen.

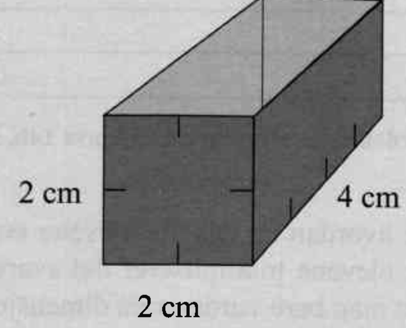
Noen elever har svart 30, 3 % i 6. klasse og 2 % i 9. klasse. Disse elevene kan ha telt alle de synlige terningene. En problemstilling å ta opp med disse elevene er om de oppfatter at det kan være et hulrom inne i klossen. Hvis en slik tankegang skulle forfølges, ville korrekt svar kunne være 42 eller 44.

Det er vanskelig å finne en god forklaring på hvorfor henholdsvis 3 % og 4 % på de to klassetrinnene svarte 96. Kan det være at de først multipliserer $4 \cdot 4 \cdot 3$ og får 48, og at de deretter blander inn overflateberegning og kompenserer for den usynlige delen ved å multiplisere med 2? Vi ser at en stor del av elevene i både 6. klasse og 9. klasse viser tegn til manglende oppfatning av volum når det er en oppbygd gjenstand. Den neste oppgaven tar for seg et hulmål, men slik at elevene skal forestille seg at de fyller det med standardenheter.

Oppgave 18, 6. klasse og oppgave 14a, 9. klasse

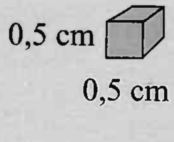
Hvor mange av disse terningene vil få plass i den store esken? ....





14b, 9. klasse

Hvor mange av disse terningene vil få plass i den store esken? ....



Oppgaveeksempel 23

Elevene kan henge seg opp i spørsmålet om de oppgitte målene for esken er innvendige eller utvendige. Hvis de er utvendige og veggene i esken har en tykkelse, vil 3 være riktig svar. De skriftlige svarene på hvordan elevene tenkte, gav få indikasjoner på et slikt resonnement. I klassen kan læreren forklare at man enten må se bort fra tykkelsen på veggene, eller at de oppgitte målene er å regne som innvendige mål.

Oppgave 18, 6. klasse (N = 457) og oppgave 14a, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	7	8
16 (Riktig svar)	36	65
4	5	2
8	17	9
12	7	3
20	4	3
24	6	3

Tabell 28: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 18, 6. klasse og oppgave 14a, 9. klasse

Henholdsvis 36 % og 65 % i 6. klasse og 9. klasse svarte korrekt, 16. Det vanligste feilsvaret var 8. Det tyder på at elevene «fylte bunnen». Men tallet kan også komme fram ved at elevene adderer tallene på figuren. Tallet 12 kan komme fram ved at man beregner arealet av den skraverte delen (overflaten). Man kan ha forskjellige forklaringer på tallene 4, 20 og 24.

I oppgave 14b skal elevene fylle den store esken med terninger med sidekanter som er halvparten av sidekantene i a-oppgaven.

Oppgave 14b, 9. klasse (N = 439)	9. klasse
Ubesvart	8
«Åtte ganger 14a» (Riktig svar)	14
«To ganger 14a»	50
«Fire ganger 14a»	14

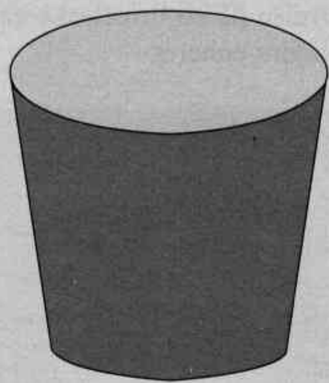
Tabell 29: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 14b, 9. klasse

Når vi sammenligner hvordan de enkelte elevene svarer på oppgavene 14a og 14b, legger vi merke til at de fleste elevene multipliserer det svaret de fant i oppgave a, med 2, 4 eller 8. Doblingen svarer til at man bare vurderer en dimensjon, fire ganger så mange vil si at man vurderer to dimensjoner, og de som multipliserer med åtte, vurderer alle de tre dimensjonene. En videre analyse viser at hele 95 % av de elevene som multipliserer med 8 i b-oppgaven, også hadde gitt et korrekt svar i a-oppgaven. Motsatt er det 49 % av dem som gav riktig svar på oppgave a, som nå multipliserer med 2, og 19 % som multipliserer med 4.

4.2 Direkte begrep av volum

Det er vanskelig å ha et direkte begrep av volumenheter hvis man har problemer med å forestille seg volum. Oppgaven nedenfor er et forsøk på å teste om elevene har en klar forestilling om størrelsen av en liter.

Oppgave 28, 6. klasse og oppgave 30, 9. klasse



En vanlig papirkurv er ca. 30 cm høy.

Omtrent hvor stort volum har den? Sett kryss.

☐ 1 liter
☐ 5 liter
☐ 20 liter
☐ 80 liter
☐ 300 liter

Oppgaveeksempel 24

En rask vurdering tilsier at kurven er omtrent like bred øverst som den er høy. Nederst er den noe smalere.

Hvordan tenker elevene når de vurderer svarene? Noen velger trolig å fjerne ett eller flere av alternativene gjennom praktiske sammenligninger.

- Vil kurven være full hvis vi legger en literskartong med melk i den? Hva med fem kartonger?
- Ville vi kunne løfte kurven hvis den var fylt med vann? (Litt større enn en skurebøtte)

Forholdsvis få elever viser at de gjør et overslag, for eksempel ved å se på papirkurven som en sylinder.

Oppgave 26, 6. klasse (N = 457) og oppgave 23, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	3	16
20 liter (Riktig svar)	22	30
5 liter	48	36
1 liter	20	6

Tabell 30: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 26, 6. klasse og oppgave 23, 9. klasse

20 liter er det rette svaret. Omtrent 22 % i 6. klasse og 30 % i 9. klasse svarte riktig. Det er interessant å legge merke til at selv mange voksne (lærere) i første omgang bestrider at 20 liter kan være et riktig svar. Svært mange heller til at volumet er omtrent 10 liter, og at oppgaven derfor er misvisende!

Hele 48 % i 6. klasse og 36 % i 9. klasse svarte 5 liter. Det er ikke oppsiktsvekkende langt fra det riktige, spesielt når en del av disse elevene begrunner svaret med at papirkurven er omtrent like stor som en vaskebøtte. På den andre siden er papirkurver noe vi omgås med i det daglige. Burde vi ha et bedre forhold til størrelsen? Elevene som svarer 1 liter, har en dårlig forestilling om størrelsen av en liter. Det gjelder hele 20 % i 6. klasse og 6 % i 9. klasse.

4.3 Forholdet mellom volumenheter

Også når det gjelder volum, kan sammenhengen mellom enhetene være vanskelig å lære. Barn har gjerne omfattende erfaring med brusflasker. En vanlig størrelse på en brusflaske er 0,5 l. Oppgaven nedenfor tester om elevene kan angi dette volumet i andre enheter.

Oppgave 21, 9. klasse

En brusflaske inneholder 0,5 l.

Hvor mye er det med andre mål? Sett kryss.

- ☐ 5 cm^3
- ☐ 50 cm^3
- ☐ 500 cm^3
- ☐ 0,5 dm^3
- ☐ 5 dm^3

Oppgaveeksempel 25

Omtrent 35 % av elevene i 9. klasse har svart enten 500 cm^3, 0,5 dm^3 eller begge deler.

Oppgave 21, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	12
Både 500 cm^3 og 0,5 dm^3 (Riktig svar)	6
500 cm^3 (Riktig svar)	5
0,5 dm^3 (Riktig svar)	26
5 cm^3	9
50 cm^3	13
5 dm^3	12

Tabell 31: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 21, 9. klasse

Når likevel 26 % svarer at 0,5 l er 0,5 dm^3 (og ingen gale svar i tillegg), tyder det på at en stor del av elevene har lært seg sammenhengen: 1 l = 1 dm^3. De fleste synes likevel usikre på dette. Usikkerheten er imidlertid større når det gjelder sammenhengen mellom kubikkcentimeter og kubikkdesimeter. Omtrent 11 % svarte både 500 cm^3 og 0,5 dm^3. Av dem krysset nesten halvparten også av på et galt svar. Omtrent 10 % gav ett av de riktige svarene og minst ett feil.

4.4 Konservere volum

Det direkte begrepet om størrelsen av de vanligste volumenhetene ser ut til å være mangelfullt hos en stor del av elevene. En annen prøve på dette er gitt i oppgaven nedenfor. I denne oppgaven utfordres også elevene til å konservere volum. Oppgaven setter ikke krav til formen på kassen, men når flest mulig ungdommer skal inn i den, er det enklest å velge en høyde på omtrent 180 cm. Det fører igjen til at lengde og/eller bredde i grunnflaten må tilpasses tilsvarende.

Oppgave 24a, 9. klasse

To ungdomsklubber konkurrerer om å få flest medlemmer inn i en kasse som rommer 1 m^3. Medlemmene snekrer kassa selv.

a Tegn hvordan en kasse på 1 m^3 kan se ut. (Sett på mål.)

Oppgave 24b, 9. klasse.

Omtrent hvor mange ungdommer tror du kunne få plass i kassa?...........

Oppgaveeksempel 26

Omtrent 35 % av elevene i 9. klasse har tegnet prismer med mål som angir rett volum. 5 % har gitt kassen kroppshøyde og tilpasset grunnflaten. Omtrent 18 % har ikke forsøkt å tegne en kasse. Ca. 20 % har tegnet figurer som ikke viser volum, eller som langt fra har kasseform.

Oppgave 24a, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	27
Prisme med kroppshøyde	5
Kubisk prisme	30
Andre kasser med feil mål eller uten mål	14

Tabell 32: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 24a, 9. klasse

Ved å sammenligne med volumet av et menneske kan vi få fram om elevene forstår hvor stor 1 m^3 er. Mer enn 28 % svarer at det ikke er plass til noen ungdommer i en kasse på 1 m^3. Disse elevene kan neppe ha forstått hvor stor en kubikkmeter er. En person som veier mellom 50 kg og 100 kg, har et volum på omtrent 50–100 dm^3 (0,05–0,1 m^3). Når vi regner med at det må være noe luft mellom ungdommene, vil om lag ti ungdommer i kassen være en god prestasjon.

Oppgave 24b, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	3
0	28
1-3	30
4-6	17
7-9	6
10-12	6
13-15	2
16-18	2
19-21	3
Mer enn 21	4

Tabell 33: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 24b, 9. klasse

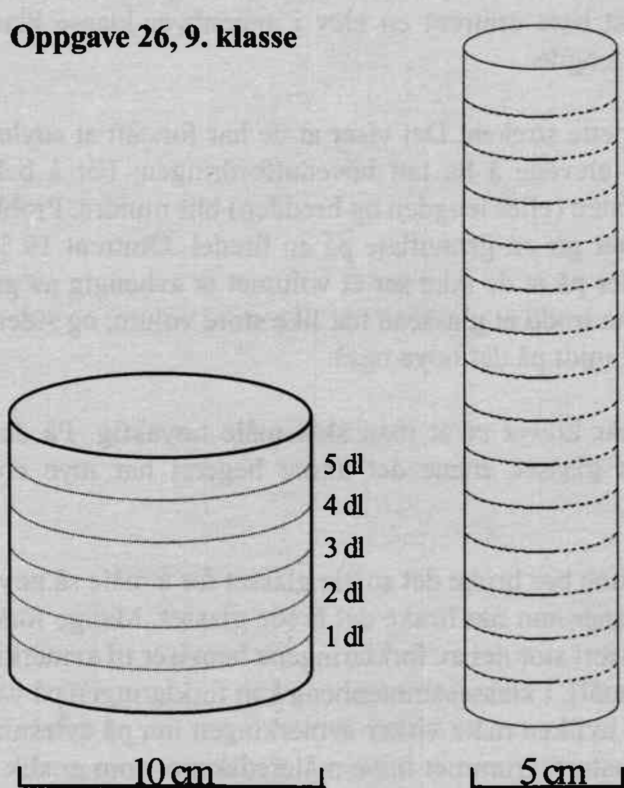
Omtrent 12 % av elevene i 9. klasse gav opp tall fra 7 til 12 på spørsmålet om hvor mange som kunne gå inn i kassen. Omtrent 17 % av elevene svarte 4–6. Regner vi også med dem som svarte fra 13 til 18, får vi at ca. 33 % av elevene gav et svar som viser et rimelig skjønn.

4.5 Måling

En viktig side ved volumbegrepet er at størrelsen av en gjenstand er avhengig av både høyde, bredde og dybde (tre dimensjoner). Det gjelder også hulmål. Oppgaven nedenfor tar for seg forståelsen av dette.

Også når vi måler volum, er gode måleredskaper avgjørende for nøyaktigheten. Smale måleglass gir større nøyaktighet i avlesningen siden utslaget på måleskalaen blir større enn på brede måleglass.

Oppgave 26, 9. klasse



Her ser du to måleglass.

a Merk av for 3 dl på det høye måleglasset.

Anne skal måle opp 3 dl vann så nøyaktig som mulig.

b Hvilket måleglass bør hun bruke? ....

Forklar hvorfor hun bør bruke dette:

Oppgaveeksempel 27

26a, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	14
Den tolvte streken (Riktig svar)	2
Midt på glasset	2
Den sjette streken	51
Den tredje streken	19

Tabell 34: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 26a, 9. klasse

Omtrent 2 % av elevene i 9. klasse merket av for 3 dl på den tolvte streken på det smale måleglasset i oppgaven ovenfor. Det betyr at bare omtrent en elev i annenhver klasse klart ser sammenhengen mellom volum, areal og lengde.

51 % av elevene har merket av på den sjette streken. Det viser at de har forstått at søylen må være høyere. Langt på vei synes disse elevene å ha tatt hovedutfordringen: For å beholde volumet må man øke høyden når grunnflaten (eller lengden og bredden) blir mindre. Problemet deres er at de ikke ser at halvert diameter gir en grunnflate på en firedel. Omtrent 19 % har merket av på den tredje streken. Det tyder på at de ikke ser at volumet er avhengig av grunnflaten. Noen elever (ca. 2 %) ser ut til å ha trodd at glassene har like store volum, og siden 3 dl er midt på det lave, merker de av for 3 dl midt på det høye også.

Valget av målebeger er ikke selvsagt når kravet er at man skal måle nøyaktig. På det ene begeret er det tegnet inn sirkler rundt glasset, mens det andre begeret har mye enklere markeringer.

Omtrent en tredel av elevene mener at Anne bør bruke det smale glasset for å måle så nøyaktig som mulig. Nesten halvparten, 47 %, mener hun bør bruke det brede glasset. Mange forklarer ikke hvorfor de velger som de gjør. En svært stor del av forklaringene henviser til avmerkingen på glassene (sirkler mot streker; påførte mål). I klassesammenheng kan forklaringen på valg av beger være gjenstand for en samtale. På hvilken måte virker avmerkingen inn på avlesningen, og hvilken rolle spiller flaten? Kan vi i naturfagrommet finne måleredskaper som er slik laget at de måler bestemte volum særlig nøyaktig?

5 Tid

Tidsbegrepet kan være vanskelig å fatte og å formidle fordi det virker lite håndfast, lite konkret.

Viktige egenskaper ved tid er:

- Tidspunkter er å anse som en (uendelig) lang serie som ligger på en kontinuerlig linje.
- Tid knytter seg til bevegelser på en systematisk måte.
- Tid knytter seg til biologisk utvikling.

Det er sammenhengen med bevegelse, *mekanikk,* som definerer tidsenhetene:

- Et år er omtrent den tida jorda bruker på å bevege seg rundt sola.
- En måned er omtrent den tida det tar fra fullmåne til fullmåne.
- Et døgn er omtrent den tida jorda bruker på å dreie rundt sin egen akse.

Inndelingen av døgnet i timer, minutter og sekunder er mer «tilfeldig» eller kulturbestemt. I dag ville vi trolig ha delt døgnet inn i dekadiske enheter, eller vi hadde tatt utgangspunkt i (atom)fysikken og en frekvens knyttet til svingninger i et atom.

Kalendere og klokker er konstruert slik at de er i overensstemmelse med definisjonen av tidsenhetene. Men definisjonene har blitt mer og mer komplisert og enhetene tilsvarende mindre direkte etterprøvbare. Det gjør trolig også oss voksne noe usikre når vi skal forklare barn om tidsenhetene. Forklaringene blir dermed gjerne mindre overbevisende eller forståelige. Bruk av tidsenheter og tidsmåling er viktig i dagliglivet allerede fra barnsben av. Dermed får barna ganske tidlig erfaringer med tidsmålinger og tidsangivelser. Begrepene som dannes, kan enten bli korrigert, fordi de ikke er funksjonelle, eller de kan bli styrket.

Nye utfordringer får vi når vi skal formalisere tidsbegrepene og bruke dem i beregninger. Vi har dekadiske enheter for sekunder og mindre enheter. Men for større enheter er det nærmest et virvar.

- 60 er sentralt når det gjelder overgangen fra sekunder til minutter og til timer.
- Men teller vi 12 eller 24 timer før vi starter med å telle timer på nytt?
- Hvor mange døgn er det i en uke? Her får vi sannelig tallet 7 inn!
- Hvor mange uker går det i en måned? Nei, det går ikke opp! (Men det er omtrent fire...)
- Hvor mange døgn går det i en måned? Det kommer an på hvilken måned vi mener!
- Men det går alltid 12 måneder i et år. Det hjelper lite, når måneden ikke er noen grei enhet.
- Tallet på døgn i et år er heller ikke så greit å angi. Er det 364 eller 365 eller 364,25 eller et tall med enda flere desimaler?

5.1 Misoppfatninger

Noen misoppfatninger knyttet til tidsenheter og tidsmålinger skyldes trolig at feltet er såpass komplisert. Man forenkler og regner fire uker i en måned eller antar at alle månedene er like lange. Klokkeslett etter middag kan skape problemer for enkelte. Skrivemåten kan også bidra til forvirringen. Når vi angir tidspunktet kl. 23.25, oppfatter noen dette tallet som et desimaltall på grunn av utseendet. Det hjelper lite å skille mellom punktum og komma, siden begge tegnene brukes som desimaltegn, også i Norge.

5.2 Dag, måned og år

I oppgaven nedenfor kan elevene vise om de forstår hvordan alder henger sammen med angivelsen av fødselsdato. Året er viktigst, dernest måneden og dagen. Men vet alle elevene rekkefølgen på månedene når de gis med navn? Svarene kan indikere en eventuell usikkerhet her.

Oppgave 15, 6. klasse og oppgave 27, 9. klasse

Fru Hansen har fem barnebarn.

Kari er født	14. mai 1984
Per er født	20. april 1983
Rolf er født	23. mars 1984
Åse er født	12. august 1983
Torill er født	2. juni 1984

a Hvem av barnebarna er eldst? ....

b Hvem av barnebarna er yngst? ....

c Hvem er den neste som skal feire fødselsdag etter Per? ....

Oppgaveeksempel 28

Oppgave 15a, 6. klasse (N = 434) og oppgave 27a, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	3	6
Per (Riktig svar)	66	84
Kari	5	2
Rolf	12	4
Åse	6	2
Torill	7	2

Tabell 35: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 15a, 6. klasse og oppgave 27a, 9. klasse

Vi ser av tabellen ovenfor at henholdsvis 66 % og 84 % på de to klassetrinnene finner den eldste personen. Hvis det er usikkerhet med hensyn til hvilken måned som kommer først, april eller august, kan man velge Åse. Henholdsvis 6 % og 2 % svarer slik. Hvis man tror at høyt fødselsårstall gir høy alder, bør man svare enten Kari, Rolf eller Torill. Henholdsvis 23 % og 7 % gjør det. Rolf er det hyppigste feilsvaret. Han er født først av dem som er født i 1984. Men han er også født først på året av alle. Kanskje neglisjerer enkelte årstallet og ser bare på måned og dag?

Oppgave 15b, 6. klasse (N = 434) og oppgave 27b, 9. klasse (N = 439)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	4	6
Torill (Riktig svar)	45	65
Kari	6	4
Per	11	3
Rolf	21	17
Åse	13	5

Tabell 36: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 15b, 6. klasse og oppgave 27b, 9. klasse

Når man skal svare på hvem som er yngst, kommer tilsvarende betraktninger inn som på spørsmål a. Men tallet på riktige svar i spørsmål b ligger ca. 20 prosentpoeng lavere i begge gruppene. Under halvparten av elevene i 6. klasse og under to tredeler av elevene i 9. klasse svarer riktig. Forskjellen i antall riktige svar på a og b kan delvis skyldes at «yngre» er et vanskeligere begrep å forholde seg til enn «eldre».

Hvis man er usikker på hvilken måned som kommer først, april eller august, kan man velge Rolf eller Kari. Henholdsvis 27 % og 21 % på de to klassetrinnene svarer slik. Hvis man tror at lavt fødselsårstall gir lav alder, bør man svare enten Per eller Åse. Det er det henholdsvis 23 % og 8 % som gjør. Også på dette spørsmålet er Rolf det hyppigste feilsvaret. Han er født først av dem som er født i 1984. Men han er også født først på året av alle. Åse er født sist på året av alle. Kanskje enkelte neglisjerer årstallet og bare ser på måned og dag?

Oppgave 15c, 6. klasse (N = 434) og oppgave 27c, 9. klasse (N = 439)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	4	6
Kari (Riktig svar)	42	57
Rolf	7	5
Åse	43	28
Torill	3	3

Tabell 37: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 15c, 6. klasse og oppgave 27c, 9. klasse

Året gjentar seg med stort sett de samme datoene. Merkedagene kommer stort sett i samme rekkefølge hvert år. Unntak er de bevegelige helligdagene. Spørsmål c kommer inn på denne forståelsen. Elevene skal både ignorere årstallet og vurdere rekkefølgen av datoer. Feil svar kan komme av en svikt på ett av disse feltene.

Av elevene i 6. klasse er det litt under halvparten (42 %) som svarer riktig. I 9. klasse svarer litt over halvparten (57 %) riktig. Når det er flere elever i 6. klasse som svarer Åse (43 %) enn Kari (42 %), skyldes nok det at de ser at Åse er den som er født nærmest etter Per. De overser at både Kari og Toril *fyller år* før Åse. Også 28 % av elevene i 9. klasse svarer Åse. Elever som svarer Rolf, kan ta feil av rekkefølgen av månedene.

5.3 Kalenderen

Noen av vanskene med kalenderen er at månedene ikke er like lange, at månedene ikke rommer hele uker, og at månedene ikke er like med hensyn til ukedag og dato. Det gjør kalenderen lite oversiktlig, og ikke alle elever forstår systemet. Det er viktig å kunne lese av kalenderen. Forståelsen av at ukene går sin jevne gang uavhengig av om månedene er ulike, har også betydning. Oppgaven nedenfor tar for seg disse to problemstillingene.

Oppgave 29, 6. klasse og oppgave 8, 9. klasse

Februar						
Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

Dette er en kalender for februar.

a Hvilken ukedag er 5. februar? ....

b Hvilken ukedag er 1. mars? ....

c Hvor mange søndager er det i mars? ....

Oppgaveeksempel 29

Oppgave 29a, 6. klasse (N = 457) og oppgave 8 a, 9. klasse (N = 452)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	4	1
Onsdag (Riktig svar)	90	97
En av de andre dagene	2	0

Tabell 38: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 29a, 6. klasse og oppgave 8a, 9. klasse

Nesten alle elevene i 9. klasse leser av riktig ukedag. I 6. klasse svarer ca. 90 % riktig.

Oppgave 29b, 6. klasse (N = 457) og oppgave 8b, 9. klasse (N = 452)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	9	3
Lørdag (Riktig svar)	71	86
En av de andre dagene	14	7

Tabell 39: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 29b, 6. klasse og oppgave 8b, 9. klasse

29 % i 6. klasse og 14 % i 9. klasse svarer ikke riktig dag for 1. mars. Halvparten av dem svarer en av de andre dagene, resten angir ingen ukedag eller unnlater å svare. Det tyder på at forholdsvis mange ikke behersker kalenderen på annen måte enn at de kan lese av riktig.

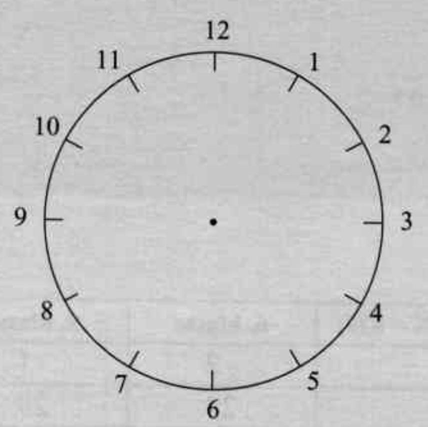
Oppgave 29c, 6. klasse (N = 457) og oppgave 8c, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	14	3
5 (Riktig svar)	34	53
4	14	38

Tabell 40: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 29c, 6. klasse og oppgave 8c, 9. klasse

Spørsmål c er mer sammensatt enn de to forrige. Her må eleven både vite at det er mer enn 28 dager i mars, og legge til side forestillingen om at «det er (ca.) fire uker i måneden». Omtrent 33 % i 6. klasse og omtrent 53 % i 9. klasse klarer dette. Som ventet er 4 det hyppigste feilsvaret.

5.4 Klokka

Man må kunne lese av klokka for å holde styr på de daglige gjøremålene. Ikke alle elever kan orientere seg på klokka, enten det gjelder analoge eller digitale ur. En vanske er at språkbruken varierer ved at tidspunkt noen ganger angis ut fra en analog og andre ganger ut fra en digital klokke. Det vanligste i våre dager er å bruke formen *13.45* skriftlig, men *kvart på to* muntlig. Uttrykk som *kvart på* og *fem over halv* viser til langviserens bevegelse over urskiva. Forståelsen av at både lilleviseren og langviseren er i en kontinuerlig bevegelse, kan også være forskjellig hos elevene.



Oppgave 23a, 6. klasse

Tegn inn visere slik at klokka viser riktig tid.

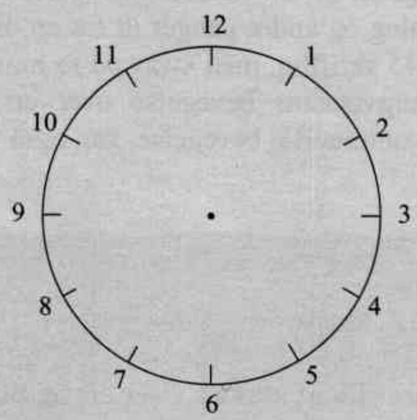
a Klokka er halv åtte.

Oppgaveeksempel 30

Oppgave 23a, 6. klasse (N = 457)	6. klasse
Ubesvart	1
Riktig plassert lilleviser	79
Lilleviser på 7	2
Lilleviser på 8	17
Riktig plassert langviser	95
Andre stillinger på langviser	4

Tabell 41: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 23a, 6. klasse

Denne oppgaven ble bare gitt til 6. klasse. 79 % plasserer lilleviseren noenlunde midt mellom 7 og 8. 17 % lar lilleviseren peke mot 8. Noen få lar viseren peke mot 7 eller i en annen retning. De aller fleste lar langviseren peke mot 6 når klokka er *halv et eller annet.* Men det er noen få som velger andre stillinger.



Oppgave 23b, 6. klasse og oppgave 15a, 9. klasse

Tegn inn visere slik at klokka viser riktig tid.

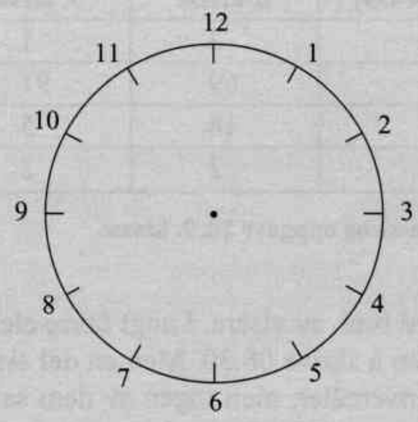
Klokka er 17.07

Oppgaveeksempel 31

Oppgave 23b, 6. klasse (N = 457) og oppgave 15a, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	2	1
Riktig plassert lilleviser	24	29
Lilleviser på 5	62	63
Riktig plassert langviser	81	83
Andre stillinger på langviser	16	16

Tabell 42: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 23b, 6. klasse og oppgave 15a, 9. klasse

De aller fleste lar lilleviseren peke mot 5 eller i nærheten av dette tallet. Men forholdsvis få (henholdsvis 24 % og 29 %) lar viseren gå litt forbi femtallet. 16 % av elevene på begge trinn lar lilleviseren peke i andre retninger. Litt mer enn fire av fem elever (både i 6. og 9. klasse) har noenlunde riktig plassering av langviseren. Omtrent hver sjette elev har feil plassering.



Oppgave 15b, 9. klasse

Tegn inn visere slik at klokka viser riktig tid.

Klokka er ti på halv tre.

Oppgaveeksempel 32

Denne oppgaven ble bare gitt til 9. klasse. Omtrent 20 % plasserer lilleviseren feil, mens bare halvparten så mange plasserer langviseren feil.

Oppgave 15b, 9. klasse (N = 438)	**9. klasse**
Ubesvart	1
Riktig plassert lilleviser	80
Lilleviser på 2	4
Lilleviser på 3	11
Riktig plassert langviser	90
Andre stillinger på langviser	9

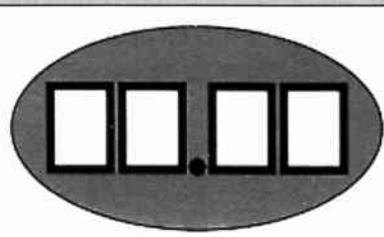
Tabell 43: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 15b, 9. klasse

Er elevene like kjent med digitale som analoge ur? De ble også bedt om å angi *klokka halv åtte,* slik at de kunne bruke siffer.

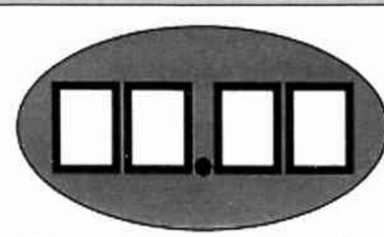
Oppgave 26a og b, 6. klasse og oppgave 20, 9. klasse

Per har en radio med digitalur.

Skriv tallene for minutter og timer slik at klokkene viser riktig tid:



a Klokka er halv åtte om morgenen.



b Klokka er ti over halv fire om ettermiddagen.

Oppgaveeksempel 33

Oppgave 26a, 6. klasse (N = 457) og oppgave 20, 9. klasse (N = 439)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	2	1
07.30 (Riktig svar)	69	91
08.30	18	5
08.00	2	2

Tabell 44: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 26a, 6. klasse og oppgave 20, 9. klasse

69 % i 6. klasse gir riktige siffer. Det er noe lavere enn ved bruk av visere. Langt færre elever i 9. klasse svarer feil. For begge trinn er den vanligste feilen å skrive 08.30. Men en del skriver også 08.00. For øvrig forekommer det en rekke ulike skrivemåter, men ingen av dem samler mange elever.

Oppgave b ble bare gitt i 6. klasse.

Oppgave 26b, 6. klasse (N = 457)	**6. klasse**
Ubesvart	4
15.40 (Riktig svar)	54
16.40	12
(0)3.40	3
16.10	9

Tabell 45: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 26b, 6. klasse

Litt over 54 % skriver riktig svar. Den vanligste feilen er 16.40 (12 %). Her mestrer elevene to av tre vansker: 40 (minutter) og større enn 12. 3 % av elevene svarer 3.40. De har ikke fått med seg hvordan vi skriver tidspunkt om ettermiddagen. Kanskje har de selv klokker som er innstilt slik at de viser «britisk» skrivemåte? 16.10 forekommer svært hyppig. De elevene som svarer det, har ikke fått med seg hvordan man justerer for den halve timen.

5.5 Timer og minutter

Noen ganger angir vi timetallet i et klokkeslett fra 0 til 24, andre ganger fra 0 til 12. Barn som har problemer med å gå fra den ene angivelsen til den andre, kan også ha problemer med å beregne timetall ut over ett døgn. Oppgave 12a, 6. klasse og oppgave 22a, 9. klasse kan gi en indikasjon på slike problemer. Feil svar kan også komme av at elevene har problemer med å lese teksten, ikke vet hvor mange timer det er i døgnet, har vansker med å regne eller er unøyaktige i arbeidet med oppgaven.

Oppgave 12a, 6. klasse og oppgave 22a, 9. klasse

a Hvor mange timer er det fra mandag morgen klokka åtte til tirsdag kveld klokka sju?

Svar: .... timer

b Hvor mange minutter er det fra klokka 08.45 til klokka 14.10?

Svar: .... minutter

Oppgaveeksempel 34

Spørsmål b tar for seg problemet med tidsangivelse i timer og minutter. Selv barn som kan si at det er 60 minutter i en time, har en tendens til å oppfatte klokkeslett som desimaltall. Dette kan vi i noen grad oppdage når vi ber elevene om å beregne tidsrommet mellom to klokkeslett.

Oppgave 12a, 6. klasse (N = 434) og oppgave 22a, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	10	5
35 timer (Riktig svar)	19	50
11 timer	9	5
23 timer	25	18

Tabell 46: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 12a, 6. klasse og 22a, 9. klasse

Mens halvparten av elevene i 9. klasse svarer riktig, klarer bare 19 % av elevene i 6. klasse oppgaven. Dette skyldes i liten grad at elevene ikke prøver å svare på oppgaven.

Av feilsvar forekommer *23 timer* hyppigst på begge klassetrinnene. Dette svaret tyder på manglende oppmerksomhet eller forståelse av at man først må ta 24 timer (og ikke 12 timer) for å komme til samme tidspunkt neste dag og deretter telle ytterligere 11 timer. En annen forklaring kan være at man overser at det andre klokkeslettet er om kvelden. Det kan imidlertid igjen indikere at eleven ikke er tilstrekkelig oppmerksom på at klokka er sju to ganger i døgnet. Det beste er å be om en muntlig forklaring for å få fram tenkemåten hos hver enkelt elev. En del elever vil da selv oppdage feilen og korrigere den.

Elever som svarer 11 timer, har antakelig oversett at det var klokka sju *neste dag*. Tall som 34 og 36 kan skyldes «tellefeil» når elevene «teller seg fram på klokka». I kategorien andre svar er ingen feilsvar framtredende.

Oppgave 12b, 6. klasse (N = 434) og oppgave 22 b, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	26	14
325 minutter (Riktig svar)	16	41
525 minutter	2	1
5,65 minutter	2	1

Tabell 47: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 12b, 6. klasse og oppgave 22b, 9. klasse

Forholdsvis mange elever, særlig i 6. klasse, finner denne oppgaven så vanskelig at de ikke gir noe svar. Bare 16 % på dette klassetrinnet finner riktig svar. Tallet på riktige svar i 9. klasse er betydelig høyere (41 %). Rundt regnet halvparten av elevene gir svar som man ikke uten videre kan finne grunnen til bare ved å se på svaret. (Siden en del elever foretok beregningen i margen på oppgavearket under den landsomfattende standardiseringen, ble det illustrert at mange gjorde regnefeil, og at mange gjorde mer enn en feil i beregningene. Det er derfor ingen «typiske» feilsvar som ofte går igjen.)

Vi har plukket ut tre svar som kan indikere at elevene er usikre på om det er 60 eller 100 minutter i en time. Vi ser at denne feiltypen forekommer oftere blant de noe yngre elevene.

Elever som regner 100 minutter i en time, kan få svaret 525 minutter, hvis de ikke gjør andre feil i tillegg. Andre tall man i den forbindelse kunne se etter, er for eksempel 565 (500 + 55 + 10). Elever som får 5,65, har subtrahert som ved desimaltall. 565 kan også forekomme her (5,65 · 100). Elever som får 335, kan regne om fem timer til 300 minutter på riktig måte, men «glemmer» at kvarteret fra 8.45 til 9.00 er 15 minutter, ikke 25.

5.6 Måling av tid

Vi måler tid ved å telle enheter. Når vi regner ut alderen til en person, tar vi utgangspunkt i kalenderen. Tallene for fødselsdagen og dagen i dag sammenlignes. Vi teller hele år, måneder og dager. Behovet for nøyaktighet avgjør om vi trenger ta med dagene, eventuelt timene. Når vi tar tida under et idrettsarrangement, går vi over til egentlig måling ved å bruke klokker. Avhengig av hvor nøyaktige klokkene er, teller vi timer, minutter, sekunder og deler av sekunder.

Ingen målinger kan bli helt nøyaktige, heller ikke tidsmålinger. Det er en del av målingenes vesen. (Se kapittel 1.) Dette henger sammen med at det er grenser både for hvor nøyaktig man kan definere den størrelsen som skal måles, hvor nøyaktig måleinstrumentet er, og hvor nøyaktig man er i stand til å utføre målingene. I idretten har man blitt stadig mer nøyaktig i beskrivelsen av det å komme i mål. Man utvikler elektroniske måleinstrumenter som skal være mest mulig uavhengige av menneskelig unøyaktighet. Det betyr at måleusikkerheten reduseres til et nivå som man for tida kan akseptere.

Elevenes forståelse av at enhver måling er beheftet med en usikkerhet, og at denne usikkerheten kan tallfestes, utvikles etter hvert. Oppgave 18 for 9. klasse kan gi et innblikk i hvor langt elevene har kommet i denne utviklingen. (Det første spørsmålet gjelder i hvilken grad elevene ser sammenhengen mellom fart, tid og strekning.)

Oppgave 18, 9. klasse

På et idrettsstevne har Kåre to meter igjen av 60-meteren når Per går i mål. De har hver sin tidtaker. Begge oppgir tida 7,9 sekunder!

a Omtrent hvor stor tror du forskjellen egentlig var?

Svar: .... sekunder

b Hvordan kan slike feil skje?

c Kom med forslag til hvordan man kan forbedre tidtakingen.

Oppgaveeksempel 35

Oppgave 18a, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	14
0,1-0,4 (Riktig svar)	24
0,5-0,9	15
1,0-1,9	18
2(,0)	14
Mer enn 2 sekunder	9

Tabell 48: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 18a, 9. klasse

Det riktige svaret ville være ca. 0,2 s. Det vil man få hvis man beregner gjennomsnittsfarten eller gjør et grovt overslag. Erfarne tidtakere og idrettsutøvere ville også si dette uten å gjøre noen form for beregning. Vi har likevel «godtatt» 0,1–0,4 s som riktige svar. Omtrent en firedel av elevene gav et slikt svar. Langt flere har angitt ett sekund eller mer. Det tyder på at deres kvalitative begrep om fart og tid er svært usikkert.

Det var ikke lett å kode svarene på spørsmål 18b. En velvillig vurdering resulterte i at ca. 20 % av elevene forstod at slike feil kan skje ved tilfeldige unøyaktigheter som i alle andre målinger.

Oppgave 18b, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	25
Målefeil, tilfeldige feil	20
En av tidtakernes feil	28
Villet feil av tidtaker	2
Unøyaktige klokker	8
Løperens feil	4

Tabell 49: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 18b, 9. klasse

Noen flere elever hevdet at en av tidtakerne var skyld i feilen. En del av disse elevene mente at det var en villet feil. Noen gav en av løperne skylden for feilen! Ca. 8 % mente at feilen skyldtes unøyaktige klokker. Svært få svarte på spørsmål 18c om hvordan man kan forbedre tidtakingen. Delvis knyttet forslagene seg til svarene på b. Dette spørsmålet (og spørsmål b) kan være et godt utgangspunkt for gruppe- og klassesamtaler for å bevisstgjøre elevene om at all måling er beheftet med feil, og at størrelsen på målefeil kan reduseres.

5.7 Hvor lang tid tar det å bevege seg en gitt strekning?

Hvilken forståelse elevene har av fart, knytter seg til spørsmålet om hvor lang tid det tar å bevege seg en gitt strekning. Ovenfor har vi vist at mindre enn hver fjerde elev i niende klasse gir en realistisk vurdering av hvor lang tid det tar å løpe 2 m i et sekstimetersløp. Et par tilsvarende spørsmål gir et noe mer positivt inntrykk.

Oppgave 31, 6. klasse og oppgave 5, 9. klasse

Vinneren av et kappløp brukte tida 3 minutter 47,5 sekunder.

a Hvor langt tror du løpet var?

- ☐ 100 m
- ☐ 400 m
- ☐ 1500 m
- ☐ 5 000 m
- ☐ 10 000 m

b Regn ut hvor mange sekunder han brukte.

Oppgaveeksempel 36

Oppgave 31a, 6. klasse (N = 457) og oppgave 5a, 9. klasse (N = 451)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	6	2
1500 m (Riktig svar)	39	56
100 m	9	4
400 m	32	27
5000 m	9	8
10 000 m	0	0

Tabell 50: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 31a, 6. klasse og oppgave 5a, 9. klasse

Vi ser at 56 % i 9. klasse og 39 % i 6. klasse svarer 1500 meter, som er det forventede svaret. I 6. klasse svarer nesten like mange 400 meter, som er det vanligste feilsvaret også i 9. klasse. Den angitte tida svarer til normal gangfart på 400 meter.

Oppgave 31b, 6. klasse (N = 457) og oppgave 5b, 9. klasse (N = 451)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	28	19
227,5 (Riktig svar)	35	63
347,5	4	2

Tabell 51: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 31b, 6. klasse og oppgave 5b, 9. klasse

Ovenfor har vi sett at mange elever på begge klassetrinnene har vansker med å regne timer og minutter om til minutter. I tabell 51 ser vi at svært mange elever finner denne oppgaven så vanskelig at de ikke svarer på spørsmålet. Litt over en tredel av elevene i 6. klasse og nesten to tredeler av elevene i 9. klasse klarer likevel å finne riktig svar.

En del elever får svaret 347,5. De regner med 100 sekunder i minuttet. Noen få elever får 208,5. De skriver tida som 3.47,5 minutter og multipliserer med 60, som om det er et desimaltall. For øvrig er det en rekke ulike regnefeil og feilstrategier i kombinasjon som gir et utall av feilsvar.

I oppgaveeksempel 37 møter elevene en tilsvarende utfordring som i oppgaven ovenfor.

Oppgave 30, 6. klasse og oppgave 23, 9. klasse

Andersen er pensjonist og sykler hver dag til butikken for å handle.

Hvor lang tid tror du han bruker, når veien er 5 km lang?

- ☐ ca. 5 min
- ☐ ca. 20 min
- ☐ ca. 1 time
- ☐ ca. 2 timer

Oppgaveeksempel 37

Oppgave 30, 6. klasse (N = 457) og oppgave 23, 9. klasse (N = 439)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	6	3
20 minutter (Riktig svar)	53	56
5 minutter	4	2
1 time	30	30
2 timer	3	4

Tabell 52: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 30, 6. klasse og oppgave 23, 9. klasse

Elevene på de to klassetrinnene har svært lik svarfordeling. Litt over halvparten gir det forventede svaret på 20 minutter. Noen elever synes å ha regnet med at Andersen til sammen sykler 10 km, og at spørsmålet er hvor lang tid han bruker på denne strekningen. Da er 20 minutter i minste laget, og svaret bør være 1 time. Oppgaven bør formuleres slik at det ikke er noen tvil. Valget av 1 time kan også være aktuelt, hvis man tenker seg en forholdsvis forsiktig person, som sykler i gangfart. Opplysningen om at han er pensjonist, er unødvendig og kan forvirre noen.

6 Vinkler

Erfaring fra samarbeid med lærere viser at mange føler usikkerhet når det gjelder vinkelbegrepet og hvordan det skal formidles til elevene. Tilnærmingene er forskjellige i lærebøker og i oppslagsverk. La oss se på tre eksempler.

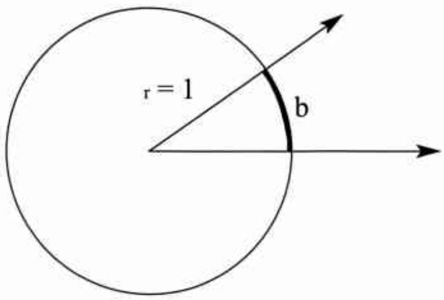
1 Går vi til Kunnskapsforlagets *Matematikkleksikon* (1997), finner vi følgende definisjon: *En vinkel består av to stråler som går ut fra samme punkt O (vinkelens toppunkt) i et orientert plan. De to strålene kalles vinkelens ben.*

2 *Grunntall 8,* utgitt av Elektronisk undervisningsforlag, gir følgende definisjon: *En vinkel er området mellom to stråler med samme endepunkt eller to linjer som krysser hverandre.*

3 *Matematikk 8,* utgitt på Achehoug (1996), velger ikke å gi noen definisjon av vinkel. Kapittelet starter med eksempler på rotasjoner.

Tradisjonelt har vi to definisjoner av størrelsen på en vinkel.

1 Lengden av buen på en sirkel med radius 1 og med sentrum i vinkelens toppunkt. Siden vi vet at omkretsen av en sirkel er $\mathbf{2 \cdot \pi \cdot r}$, vil størrelsen på en vinkel være mellom 0 og 2π. Enheten kalles *radian.*



Vi går fra radianer til grader ved å multiplisere med $\frac{360}{2\pi}$.

2 Vi definerer en hel omdreining til 360° (360 *grader*). En mindre omdreining vil gi et forholdsvis mindre gradtall.

Vi går fra grader til radianer ved å multiplisere med $\frac{2\pi}{360}$.

På lommeregnere og i regneark vil forståelse av de to enhetene (og en omregning) være en aktuell problemstilling. Elevene kommer fort i situasjoner hvor de to måleenhetene kan skape forvirring.

Elevene arbeider med vinkler i ulike situasjoner. På papiret er det vanlig enten å måle vinkler med en gradskive eller å tegne/konstruere vinkler. Dreining av figurer et gitt antall grader kan også være aktuelt. Hvilken definisjon av vinkler bør vi bruke? Erfaringsmessig skaper den første definisjonen forvirring når det gjelder å forstå størrelsen av vinkelen. Hvis man fokuserer på beina, kan det oppstå en misoppfatning om at det er «lengden» av strålene (tegnet lengde) som avgjør hvor stor vinkelen er.

Den andre definisjonen skulle tilsi at vi måler arealet innenfor enhetssirkelen, ikke buen. Det ville gi halvparten så store måltall, og betegnelsen *radianer* passer heller ikke. På den andre siden blir vinkelen større etter hvert som området blir større. Slik sett er definisjonen brukbar.

- Hvis man fokuserer på arealet, kan man få en misoppfatning om at størrelsen knytter seg til området *slik det kommer fram på tegningen innenfor buen og mellom de tegnede strålene.*
- Hvis man fokuserer på buen, kan det tilsvarende oppstå en misoppfatning knyttet til *buelengden på tegningen.*

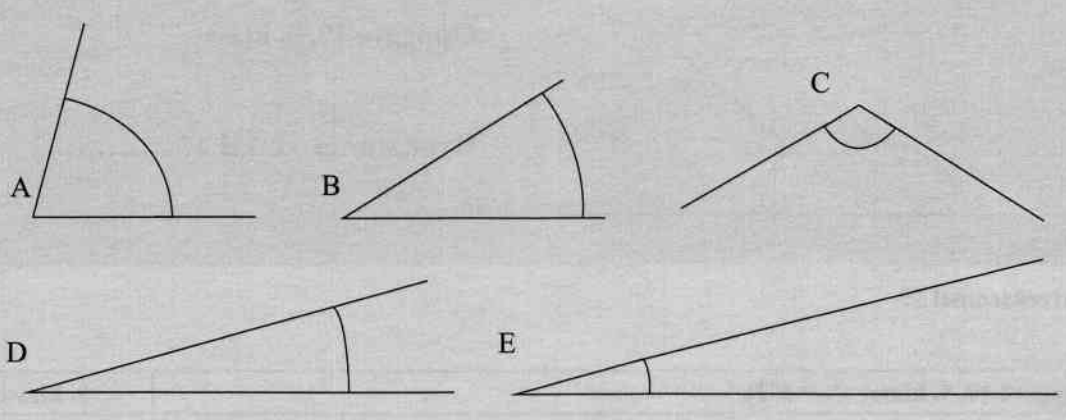
Vi kan muligens forebygge disse misoppfatningene noe ved at vi hele tida viser til enhetssirkelen eller tegner buer med en bestemt radius.

Den tredje «definisjonen» knytter seg til dreining eller rotasjon. Men hvordan måler vi dreining? Må vi ikke også her innom «enhetssirkelen» for å finne et mål?

6.1 Hva viser størrelsen på en vinkel?

Oppgave 14, 6. klasse og oppgave 9, 9. klasse har til hensikt å avsløre misoppfatningene som vi har nevnt ovenfor, hos elever på disse klassetrinnene.

Oppgave 14, 6. klasse og oppgave 9, 9. klasse



Hvilken av vinklene ovenfor er størst? ....

Oppgaveeksempel 38

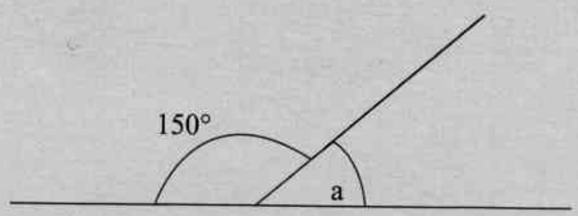
Oppgave 14, 6. klasse (N = 434) og oppgave 9, 9. klasse (N = 452)	6. klasse	9. klasse
Ubesvart	4	1
C (Riktig svar)	45	87
A	15	7
B	6	1
D	3	0
E	24	2

Tabell 53: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 14, 6. klasse og oppgave 9, 9. klasse

Vinkel C er riktig svar. De fleste niendeklassingene (87 %) krysser av for dette alternativet, mens bare 45 % i 6. klasse svarer riktig. For 9. klasse er vinkel A det vanligste feilvalget. Denne vinkelen har lengst bue. Omtrent 15 % i 6. klasse og 7 % i 9. klasse synes å legge vekt på lengden av den inntegnede buen. For 6. klasse er vinkel E det vanligste feilvalget, 24 % på dette klassetrinnet velger vinkelen hvor det er tegnet lengst vinkelbein, til tross for at den «spriker» minst. Svært få gjør dette valget i 9. klasse. I 6. klasse er det også en betydelig andel som velger vinkel B (størst areal innenfor buen) og vinkel D (lengst avstand mellom buen og toppunktet).

6.2 Sammenheng mellom størrelsene på vinkler

Vinkler måles med gradskiver eller mer avanserte redskaper. Men i geometrien arbeider vi mye med vinkelberegninger basert på definisjoner eller bevis. Det er av interesse å vite om elevene kjenner de mest grunnleggende forholdene.



Oppgave 10, 9. klasse

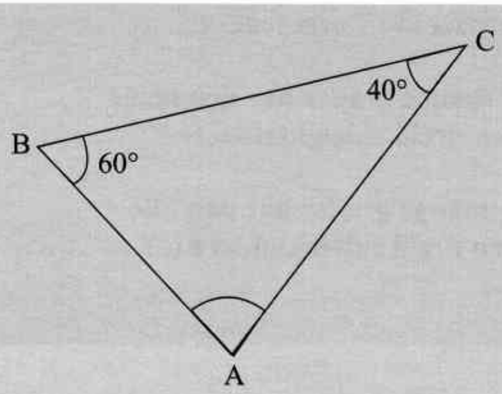
Hvor stor er vinkel a? ....

Oppgaveeksempel 39

Oppgave 10, 9. klasse (N = 452)	9. klasse
Ubesvart	3
30° (Riktig svar), 30	67
45°	7
60°	6
Mellom 35° og 50°, unntatt 45°; vinkelmåling	8

Tabell 54: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 10, 9. klasse

Omtrent to tredeler av elevene i 9. klasse «ser» at vinkelen må være 30° for at summen skal bli 180°. Hvis man måler, finner man et tall på mer enn 35. Det kan derfor antas at en god del av de 8 % som angir mellom 35° og 50°, har målt. I tillegg kommer ca. 7 % som svarer 45°. Disse elevene kan ha målt eller valgt en kjent vinkel som er omtrent like stor som vinkelen det er spurt om.



Oppgave 28, 9. klasse

Hvor stor er vinkel A? ....

Oppgaveeksempel 40

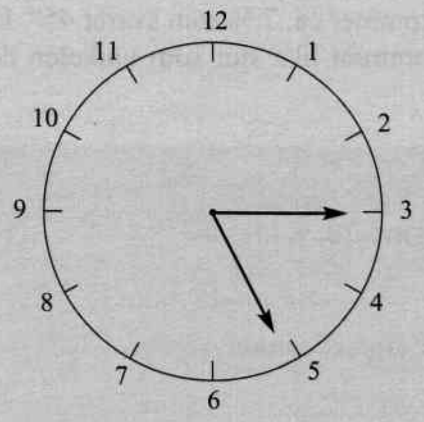
Oppgave 28, 9. klasse (N = 439)	**9. klasse**
Ubesvart	11
80° (Riktig svar), 80	67
60°	5
90°	3

Tabell 55: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 28, 9. klasse

Som i oppgave 10 er det også her omtrent to tredeler av elevene i 9. klasse som gir riktig svar. Vinkel A må være 80° for at summen skal bli 180°. Hvis man måler, finner man ca. 78° eller 79°. Svært få angir dette tallet. Derimot velger 5 % 60° og 3 % 90°, som er «kjente» vinkler.

6.3 Dreining

I oppgave 17 i 6. klasse og oppgave 11 i 9. klasse er det flere fallgruver. Noen elever ser en vinkel (mellom viserne) og kan oppfatte at man spør om hvor stor denne vinkelen er. Andre elever har et så fjernt forhold til vinkler at de leter etter tall på figuren. Dermed svarer de med en tidsangivelse. Ytterligere en vanske ligger i at utgangspunktet ikke er tegnet på figuren. Hvor stod langviseren klokka 5? Hvor stod lilleviseren klokka 4? Elevene må se for seg en dreining med et utgangspunkt og et sluttpunkt.



Oppgave 17a, 6. klasse og oppgave 11a og b, 9. klasse

Klokka viser kvart over fem.

a Hvor mange grader har den lange viseren dreid siden klokka fem?...........

b Hvor mange grader har den lille viseren dreid siden klokka fire?...........

Oppgaveeksempel 41

Spørsmål a ble gitt til begge klassetrinnene. Spørsmål b ble bare gitt til 9. klasse. Hensikten med oppgaven var å finne ut om elevene forbinder noe måltall med en vinkel som kommer fram ved en kvart omdreining. Trolig har ikke alle elevene oppfattet situasjonen, hvis de ikke til vanlig betrakter vinkler også som et mål for dreining. Det er forholdsvis få elever som ikke har svart på denne oppgaven. Det viser at det store flertallet av elevene selv har ment at de har forstått spørsmålet.

Oppgave 17a, 6. klasse (N = 457) og oppgave 11a, 9. klasse (N = 452)	**6. klasse**	**9. klasse**
Ubesvart	9	4
90° (Riktig svar), 90	32	62
15°, 15, 15 min	24	5
3	7	3
45°, 45	34	10
60°, 60	2	3

Tabell 56: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 17a, 6. klasse og oppgave 11a, 9. klasse

Det er en kraftig økning av riktige svar fra 6. til 9. klasse. Kan det tenkes at elevene i 9. klasse gjennom matematikkundervisningen har blitt kjent med det dynamiske vinkelbegrepet, det at vinkelen *dreies* 90°, i tillegg til det statiske vinkelbegrepet?

Feilsvarene sprer seg over en rekke tall. I 6. klasse går tallet 15 igjen i en eller annen forbindelse. Her synes man å blande tidsmåling og vinkler sammen (det er gått 15 minutter). I 9. klasse er dette problemet mindre utbredt (5 %). Langviseren peker mot tallet 3. 7 % i 6. klasse velger dette tallet. Betydelig færre elever i 9. klasse gjør det samme.

«Kjente» vinkler går igjen også i denne oppgaven. I 9. klasse svarer 10 % 45 eller 45°, og 3 % svarer 60 eller 60°. Tilsvarende tall for 6. klasse er 34 % og 2 %. Har man bare valgt blant «kjente vinkler», eller kan disse svarene ha en annen forklaring?

Dreiningsvinkelen til den lille viseren er betydelig vanskeligere å finne enn svaret på de andre oppgavene om vinkler. Enklest er det å beregne hvor stor dreining en time representerer (360°/12 = 30°). Dernest legger man til 1/4 av 30° (7,5°). Bare ca. 4 % av niendeklassingene klarer denne oppgaven.

Oppgave 11b, 9. klasse (N = 452)	**9. klasse**
Ubesvart	10
37,5° (Riktig svar), 37,5	4
30°, 30	12
40°, 40	9
45°, 45	5
Mellom 5° og 25°	17
Tall mellom 30° og 45°, unntatt 37,5° og 40°	10

Tabell 57: Prosentvis fordeling av elevsvar på oppgave 11b, 9. klasse

Omtrent 26 % gir tallene 30, 40 eller 45, som synes å være resultat av et overslag eller en gjetning. Ytterligere ca. 10 % av elevene foreslår andre tall mellom 30 og 45. 17 % svarer mellom 5 og 25. Det kan tyde på at de tror utgangspunktet for dreiningen var klokka 5. Omtrent hver fjerde elev gir tall som ligger utenfor området 5–45.

DEL 2

IDEER TIL UNDERVISNINGSAKTIVITETER

I denne delen skal vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av måling og enheter. Disse vanskene og misoppfatningene har stått sentralt i del 1.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. I KIM-heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning* (Brekke 1995) har vi diskutert diagnostisk undervisning, som har det særpreget at feil og misoppfatninger som elevene gjør, brukes på en konstruktiv måte. Diskusjoner av ideene som knytter seg til begrepene, og tid til å reflektere over det man gjør, står sentralt i denne arbeidsmåten. De fleste av aktivitetene er laget med dette som siktemål. Derfor tilrår vi at man leser kapittel 3 i introduksjonsheftet før man tar i bruk aktivitetene i denne samlingen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, tar vi i kapittel 4 opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner.

7 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom man ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de få anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups in the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk is future thinking.*

Tradisjonell undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, holder både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte assosierer lærere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin. Å be barn presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og der disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel:

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. Derfor er de usikre på hvordan de skal organisere slike diskusjoner. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor peker vi på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klassen.

Etter at et problem eller et tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet man bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det utforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er rett eller galt. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist at klasser gjør det klart bedre på tester når læreren ikke prøver å «avslutte» diskusjonene for tidlig ved å peke på det rette svaret eller den rette måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det rette tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som

- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte en som snakker
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer

«Hør på hva Anne sier.» «Takk Helge! Nå, hva mener du, Marit?» «Hvordan reagerer du på det, Åse?» «Er det andre ideer her?» «Kan du gjenta det du sa, Petter?»

2 Noen ganger være en «utspørrer» eller «provokatør» som

- introduserer en ny idé når diskusjonen er laber
- følger opp et synspunkt
- spiller «djevelens advokat»
- fokuserer på et viktig begrep
- unngår å stille multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar

«Hva ville hende dersom ...?» «Hva kan du si om svaret når du multipliserer to tall?»

3 Ikke være en dommer eller «vurderer» som

- vurderer hvert svar med «ja», «godt», «interessant» eller lignende. Slikt hindrer ofte andre i å komme fram med alternative ideer og oppfordrer til en «ytre akseptabel» framførelse i stedet for en utforskende dialog

«Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene.» «Du er nesten framme.» «Ja, det er rett.» «Nei, du skulle ha sagt ...» «Kan noen se hva som er galt med det Gunnar sier?»

Hensikten med denne listen er ikke å vise at det alltid er upassende å evaluere elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, endrer diskusjonen karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med «spørsmålsgjetting», der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende dialog, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, argumenterer og tenker elevene fremdeles når de forlater timen.

Når vi her taler om diskusjoner, må vi understreke at de kan ta mange former og ha ulike formål. Det er for eksempel forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der man skal dele erfaringer med hverandre eller oppsummere etter at man har arbeidet en stund med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor peker vi på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger er det spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsningene de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å ha misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmersom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende at læreren stiller spørsmål som:

- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? (Man kan sammenligne både elevsvar på ulike oppgaver og elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor.

8 Undervisningsaktiviteter

8.1 Kontinuerlige variable

Teoretisk er kontinuitet et vanskelig begrep. Barn kan likevel utvikle en viss forståelse av variable som kontinuerlige i den forstand at:

- Verdiene følger etter hverandre i en ordnet rekkefølge.
- Mellom hvilke som helst par av verdier kan vi tenke oss en ny verdi.
- For en hvilken som helst verdi kan vi tenke oss en ny verdi så nær som vi bare måtte ønske.

Elevene trenger erfaringer som viser at å måle til nærmeste millimeter likevel ikke gir et «nøyaktig» riktig svar. Men er svaret nøyaktig nok for den aktuelle problemstillingen?

Utstyr
Metermål
Papirremse på 1 m
Lommeregner

Oppgave
Sitt sammen to og to.
Brett papirremsa slik at dere får like lange deler.
Gjett hvor lang hver del blir.
Mål remsa og skriv tallet.
Regn ut lengden ved å dividere hele lengden på antall deler.
Sett 1 poeng på den som har gjettet best. (Hvis begge har samme tall, får begge 1 poeng.)

Antall deler	Gjetning fra elev 1	Gjetning fra elev 2	Målt lengde	Utregnet lengde	Poeng elev 1	Poeng elev 2
2						
3						
4						
5						
6						
7						
				Sum poeng:		

Drøft i klassen
- Hvorfor blir det mange desimaler på noen av de lengdene dere regner ut?
- Hvor mange desimaler trenger du for å se hvem som har gjettet best?
- Kan alle brøker skrives nøyaktig ved hjelp av desimaltall?

Aktivitet 2

8.2 Hvor stor er 1 m^2?

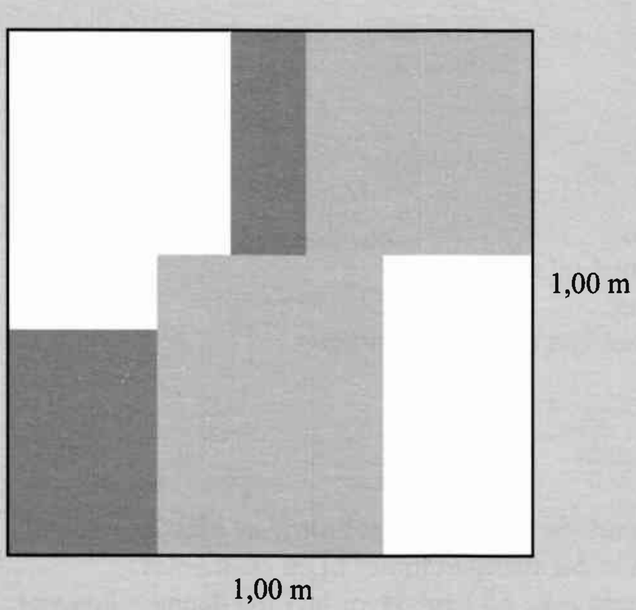
Elever får ikke et skikkelig inntrykk av måleenheten 1 m^2 uten å håndtere den. En aktuell måte er å bruke enheter som man likevel er kjent med. Mest nærliggende er det å bruke A4-ark. (16 A4-ark gir nøyaktig 1 m^2. Men formen blir ikke kvadratisk.) Vi velger i stedet aviser. Aviser har forskjellige størrelser, men de kan likevel brukes.

Utstyr

Saks
Lim eller limbånd
Avis
Metermål

Oppgave A

- Klipp opp en avis i hele ark.
- Legg arkene delvis oppå hverandre slik at de danner et kvadrat med sider på 1,00 m. Arealet er da 1,00 m^2.
- Lim arkene sammen.



Oppgave B

- Prøv hvor mange elever som kan stå på arket samtidig, uten at noen tråkker ut over kanten.
- Legg arket inntil et hjørne. Er det plass til like mange nå?

Oppgave C

- Forsøk å lage 1 m^2 ved å bruke så få ark som mulig. Mål lengde og bredde og tegn en figur som viser løsningen.

Aktivitet 3

Oppgave A gir et inntrykk av hvor stor 1 m^2 er, både i forhold til en avisside og absolutt.

Oppgave B gir erfaringer om størrelsen av 1 m^2 i forhold til elevene selv.

Oppgave C inviterer til å lage en ikke-kvadratisk flate. Den gir erfaringer med at 1 m^2 er en størrelse, ikke en bestemt form. Når bredden øker, reduseres lengden av rektangelet på 1 m^2. Hvis man ønsker å komme inn på størrelsen av A4-arket, er det aktuelt nå.

Som en utfordrende ekstraoppgave kan man be elevene omforme et A4-ark til et kvadrat (med samme areal) ved hjelp av saks og limbånd.

8.3 Hvor stor er 1 m^3?

Denne oppgaven har mye til felles med oppgaven i 8.2. Hele klassen bør samarbeide, slik at det blir seks stive kvadrater på 1 m^2 hver. Nå skal kubikkmeteren utforskes.

Utstyr
Saks
Lim eller kraftig limbånd
Kartong fra noen store esker
Metermål

Oppgave A
- Klipp opp eskene i størst mulig biter.
- Lag seks kvadrater hver med sidekant 1,00 m.
- Sett kvadratene sammen til en terning.
- Drøft i klassen hvor mange elever som kan få plass i terningen.
- Prøv.

Oppgave B
- Tegn et rutemønster (dm^2) på et stort ark og legg arket i et hjørne av klasserommet.
- La elever stille seg opp i hjørnet ved at det stadig kommer til en ekstra elev.
  Vurder når elevene har fylt opp en tenkt eske på 1 m^3. Hvor høy må denne esken være?
- Tegn ytterkantene av grunnflaten til den tenkte esken på papiret.
  Hvor stor kan denne grunnflaten være?
- Hvordan kan du kontrollere om esken rommer ca. 1 m^3?
- Tegn en figur av den tenkte esken og sett på mål.

Aktivitet 4

Oppgave A gir elevene inntrykk av hvor stor 1 m^3 er, både i forhold til elevene selv og absolutt.
Oppgave B inviterer til å betrakte 1 m^3 som en størrelse, uavhengig av formen.

Omkrets er ikke areal

Det er en vanlig misoppfatning at areal og omkrets er knyttet sammen slik at samme omkrets alltid omrammer like store areal. I denne oppgaven utfordres elevene på dette punktet.

Elevene velger trolig både kjente geometriske figurer og mer uregelmessige former. Dermed blir det behov for både å telle og å beregne arealet. Ved telling er det for enkelte elever et spørsmål om hvordan deler av ruter (cm^2) skal behandles.

Utstyr

Snor bundet i en sløyfe på ca. 40,0 cm

Ruteark med ruter på 1 cm^2

Oppgave

Arbeid sammen to og to.

- Legg snora på rutepapiret og la den danne ulike figurer.
  Tegn av figurene langs snora.
- Se på hver figur.
  Hvor stor er omkretsen? Hvor stort er arealet?
  Skriv svarene inni hver av figurene.
- Hvilken form tror du figuren bør ha for å få størst mulig areal?
  Hvor stort er dette arealet?

8.4 Lengde, areal og volum i klasserommet

Lengder, arealer og volum er mål på den fysiske virkeligheten omkring oss. I barnehagen og småskolen er det vanlig å feste «merkelapper» på gjenstander for at elevene skal knytte ordbilder til ord. Når elevene blir eldre, gjentas denne metoden for innlæringen av engelske ord. Vi kan delvis bruke denne metoden også i matematikkundervisningen.

Oppgave

1 La elevene gjette målene på en del lengder:
- Bredden av døra (vinduet)
- Høyden av døra (vinduet)
- Bredden (lengden, høyden) av klasserommet
- Bredden (lengden, høyden) av skapet, krittesken, kassa på skriftprosjektøren, papirkurven, en ball osv.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

2 La elevene gjette målene på en del arealer:
- Arealet av døra (vinduet)
- Arealet av klasserommet
- Arealet av tavla
- Arealet av sidene på krittesken, kassa på skriftprosjektøren, papirkurven, en ball osv.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

3 La elevene gjette volumet på en del gjenstander:
- Volumet av klasserommet
- Volumet av en melkekartong
- Volumet av krittesken, kassa på skriftprosjektøren, papirkurven, en ball osv.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

Aktivitet 6

Like viktig kan det være å gå «motsatt vei». Vi kan be elevene se nøye på inventar og bygningsdetaljer og gi som oppgave å finne lengder på 1,00 m, 1,0 dm, 1,0 cm og 1 mm.

Tilsvarende kan vi be elevene finne arealer på 1,00 m^2, 1,0 dm^2, 1,0 cm^2 og 1 mm^2 eller volum på 1,00 m^3, 1,0 dm^3, 1,0 cm^3 og 1,0 mm^3.

Trykk: GAN Grafisk AS

ISBN 82-486-0840-9

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo og Telemarksforsking-Notodden har etter oppdrag fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet utarbeidet de diagnostiske oppgavene med veiledningsmateriell.