Utdanningsdirektoratet

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Algebra

Bokmål

INNLEDNING

Denne veiledningen inneholder to deler, som begge er knyttet til diagnostiske oppgaver om emnet *Algebra* og begreper innenfor dette emnet. Spesielt fokuserer disse oppgavene på ele**vers forståelse av diagnostiske oppgaver og bruk** av likhetstegnet i matematikk.

Disse oppgavene er prøvd ut tidligere på 6., 8. og 10. årstrinn.

Del 1 av denne veiledningen gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger med utgangspunkt i utprøvingen av oppgavene.

Oppgavene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved elevens forståelse av forskjellige sider ved algebra i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisningen, slik at elevene kan utvikle en så solid begrepsforståelse som mulig.

Analysen, som utfyller de veiledningstekster som knyttes til den enkelte oppgave i den digitale prøven, er likevel ikke uttømmende. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begreps-dannelse innenfor temaet algebra.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer og rettledninger, som retter seg mot de vansker som kartleggingsoppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt **i hvordan diagnostiske kan lages, og hvordan vi tilpasser undervisningsopplegg på bakgrunn de vanskene som** elevene har.

Del 1 Analyse av læringsstøttende oppgaver

Algebra

I denne delen blir ulike begreper knyttet til algebra analysert og diskutert. Noen av de digitale diagnostiske oppgavene er noe modifisert i forhold til de opprinnelige oppgavene, mens andre er uforandret.

Det deltok 100 klasser på 6. årstrinn, 89 klasser på 8. årstrinn og 90 klasse på 10. årstrinn i datainnsamlingen.[1] På disse årstrinnene var det henholdsvis 1805, 1953 og 1957 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalg fra alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulik størrelse. Blant de elevene som besvarte prøvene, har vi trukket ut ca. 500 elever.

Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen, er følgende:

Algebra: 505 på 6. årstrinn, 517 på 8. årstrinn og 511 på 10. årstrinn

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved måling og bruk av enheter og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett.

[1] Konvertert fra M87-betegnelser

Kapittel 1 Grunnskolens algebra

I dette kapitlet vil vi reise og diskutere noen problemstillinger knyttet til undervisning i og læring av algebra. Diskusjonen vil fortsette i de neste kapitlene, der vi vil gå mer detaljert til verks når det gjelder konkrete oppfatninger hos elevene. En presentasjon og diskusjon av elevaktiviteter følger så i del 2.

1.1 Introduksjon

Det å lære algebra har sine røtter i den matematikken vi lærer i de første klassene i grunnskolen, når elevene legger merke til regelmessigheter i sitt arbeid med tall. Fra denne begynnelsen utvikler de kunnskaper om egenskaper ved tallene og regne-operasjonene, egenskaper som senere kan generaliseres til kunnskaper i algebra. Flere studier som er gjort av elevers kunnskaper i dette emnet, peker på at *mange får vansker med å lære algebra fordi de ikke har solid nok kunnskaper om tallene og de grunnleggende regneoperasjonene*. De trenger å få gjort seg opp *generelle* tanker om resultatet vi får ved å utføre regneoperasjoner med tall, og ikke bare rette oppmerksomheten mot å få riktige svar på sine utregninger. Slike tanker vil danne et grunnlag for generaliseringer innenfor algebra.

Algebra blir vanligvis sett på som et problemområde for mange elever, noe som har fått lærere til å sette spørsmålstegn ved nytten av dette emnet i skolen. Kan dette komme av at vi konsentrerer så mye av arbeidet om å lære regler, formler og algoritmer at begrepsdanningen kommer i bakgrunnen? Med for stor vektlegging av dette aspektet i undervisningen, kan siktemålet til mange elever bli et spørsmål om å beherske en rekke prosedyrer. Det må understrekes at prosedyrene i algebra er viktige, på samme måte som prosedyrene i tallregning er det, men det er uheldig hvis elevenes siktemål med emnet bare blir knyttet til disse prosedyrene. Det er enighet om at de matematiske utfordringene for elevene ligger i:

- å se sammenhenger til andre områder av skolematematikken og til anvendelser utover denne
- å se linjene innenfor algebra og at dette arbeidet skjer ved å trekke paralleller til tallforståelse og tallregning
- at mange elever mangler grunnleggende forståelse av de regneoperasjonene som de skal utføre på symbolene, uttrykkene eller ligningene
- holdningen til emnet, det at emnet oppfattes som et formelt, isolert system der symbolmanipulasjon og regler dominerer.

I mønsterplanen for grunnskolen, M87, var algebra og funksjonslære ett fagemne, mens algebra og tall var ett fagemne på ungdomstrinnet i L97. I Kunnskapsløftet, LK06, er tall og algebra et hovedområde i læreplanen etter 5. – 7. årstrinn og etter8. – 10. årstrinn. Om dette hovedområdet sies det følgende:

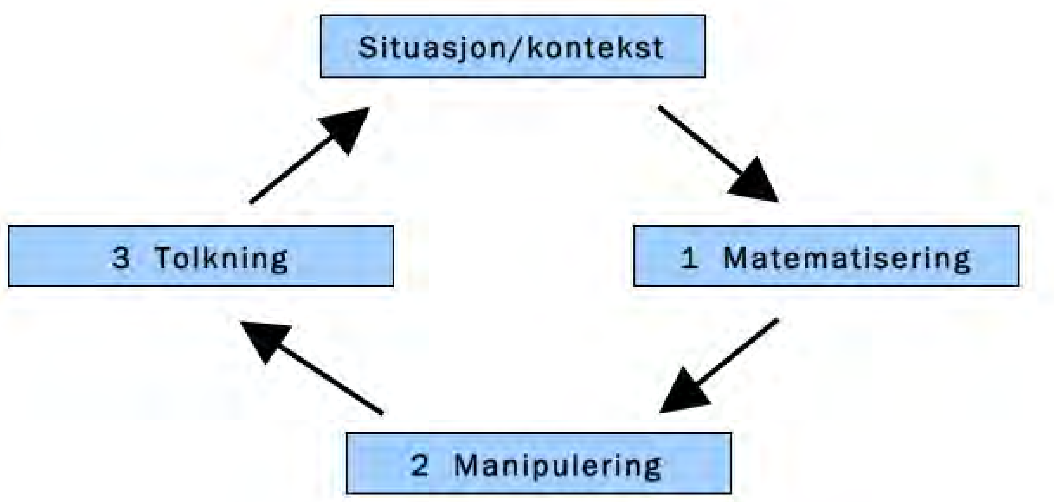
Hovudområdet tal og algebra handlar om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og mønster. Med tal kan ein kvantifisere mengder og storleikar. Tal omfattar både heile tal, brøk, desimaltal og prosent. Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar.

Læreplanen poengterer dermed hvor viktig det er at elevene har et godt grunnlag i tallregning for at de skal kunne lære algebra på en meningsfull måte. Det er likevel i denne sammenheng viktig å understreke at elevene vil måte mange nye begreps-messige utfordringer i emnet, for eksempel det å oppfatte bokstaver som generaliserte tall. Videre viser en rekke undersøkelser at mange av de vanskene som elevene opplever i algebra, kan føres tilbake til sviktende kunnskaper i aritmetikk – tallregning. Man mener det er viktig å legge opp til en undervisning som er mer innrettet mot at elevene skal få tid til å bygge **opp forståelsen av de grunnleggende** begrepene i dette fagemnet, enn det som har vært tilfellet tidligere. I denne veiledningen presenteres den informasjonen om elevenes **forestillinger som læringsstøttende prøver i algebra** gir oss. Videre diskuteres denne informasjonen, og til slutt gis det eksempler på undervisningsaktiviteter som kan avhjelpe vansker som de læringsstøttende prøvene avdekker. Det blir lagt vekt på:

- sammenhengen mellom tall, tallregning og algebra
- at elevene skal erfare at de kan representere variable størrelser ved bokstaver, bokstaver som generaliserte tall
- å arbeide med mønster og system som utgangspunkt for generaliserte tall
- at introduksjonen til emnet gjøres med konkrete eksempler for å belyse hva formler og algebraiske uttrykk kan brukes til

1.2 Bruk av algebra

Det å kunne matematikk består av en rekke typer av kunnskaper. Ser man på det å kunne bruke matematikk i forsøk på å løse problemer, så omfatter det i de fleste tilfeller en syklus av matematisering, manipulering og tolkning, som man kan illustrere ved figur 1.



Figur 1: Ulike sider av bruk av matematikk

Matematisering (1) går på å se relevansen av en eller annen matematisk sammenheng i en konkret situasjon. Matematisering går på å uttrykke denne sammenhengen ved hjelp av matematiske kunnskaper, oftest ved bruk av matematiske symboler. Fase 2 på figuren innebærer å omforme de matematiske sammenhengene eller det symbolske uttrykket for å få fram nye aspekter ved den gitte situasjonen/konteksten. I fase 3 går det ut på å tolke de nye aspektene inn i den gitte situasjonen for dermed å få fram ny innsikt i den gitte situasjonen slik at man kan løse det problemet man hadde i utgangspunktet. Vi kan gjerne dele denne beskrivelsen inn i det vi kaller ”anvendt matematikk”, der manipulering er et viktig element i den teoretiske matematikken.

Et tradisjonelt syn på matematikkundervisning har vært at det er den teoretiske matematikken, manipuleringen, som det trengs å fokuseres mest på. Denne formen for matematikkunnskap baserer seg på at man har gode kunnskaper knyttet til en rekke matematiske konvensjoner og notasjoner. Denne typen kunnskaper kan man kalle fakta. I tillegg til dette må man også beherske ferdigheter knyttet til manipulering av symboler.

Den mest ”effektive” læringen av disse formene for kunnskap foregår i hovedsak ved demonstrasjon og forklaring av en bestemt metode fulgt av øvelser med varierende tall og/eller andre symboler. Når man så senere i undervisningen møter situasjoner der problemstrukturen skiller seg fra standardtypen man har startet læringen av ferdighetene med, har man antatt at det trengs videre spesifikk undervisning knyttet til denne nye situasjonen. Et alternativ er å rette undervisningen mot aktiviteter som får elevene til å utvide og tilpasse sine egne basisideer til denne nye situasjonen.

Det er gjennomført omfattende forskning på undervisning og læring i matematikk. Fra slik forskning går det klart fram at de første oppfatningene av en matematisk sammenheng innen en gitt situasjon (kontekst), og den måten denne sammenhengen da ble uttrykt på i et matematisk språk, skaper like store vansker i læringsprosessen som de utfordringene elevene møter i den manipulative fasen. Det blir i forskningen understreket at disse vanskene med matematiseringen vanligvis ikke får nok oppmerksomhet i undervisningen. Det er dermed rimelig å hevde at den overdrevne fokuseringen på den teoretiske matematikken har ført til at vi har undervurdert problemene som elevene møter i sin begrepsdanning.

Det algebraiske språket har en dobbel funksjon. Dels er dette språket effektivt til å representere matematiseringen, og dels er det manipulativt, det vil si at språket er velegnet til å omforme gitte forbindelser for å få fram nye sammenhenger av de opprinnelige forbindelsene. På den måten blir algebra et redskap til å løse problemer. Her rører vi ved et viktig poeng ved mye av læringen i matematikk, nemlig relasjonen mellom problemløsning og ferdighet i form av manipulering av symboler. Det er ikke slik at den ene av disse to typene kunnskap kommer av å øve på den andre, men det er slik at *begrepskunnskapene støtter opp under ferdighetene*, og at det *å beherske ferdighetene støtter opp under utviklingen av begrepene*. Ferdigheter i tallregning er nødvendig både for begrepsdanning i algebra og for den manipulering av symboler i algebra som følger etter matematiseringen. Følgende eksempel fra Bergsten (1997) illustrerer noe av det som er pekt på ovenfor.

Stein: *Gi meg ti klinkekuler, så har vi like mange!*
Åse: *Hvis du i stedet gir meg ti kuler, så vil jeg ha dobbelt så mange som deg.*

Hvor mange kuler hadde Åse og Stein?

Med utgangspunkt i figur 1 vil det være tre faser angående matematiske sammen-henger:

Fase 1: Matematisering

La oss si at Åse har x og Svein y kuler. Oversettelsen gir oss da to ligninger:

$$x - 10 = y + 10 \qquad \text{(a)}$$
$$x + 10 = 2 \cdot (y - 10) \qquad \text{(b)}$$

Fase 2: Manipulering/omskriving av det algebraiske uttrykket

(a) $x-10=y+10$ gir $x=y+20$
(b) $x+10=2(y-10)$ gir $x+10=2y-20$ og $x=2y-30$

Altså er $y+20=2y-30$

Dette gir $y+50=2y$ og $y=50$

Da får vi at $x=50+20=70$

Fase 3: Tolkning av sammenhengen etter omformingen

Hva sier dette om situasjonen? Svarene $x=70$ og $y=50$ tolkes slik at Åse hadde sytti klinkekuler og at Svein hadde femti kuler.

1.3 Noen korte glimt fra algebraens historie

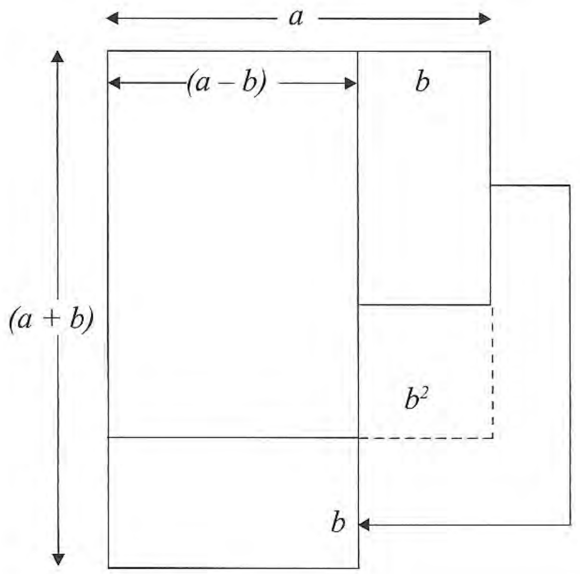
Noen av de kognitive prosessene som elevene må igjennom når de skal lære det som læreplanen sier om algebra, finner vi igjen som karakteristiske trekk i utviklingen av et algebraisk symbolsystem historisk sett. Både i den historiske utviklingen av algebra og i undervisningen i skolen opptrer algebraisk tenkning lenge før et opplevd behov for å innføre spesielle symboler. Her vil vi kort peke på tre stadier eller måter å bruke algebra på i den historiske utviklingen.

Det første stadiet kalles *retorisk algebra* og er karakterisert ved at vi bruker vanlige språklige beskrivelser for å løse spesielle typer av problemer, og at vi ikke bruker symboler eller spesielle tegn til å representere ukjente størrelser. Et eksempel: ”Produktet av to tall er uavhengig av rekkefølgen man betrakter dem i.” Eller: ”Ethvert kvadrattall er summen av to etterfølgende trekanttall.” (Nikomakhos ca. 60 – 120 e.Kr.). Allerede i de første årene i grunnskolen arbeider elevene med sammenhenger mellom tall og **uttrykk på bakgrunn av sine** erfaringer. Disse sammenhengene blir uttrykt gjennom elevenes dagligspråk, de arbeider altså med retorisk algebra.

Det neste stadiet har fått navnet *synkopert algebra* og har sitt utspring hos Diofantos, som levde omkring år 250. Han introduserte forkortelser for ”ukjente” størrelser. Denne typen symboler var i bruk fram til slutten av 1500-tallet. Våre elever lærer tidlig at summen av to oddetall blir et partall, og kan gjerne skrive det som: $o+o=p$.

Det siste stadiet, *symbolsk algebra*, ble innført av Viète (1540 – 1603), som brukte bokstaver til å representere gitte, ukjente størrelser. Først på dette stadiet ble det mulig å angi ukjente og variable størrelser og å uttrykke generelle løsninger. Bruk av algebra som et redskap til å bevise tallmessige sammenhenger ble da mulig. Imidlertid introduserer dette avanserte symbolspråket problemer. Hva er forskjellen mellom $5+3=3+5$ og $a+b=b+a$? Den første likheten er et faktum, mens den andre er et mønster som er gyldig i et mangfold av situasjoner. Et annet viktig punkt i denne utviklingen var ”oppfinnelsen” av likhetstegnet. I kapittel 1.5 kommer vi tilbake til ulike betydninger av likhetstegnet i matematikk.

Det er også viktig å peke på at geometrien spilte en viktig rolle på alle disse stadiene, ved at geometriske betraktninger ble brukt til støtte for resonneringen. Vi kaller ofte denne måten å arbeide med ukjente størrelser og variabler på for *geometrisk algebra*. Fra oldtiden kjenner man til mange eksempler på hvordan vi kan bruke geometri til å illustrere eller begrunne bestemte sammenhenger. Et eksempel som fortsatt er i bruk i undervisningen, kan være hvordan vi utleder sammenhengen $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.



Figur 2: Geometrisk framstilling av tredje kvadratsetning (konjugatsetning)

1.4 Algebra og aritmetikk

Vygotskij uttrykker **sammenhengen** mellom algebra og aritmetikk slik: ”Written language is to oral language what algebra is to arithmetic.” Som de historiske glimtene viser, kan algebraisk tenkning gjerne eksistere uavhengig av et symbolsystem. Sitatet fra LK06 ovenfor peker på den nære forbindelsen mellom aritmetikk og algebra og på at elevenes erfaringer med det nye emnet må knyttes til de kunnskapene som de har utviklet i aritmetikken. Kunnskapene som elevene har fått om egenskaper ved tallene og om regneoperasjonene, skal i det nye emnet generaliseres til kunnskaper i algebra. *For at elevene skal kunne foreta slike generaliseringer, må de ha solide kunnskaper om egenskapene til både tall og regneoperasjoner. De må være fortrolige med å bruke store tall, brøker og desimaltall slik at de kan gjenkjenne en generell sammenheng eller se at en regel gjelder*. Elevenes oppdagelser av mønster og system kan da brukes til å uttrykke generelle sammenhenger. For at en slik overgang skal kunne skje, må altså elevene både ha et solid tallbegrep og beherske ferdigheter i tallbehandling.

Selv om elevene har utviklet solide kunnskaper om tall og regneoperasjonene, vil de møte nye utfordringer i algebra. Ett nytt aspekt er altså ideen om generalisering, algebra som *generalisert tallregning*. Et uttrykk med bokstaver har for mange elever bare mening ved at de tenker seg bestemte tallverdier for bokstavene. De gjør også ofte feil fordi de tror at en bestemt bokstav må stå for en bestemt tallverdi. Slik kan det å tenke på bokstaver som tallverdier både hjelpe og hindre elevene i å lære algebra. Elevenes forestillinger knyttet til bokstavsymboler vil bli grundig diskutert de læringsstøttende oppgavene.

Notasjonene og konvensjonene er også noe ulike i algebra og aritmetikk. I tallet 57 refereres det til posisjonssystemet med en ”usynlig” + mellom verdiene til de to symbolene (50 + 7), mens 5*a* ikke er bygd opp etter posisjonssystemet på samme måte – her skal verdien av *a* multipliseres med 5. Også fokus er ofte ulikt. I tallregning er en sterkt opptatt av svaret. Man ser ikke på prosedyren for utregning som interessant i seg selv. Dette kan skape problemer i algebra, der vi ofte avslutter med et uttrykk som inneholder en regneoperasjon, for eksempel *a* + 7. Elevene er ofte utilfredse med slike ”åpne” svar fordi de inneholder en regneoperasjon.

Et annet avvik fra aritmetikken finner vi når vi skal bruke ligninger til å symbolisere relasjoner mellom størrelser i et problem som er gitt i vanlig tekst. I aritmetikk fokuseres det på de regneoperasjoner som kan brukes til å løse oppgaver. I algebra må vi i større grad heller arbeide med å representere problemsituasjonen enn å komme *fram til et tallsvar. Et eksempel: Når vi adderer 4 til tre ganger et helt tall, så får vi svaret 40. Finn tallet*. Når vi løser dette ved hjelp av aritmetikk, kan vi for eksempel subtrahere 4 fra 40 og deretter dividere svaret på 3. I algebra vil vi forsøke å representere en slik problemstilling ved en ligning: $3x+4=40$. I algebra tenker vi altså ”i motsatt retning” sammenlignet med hva vi gjør i aritmetikk.

Når elevene skal utvide de ferdighetene de behersker i tallregning, til å mestre algebra, trenger de å kunne:

- Snakke om tall uten å regne. Tallene kan ha store eller små verdier, være kjente tall eller tall som er kommet som et resultat av en måling. Et bestemt tall kan være ukjent av alle. Vi kan ha tall som kan endre seg, eller tall som er faste etc.
- Gjøre rede for eller beskrive utregninger. Slike beskrivelser har som mål å gi oppskrifter som kan beskrives med ord. Målet er å gå fra slike beskrivelser til forkortninger og formler.
- Forandre på måten som tall og størrelser er beregnet på. Ved bruk av regnereglene for tallregning får vi nye muligheter til å foreta utregninger idet samme problemet. Elevene skal bli oppmerksomme på at de kan erstatte én beregning med en annen, eller én prosedyre med en annen, og vite at de vil få det samme resultatet. I algebra kaller vi dette omforminger.

I del 2 av denne veiledningen presenteres ideer til aktiviteter som kan hjelpe elevene med denne overgangen.

1.5 Forståelse og bruk av likhetstegnet

Språket som brukes i tallregningen, fokuserer på svaret. I tallregning får elevene oppgaver som $8+7=$, likhetstegnet står da for ”blir lik”. Tegnet er altså et signal om at noe skal utføres. Slik fungerer det også på kalkulatoren, tegnet er et signal om at noe skal regnes ut. Tegnet får på den måten også det vi kan kalle en ”venstre- til høyreeffekt”. Elevene møter også oppgaver av denne typen: *Eva hadde 75 kroner. Hun fikk 50 kroner av far. Hun kjøpte en CD til 98 kroner. Hvor mye hadde hun igjen?* Mange elever vil her skrive utregningen sin som $75+50=125-98=27$. Også her tolker elevene likhetstegnet på samme måte som kalkulatoren. Men i tallregning ligger det også et element av *likeverdighet* knyttet til likhetstegnet. $8+7$ er *likeverdig* med 15. Tallene eller uttrykkene på hver side av et likhetstegn skal ha samme *verdi*. Det er på denne måten vi bruker tegnet i algebra. I arbeidet med oppgaver i algebra får elevene ofte åpne svar, for eksempel *a* + 7. Skal et slikt svar gi mening, må elevene være fortrolige med oppfatningen av likverdighet, ellers vil likheter som $7x+11=13x-19$ vanskelig kunne få et meningsinnhold. Vi mener således at det er viktig at læreren tidlig retter søkelyset mot denne betydningen.

1.6 Variabelbegrepet

Variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er oppfatningen om at noe varierer – i motsetning til det å være konstant. Dette aspektet er velkjent for de fleste elever når variabelbegrepet introduseres i skolen, selv om de ikke kjenner ordene variabel og konstant. De har erfart at en melkesjokolade koster 12 kroner, og at det de må betale, *varierer* med hvor mange sjokolader de kjøper.

Det andre aspektet er måten vi bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk. I en rekke talluttrykk kan en størrelse endre seg, mens andre forblir konstante. I denne situasjonen erstatter matematikeren den variable størrelsen med et symbol, gjerne en bokstav, og kan således samle alle talluttrykkene i ett eneste uttrykk som inneholder en bokstav, den variable størrelsen. For eksempel kan $2 \cdot 1+1, 2 \cdot 2+1, 2 \cdot 3+1, 2 \cdot 4+1 \ldots$ erstattes med $2x+1$. Vi må formode at elevene ikke har gjort erfaringer med dette aspektet når de begynner å arbeide med algebra i skolen.

1.7 Annen bruk av bokstaver i matematikk

Matematikk er et eget "språk", med egne regler for lesing og tolkning. Dette kommer klart fram i forbindelse med bruk av *bokstaver* til å representere tall og andre størrelser i faget.

Fra regning med tall kjenner elevene til at 12 *m* kan stå for 12 meter, eller om vi vil, 12 ganger så langt som 1 meter. I algebra kan *m*-en i 12 *m* ha en dobbel betydning. Betydningen avhenger av konteksten, *m* kan stå for 1 meter, altså en benevning. I andre sammenhenger kan *m* stå for et ukjent antall meter, et *variabelnavn*. I andre kontekster kan 12 *m* for eksempel stå for en forkortet skrivemåte for 12 meloner. I det siste tilfellet står *m* som en referent til en bestemt type objekter. Det er ikke alltid enkelt å oversette mellom et dagligspråk og det algebraiske språket, og det skaper problemer for en del elever. For eksempel kan vi se i såkalte regnefortellinger at når elevene blir bedt om å skrive en regnefortelling til $3a+2a=5a$, kan de skrive en fortelling, referert til et objekt, der 3 aper og 2 aper blir 5 aper til sammen. Slike ideer forsterkes dersom vi i undervisningen forsøker å "konkretisere" innholdet i for eksempel sammentrekningsregler ved å vise til appelsiner og bananer i uttrykk som inneholder *a*-er og *b*-er.

I tillegg til det som det er pekt på ovenfor, kan vi kort nevne andre typer bruk av bokstaver i matematikken.

Funksjonssammenhenger
Disse er ofte gitt på en algebraisk form, for eksempel vil alle rette linjer kunne skrives på formen $y = ax + b$. Her brukes bokstavene på tre måter:

- *a* og *b* er det man kaller *parametere*. De står for vilkårlige, men faste tall fra gang til gang. Setter vi inn ulike verdier for *a* og *b*, får vi forskjellige linjer.
- Både *x* og *y* er variable, men de har ulik mening i dette uttrykket. For den *uavhengige* variabelen *x*, kan vi sette inn vilkårlige tall og dermed regne ut de tilsvarende verdiene til den *avhengige* variabelen *y*.

Ligninger
I arbeidet med ligninger spiller bokstavene en fjerde rolle. Her er de ikke lenger variabler, men ukjente tall som vi skal finne verdien til. I ligninger med to ukjente skiller vi ikke mellom de ukjente *x* og *y*.

Ulikheter

I uttrykket $2x+1\leq 7$ vil verdiene til x kunne stå for uendelig mange tall.

I geometri har vi også en tilsvarende situasjon. Trekanten ABC kan for eksempel, i noen tilfeller, referere til en bestemt trekant, med hjørner i bestemte fastlagte punkter, mens vi i andre sammenhenger kan tenke på trekanten ABC som en *vilkårlig* trekant. Det er mange konvensjoner å holde styr på!

1.8 Elevers oppfatninger av bokstaver i matematikk

Elevene bygger sine oppfatninger om algebra på erfaringer fra tallregningen. De begrepene de har om tall og tallregning, må så utvides til også å omfatte algebraiske begreper. I første rekke gjelder dette variabelbegrepet, bruk av bokstaver som generaliserte tall og en utvidet forståelse av likhetstegnet. Når begreper utvides, oppstår det ofte misoppfatninger knyttet til disse begrepene, først og fremst fordi elever ”overgeneraliserer” begrepet. vi berører her et sentralt problem i matematikk-undervisningen: *å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke gjelder i alle nye situasjoner*. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at vi har gjort erfaringer på et avgrenset felt, vi kaller ufullstendige tanker om et begrep for misoppfatninger.

Det er gjort en rekke studier av hvilke oppfatninger elever har av bokstaver i matematikken. Küchemann (1981) fant seks ulike måter som elevene tolket eller brukte de bokstavene på som inngikk i oppgavene. Elevene var fjortenåringer. Blant kartleggingsoppgavene er det en rekke spørsmål av samme type som Küchemann brukte. Hans seks kategorier er:

Å finne verdien til en bokstav

Dette er en av tre kategorier der elevene ikke trenger å gjøre noen utregninger som involverer en spesifikk ukjent størrelse. De trenger her bare å finne verdien til bokstaven direkte fra det gitte uttrykket. To eksempler kan være: *Hva kan du si om a hvis a+ 5 = 8?* og *Hva kan du si om u hvis u = v + 3 og v = 1?*

Bokstaver som ikke trengs brukes

To eksempler på oppgaver innenfor denne kategorien er: *Hvis a + b = 43, så er a + b = ….*og *Hvis e + f = 8, så er e + f + g = …* Den siste oppgaven er vanskeligst, trolig først og fremst fordi ”svaret” er 8 + *g* og ikke er et bestemt tall.

Bokstaver brukt som objekt

Det er en vanlig misoppfatning at bokstaver i matematikken er forkortelser for objekter, for eksempel *a* for appelsiner og *b* for bananer. Som vi har pekt på ovenfor, blir bokstaver også brukt på denne måten i faget. I tillegg til denne typen kan en peke på to andre typer knyttet til oppgaven: *Skriv en matematikkfortelling som passer til uttrykket 3a + 2a = 5a*.

1. Bokstaven står for et ***konkret objekt*** (eller symbol for en enhet): *”Tre jenter ville starte en klubb. Så fant de ut at det var lite med bare tre jenter, så derfor spurte de to jenter til, sånn at de ble fem jenter.”*
2. 3*a* og 2*a* står for et ***objekt i seg selv***: *”Lise har 3a og Knut har 2a, hvor mange har de da til sammen?”*

De tre kategoriene ovenfor beskriver alle måter å unngå generalisert aritmetikk på, ved ikke å bruke bokstaver som ukjente tallstørrelser. Dette gjelder ikke for neste kategori, selv om ideen med en spesifikk ukjent fortsatt er en primitiv oppfatning av hva bokstaver står for i algebra.

Bokstav som en spesifikk ukjent størrelse
Elevene kan betrakte bokstaven som et spesifikt ukjent tall og utføre regneoperasjoner på dette. Når vi oppfatter *g* som et spesifikt ukjent tall i oppgaven ovenfor, vil dette uttrykket ha en mening. Svaret vil være 8 pluss den spesifikke verdien til *g*.

Bokstav som et generelt tall
I motsetning til når vi bruker en bokstav til å representere en spesifikk, men ukjent størrelse, så handler det her om å bruke den bokstaven til å representere et generelt tall. Bokstaven kan stå for flere *ulike* verdier, i mange tilfeller uendelig mange verdier. For eksempel: *Hva kan du si om c hvis c + d = 10 og c er mindre enn d?*

Bokstav som en variabel
Variabler er et redskap til å uttrykke generaliseringer matematisk. Hvis elevene har arbeidet med å uttrykke slike generaliseringer med ord før de blir bedt om å formalisere dem ved bruk av symboler, vil læreren trolig hjelpe elevene til å få forståelse av dette begrepet. Et eksempel på en oppgave som undersøker om en elev behersker dette, kan være: *Hva er størst av 2n og n + 2? Forklar hvordan du tenker.*

Denne korte gjennomgangen av noen fundamentale ideer om en begynnende symbolisering i algebra viser at variabelbegrepet og bruken av bokstaver til å representere ulike aspekter ved dette begrepet er forskjellige. Vi legger ulike betydninger i bokstaver og bokstavuttrykk i ulike sammenhenger. De variablene som bokstavene representerer, har to spesielt nyttige anvendelser:

- De gjør det enkelt å formulere matematiske sammenhenger
- Løsningen til et problem kan uttrykkes ved variable størrelser slik at resultatet gjelder for mange enkelttilfeller uten at vi trenger nye utregninger. Vi kan ganske enkelt sette inn forskjellige verdier for variablene.

En fyldigere behandling av punktene vi har pekt på, finnes i Breiteig & Venheim (1998).

Kapittel 2 Innledning til algebra

Kapittel 2 handler om ideer som elever har angående den innledende delen av algebra i grunnskolen. Når elevene begynner å arbeide med algebra knyttet til symboler, er de kommet til en utvidelse av begrepene som de har dannet i aritmetikken. De skal utvide disse kunnskapene og ferdighetene, samtidig som de blir stilt overfor en økende grad av symbolisering. I dette kapitlet vil vi ta for oss kartleggings de læringsstøttende oppgavene som retter seg mot denne innledningsfasen til algebra som et nytt emneområde i matematikken.

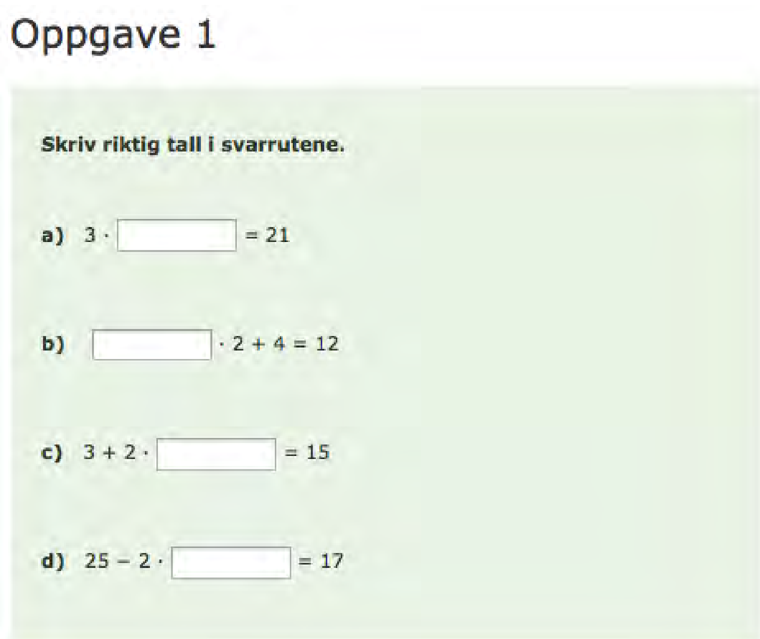
Som pekt på i kapittel 1 kan en del av elevenes problemer i algebra spores tilbake til *usikkerhet i tallregning*. Det er derfor viktig at elevene får arbeide grundig med oppgaver som styrker deres aritmetiske og ferdigheter, samtidig som sentrale begreper i algebra blir introdusert. Målet er å gi elevene et grunnlag for å regne med symboler. For eksempel har undersøkelser vist at om elevene bare får oppgaver av typen $3 + \_\_\_\_ = 7$, $6 - 4 = \_\_\_\_$ og $\_\_\_\_ + 5 = 11$, opplever de vanskeligheter når oppgaver av $8 = \_\_\_\_ + 3$, $\_\_\_\_ = 5 + 9$ og $31 = \_\_\_\_ - 17$ skal løses, fordi det i de siste oppgavene ikke står et "svar" til høyre for likhetstegnet.

Det er understreket i kapittel 1 er det også er viktig å arbeide grundig med likhets-tegnets betydning i denne fasen. Hvis elevene har sviktende erfaringer på disse områdene, vil det skape ekstra vansker når de begynner å bruke bokstaver som symboler i matematikk. Slike aktiviteter sammen med arbeid rettet mot en begynnende generalisering er viktige for å forberede elevene på sentrale algebraiske ideer. Dette blir av noen kalt *prealgebra*.

2.1 Prioritet mellom regneoperasjoner

I algebra vil elevene fort erfare at det er viktig å sette parentesen, i uttrykk som $5+3(x+2)$ gir parentesen signal om at vi skal multiplisere $x+2$ med 3 og legge dette til 5. Vi skal ikke først addere 5 og 3 for så å multiplisere 8 med $(x+2)$. Denne konvensjonen, som henger sammen med at multiplikasjon er gjentatt addisjon av like store addender, gjelder også for regning med tall: $5+3\cdot 2$ er lik 11 (legger sammen 5 og 6) og ikke 16 (multipliserer 8 med 2). VI sier at multiplikasjon er prioritert foran addisjon i sammensatte uttrykk. I moderne kalkulatorer er slike konvensjoner innebygd.

Konvensjonene om prioritering mellom regningsartene er viktige i aritmetikk, men det er ikke sikkert at alle elever har gjort bevisste erfaringer med dette, dersom det er lagt relativ liten vekt på dette i lærebøkene. Dette er et eksempel på hvordan sviktende aritmetiske kunnskaper kan skape ekstra problemer i algebra, fordi det i algebra blir mye vanskeligere å oppdage grunnen til at eleven har gjort en slik feil enn i regning med bare tall.


Oppgave 1

Skriv riktig tall i svarrutene.

a) $3 \cdot \square = 21$

b) $\square \cdot 2 + 4 = 12$

c) $3 + 2 \cdot \square = 15$

d) $25 - 2 \cdot \square = 17$

Oppgaveeksempel 1: Oppgave 1 Algebra 8 – 10. Prioritering av regneoperasjoner

Hovedformålet med oppgave 1 ovenfor er å undersøke hvordan elevene tenker når de må bruke slike konvensjoner knyttet til multiplikasjon. I spørsmålene i denne oppgaven er det ukjente tallet i likhetene representert ved en rute. Tabell 1 nedenfor viser at å bruke en rute til å representere et bestemt ukjent tall er velkjent for de aller fleste elevene på de aktuelle årstrinnene.

Oppgave 1a Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	1	1	0
7 (Riktig svar)	97	98	98

Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave 1a Algebra 8 – 10

I oppgave 1b får en del elever problemer med å avgjøre om addisjon skal utføres før multiplikasjon eller omvendt. Her er feilsvaret ”2” av spesiell interesse. Det er bemerkelsesverdig hvor mange elever som gir dette svaret på 8. årstrinn og 10. årstrinn. Mange elever utfører trolig først addisjonen 2 + 4 = 6. Deretter multipliserer de svaret 6 med 2 for å få svaret 12. Denne oppgaven er laget slik at den kan ”avsløre” de elever som ikke kjenner til denne konvensjonen i regning med tall. Oppgaven er derfor en god oppgave i så henseende, en oppgave som gir rik informasjon om elevenes tenkning. Vi kunne ha erstattet den tomme ruten med en bokstav slik at oppgaven hadde lignet mer på en algebraoppgave, $a \cdot 2 + 4 = 12$, men da er det ikke sikkert at vi kunne ha trukket den samme konklusjonen om prioritering på grunn av et mer ukjent format på oppgaven.

Feilsvarene 6 og 8 kan komme av misforståelser av symboliseringen i oppgaven, for eksempel at 2 + 4 = 6 og dette ”svaret” skal skrives i ruten, eller ”å multiplisere2 med 4 gir svaret 8” og svaret 8 skal stå i den tomme ruten.

Oppgave 1b Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	4	2	1
4 **(Riktig svar)**	61	77	88
2	22	16	9
3	4	2	-----
6	5	2	-----
8	3	2	1

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Oppgave 1b Algebra 8 – 10

Kieran (1984) har i et undervisningsforsøk studert overgangen fra ”denne tomme ruten” til å sette inn bokstaver for den. I sine undersøkelser startet hun med en aritmetisk likhet, for eksempel $7 \cdot 2 - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Så skjulte hun et av tallene først med en finger og deretter med en rute, slik: $7 \cdot \_\_\_\_ - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Til slutt erstattet hun den tomme ruten med en bokstav, slik: $7 \cdot a - 3 = 5 \cdot 2 + 1$. Dette ble da en aritmetisk likhet med et skjult tall. Bokstaven som skjulte tallet, ble da en ukjent. På denne måten kunne elevenes algebra forankres i deres aritmetiske kunnskaper og ferdigheter.

Hovedforskjellen mellom oppgave 1a og 1c går på at i oppgave 1b er multiplikasjon den første operasjonen i uttrykket sett fra venstre, mens multiplikasjonen i oppgave 1c kommer ”inne i uttrykket”. Det vil si at elevene trolig i høyere grad blir ledet til å svare riktig på oppgave 1b, siden de er vant med å regne fra venstre mot høyre i oppstilte regneuttrykk.

I oppgave 1c ser vi enda klarere de problemstillingene som ble diskutert i forbindelse med tabell 2. Det er trolig den samme typen misoppfatning som ligger til grunn i oppgave 1c. Elevene utfører addisjonen 3 + 2 = 5 og deretter multiplikasjonen $5 \cdot 3 = 15$. Legg merke til at det er flere som gjør denne feilen på 8. årstrinn enn på 6. årstrinn. Vi ser også at problemet vedvarer siden dette feilsvaret ikke går noe særlig ned på 10. årstrinn. Dette viser at det er et stort problem at elever ikke behersker konvensjonene for prioritering mellom regningsarter, og det skaper, som det ble påpekt tidligere, enda større problemer når vi innfører variabler i algebra, siden det da er vanskeligere å oppdage at de har kommet fram til feil svar.

Oppgave 1c Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	4	4	2
6 **(Riktig svar)**	13	17	33
3	67	73	63
5	8	3	1
10	5	2	0

Tabell 3: Prosentvis fordeling. Oppgave 1c Algebra 8 – 10

Oppgavene 1b og 1c er to ”forholdsvis” like oppgaver med én type feilsvar som går igjen i begge oppgavene. Når vi sammenligner elevenes svar på disse to spørsmålene, finner vi at det bare er 12 %, 15 % og 31 % av elevene på henholdsvis 6., 8. og 10. årstrinn som svarer riktig på begge oppgavene. Hele 39 %, 55 % og 54 % av de elevene på de tre årstrinnene som har svart riktig på oppgave 1b, gir svaret ”3” på oppgave 1c. Nesten alle elevene som svarer ”2” på oppgave 1b, gir også feilsvaret ”3” på oppgave 1c, henholdsvis 95 %, 91 % og 83 % på de tre årstrinnene. Det er altså her tale om en konsekvent løsningsstrategi blant elevene. Denne strategien er ekstra hyppig i oppgave 1c, og det er rimelig å tro at det skyldes vanen med å utføre operasjonene i den rekkefølge de kommer i regneuttrykket, fra venstre mot høyre. Dette gir riktig svar på oppgave 1b, men ikke på oppgave 1c.

Det at elever ikke behersker prioriteringsreglene for regneoperasjoner, er trolig ikke et problem fordi dette er vanskelig lærestoff, men skyldes heller at det ikke har blitt satt tilstrekkelig søkelys på grunnlaget for å forstå slike konvensjoner i undervisningen. Aktivitet 4 lenger bak i denne veiledningen kan være en måte å få elevene til å vinne erfaringer med dette.

Dette er et eksempel på hvordan sviktende kunnskaper i aritmetikk kan skape ekstra problemer for elevene når de skal lære algebra. Det blir vanskeligere for elevene å ”oppdage” en slik misoppfatning, spesielt fordi et algebraisk uttrykk kan virke mer abstrakt enn et talluttrykk.

Oppgave 1d Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	59	62	35
4 (**Riktig svar**)	13	18	47
0,74 eller 0,75	0	3	5
6 eller -6	4	2	2
8	4	1	1
Andre svar	20	14	10

Tabell 4: Prosentvis fordeling. Oppgave 1d Algebra 8 – 10

Den ytre strukturen i oppgave 1c og 1d er omtrent den samme. Forskjellen er at i oppgave 1d får vi ikke et helt tall som svar dersom vi bruker den strategien som var så utbredt i oppgave 1c. Elevene ville da komme fram til uttrykket $23\cdot\_\_\_\_\_=17$, noe som trolig er en viktig grunn til at så mange elever på de to laveste årstrinnene ikke har svart på oppgave 1d. Sammenligner vi med oppgave 1c, legger vi merke til at det er omtrent like mange som gir et korrekt svar på denne oppgaven på 6. årstrinn og 8. årstrinn, mens flere på 10. årstrinn klarer oppgave 1d enn 1c. Det er dermed ikke sagt at det er de samme elevene som svarer riktig på begge oppgavene. Det var henholdsvis 24 %, 43 % og 73 % av de elevene på de tre årstrinnene som svarte riktig på oppgave 1c, som også kom fram til et riktig svar på oppgave 1d. Dette betyr at måten å svare på er mer konsistent på 10. årstrinn enn på lavere årstrinn.

Det at løsningsfrekvensen øker fra oppgave 1c til 1d (33 % til 47 %) på 10. årstrinn, kan skyldes at hvis elevene velger å utføre regneoperasjonene fra venstre mot høyre i oppgaven, vil de oppdage at svaret på oppgave 1d ikke blir et helt tall. Det kan da lede elevene til å endre strategi, de prøver på nytt og tenker kanskje at 2 må multipliseres med 4 for at svaret skal bli 17 på denne oppgaven.

Sammenligner vi elevenes svar på disse deloppgavene, finner vi at svarene er mer konsistente jo eldre elevene blir. Dette gjelder både for feilsvar og riktige svar. *Dette indikerer at misoppfatninger som elevene har, blir befestet med alderen hvis læreren ikke tar opp slike ufullstendige oppfatninger i undervisningen*.

2.2 Tallmønster

I Kunnskapsløftet LK06 står det at elevene skal

- *utforske og beskrive strukturar og forandringar i enkle geometriske mønster og talmønster* (etter 7. årstrinn)

- *bruke, med og utan digitale hjelpemiddel, tal og variablar i utforsking, eksperimentering, praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design* (etter 10. årstrinn)

Elevene skal bli kjent med tallene, med deres egenskaper og med noen mønstre som tall kan danne i ulike situasjoner. I kapittel 1 trakk vi fram arbeid som kan gjøres for å binde algebra nærmere aritmetikk gjennom å arbeide med tallmønstre. Denne typen arbeid gir elevene muligheter til å utforske, finne sammenhenger, gi begrunnelser for hvordan disse kommer fram, og til å generalisere slike sammenhenger. Oppgave 2 og oppgave 6 i Algebra 8 – 10 undersøker elevenes strategier når de arbeider med tallmønstre med utgangspunkt i geometriske figurer.

Oppgave 2

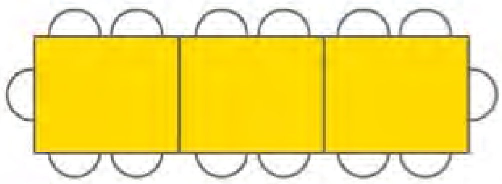
Et langt bord er satt sammen av småbord. Rundt det lange bordet er det satt stoler som vist på figuren.

a) Hvor mange stoler blir det plass til dersom vi har 4 småbord?

Svar:

b) Hvor mange stoler blir det plass til dersom vi har 25 småbord?

Svar:



Oppgaveeksempel 2: Oppgave 2 Algebra 8 – 10. Å oppdage et mønster

Hensikten med oppgavene 2a og 2b er å undersøke hvordan elever bruker mønsteret som utgangspunkt for en telle- eller regnestrategi. Antallet av småbord i oppgave 2b er valgt så stort at elevene ikke uten videre kan løse oppgaven ved hjelp av en tegning der de teller alle stolene. I den opprinnelige papirprøven, ble elevene bedt om å forklare hvordan de kom fram til svaret sitt i oppgave 2b.

Oppgave 2a Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	1	1	1
18 (Riktig svar)	67	75	81
16	2	2	2
17 eller 19	13	5	3
20	5	2	2
24	5	7	7
Andre svar	6	8	3

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Oppgave 2a Algebra 8 – 10

En del av svarene, feilregningene 17 og 19, viser at elevene på lavere årstrinn bare teller. De verken har eller velger noen strategi for å regne ut antall stoler. Svarene 20 og 24 peker på at elevene velger å regne etter strategien ”5 ved hvert” og ”6 ved hvert” bord.

Oppgave 2b Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	9	6	6
102 (**Riktig svar**)	39	48	67
100	6	5	2
110	2	4	2
125	7	3	2
150	7	9	11
Andre svar	30	25	10

Tabell 6: Prosentvis fordeling. Oppgave 2b Algebra 8 – 10

I oppgave 2b har vi valgt 25 bord for å på den måten få elevene til å bruke en strategi for å bestemme antall stoler. Vi kan i svarheftene se at elevene i 6. årstrinn ikke alltid har en strategi for dette. På dette årstrinnet fins det elever som tegner alle de 25 bordene og deretter teller alle stolene.

I oppgave 2 er det en eventuell misoppfatning av oppbygging av mønster som er interessant. Ut fra svarene kan vi se at elevene prøver å komme fram til svaret ut fra tre ulike strategier:

- fra ”fire ved hvert bord” (svar 100),
- "fem ved hvert bord" (svar 125) og
- ”seks ved hvert bord” (svar 150).

En mulig anledning til dette er at oppgaveteksten kan tolkes på to forskjellige måter:

- slik at det er 25 *separate* småbord, og da kan det være 6 stoler ved/til hvert bord
- som om det stod – “hvor mange stoler er det plass til om vi lager et *langt bord* av 25 småbord?”

7 % av elevene i både 8. og 10. årstrinn svarte ”24” i oppgave 2a. Av disse elevene var det henholdsvis 79 % respektive 81 % som svarte ”150” i 2b. Dette tyder på at disse elevene bruker den samme strategien når de løser oppgave 2a og 2b. Ved å sammenligne svarene for hver enkelt elev, ser vi også at elevene får problemer når tallene får så store verdier at elevene ikke lenger kan telle seg fram til svaret. De er nødt til å ha en metode for å komme fram til svaret.

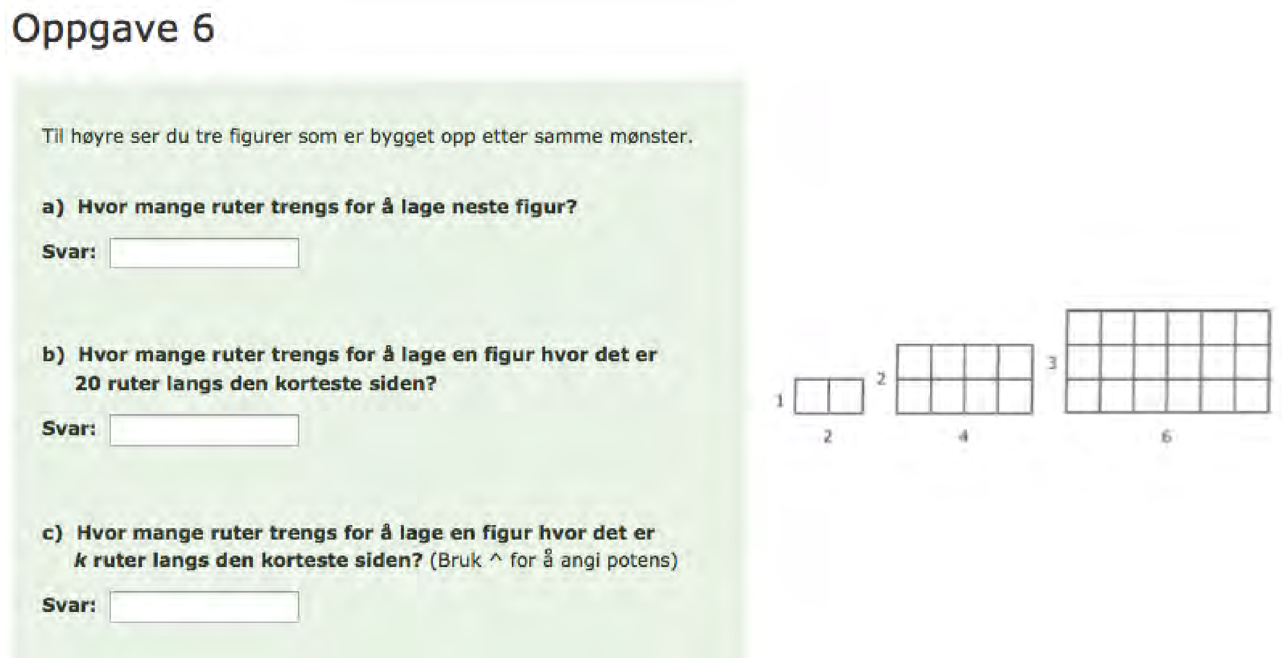
Oppgave 2b Algebra 8 – 10 Forklaring	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	14	10	10
Riktig forklaring	28	40	57
”Tegnet og regnet”	9	4	1
23×4 + 10	2	3	8
Andre riktige forklaringer (også med galt svar)	3	3	3
Forklaringer til 25×4, 100 e.l.	6	4	1
Forklaringer til 25×5, 125 e.l.	7	5	2
Forklaringer til 25×6, 150 e.l.	7	10	11
Forklaring til 110	1	3	1
Andre svar	23	19	7

Tabell 7: Prosentvis fordeling. Forklaring til oppgave 2b Algebra 8 – 10

Vi legger merke til at de elevene som teller og regner, kommer fra de laveste årstrinnene. Vi ser også at det er en stor variasjon i forklaringsmåtene. Dette indikerer at det ikke er lett for elevene å sette ord på systemet i et tallmønster. I kapittel 1 har vi pekt på at tallmønstre kan brukes for å skape forbindelse mellom tallregning og algebra. I den forbindelse er det avgjørende å kunne sette ord på de mønstre vi oppdager, og å knytte dette til aritmetiske uttrykk. Svarene på denne oppgaven tyder på at dette må vektlegges i undervisningen. I del 2 vil vi presentere eksempler på aktiviteter som retter seg mot nettopp dette.

2.3 Mønstre, symboler og generaliseringer

I kapittel 1 pekte vi på problemer elevene møter når de skal begynne å bruke bokstaver eller andre symboler til å representere størrelser som varierer. Oppgave 6 Algebra 8 – 10 er laget for å studere hvilke problemer elevene møter når de blir bedt om å generalisere med utgangspunkt i et tallmønster som de har arbeidet med.


Oppgave 6

Til høyre ser du tre figurer som er bygget opp etter samme mønster.

a) Hvor mange ruter trengs for å lage neste figur?

Svar:

b) Hvor mange ruter trengs for å lage en figur hvor det er 20 ruter langs den korteste siden?

Svar:

c) Hvor mange ruter trengs for å lage en figur hvor det er *k* ruter langs den korteste siden? (Bruk ^ for å angi potens)

Svar:

Oppgaveeksempel 3: Oppgave 6 Algebra 8 – 10. Hvor mange ruter trengs det for å lage figuren?

Oppgave 6 ligner oppgave 2 i de første delspørsmålene. Elevene skal utvide et geometrisk mønster, telle eller regne antall ruter og lete etter et tallmønster. Den viktigste faglige forskjellen mellom de to oppgavene er et vi i oppgave 6c undersøker i hvilken grad elevene klarer å generalisere til et vilkårlig tall *k* fra mønsteret og hvordan de uttrykker denne generaliseringen.

Oppgave 6a Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	11	6	4
32 (Riktig svar)	36	52	70
8 og 4, 4 på korte og 8 på lange, e.l.	8	8	8
24	8	6	3
28	5	3	1
Andre svar	27	19	13

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Oppgave 6a Algebra 8 – 10

Relativt mange elever svarer riktig på oppgave 6a. Av elevenes arbeider ser vi at en del elever har tegnet og talt rutene i neste figur. De har ikke brukt multiplikasjon.

Noen elever gir korrekt antall ruter langs de to sidene i neste rektangel (8 og 4 eller 4 på korte og 8 på lange, og lignende). De har således oppdaget det geometriske mønsteret, men kobler ikke dette til spørsmålet i oppgaven.

Svaret 28 kan muligens komme av at de tror at antallet nye ruter øker med 10 hver gang siden det økte fra 8 til 18, mens svaret 24 kan være usikkerhet i multiplikasjonstabellen.

Oppgave 6b Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	35	22	14
800 (Riktig svar)	18	33	59
20	4	4	2
40	7	7	4
80	5	5	2
120	3	1	1
200	4	4	3
Andre svar	26	24	16

Tabell 9: Prosentvis fordeling. Oppgave 6b Algebra 8 – 10

Elevene har basert seg på regning eller mønstre i tallene, og ikke telling. De andre svarene som går igjen, kan karakteriseres som ulike misforståelser av oppgaveteksten. Vi får svaret 200 hvis vi tenker seg 20 ruter langs langsiden og bruker mønsteret i figuren, mens svaret 20 trolig er antall ruter langs kortsiden og 40 er antall ruter langs langsiden i den figuren en spør etter. Når vi sammenligner hver enkelt elevs svar på oppgave 2b og 6b finner vi at blant de elevene som svarte riktig på oppgave 2b, var det henholdsvis 55 %, 59 % og 75 % som også ga et riktig svar på oppgave 6b. Dette viser at flertallet av disse elevene har klart å videreføre systemet, representert ved en figur til en mer kompleks situasjon der de ikke kan basere seg på telling. De har oppdaget en sammenheng mellom tallene.

I oppgave 6c, som bare ble gitt til elever på 8. årstrinn og 10. årstrinn, fører vi denne sammenligningen et skritt videre mot en generalisering til et vilkårlig tall. Her er vi interessert i å få innblikk i hvilke problemer elevene møter med generaliseringen, og ikke minst hvilke utfordringer de møter når de skal uttrykke dette ved hjelp av en variabel.

Oppgave 6c Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	59	41
$2k^2$, $2k \cdot k, k(k+k)$ og lignende (Riktig svar)	1	20
Betrakter langsiden: $2k, k+k$, k^2, $k^2 = 2k$ o.l.	4	8
$k^2, k \cdot k$ og lignende	2	2
»Summerer de to sidene»: $3k, 2k+k, k \times 2k = 3k$ o.l.	1	4
Ukorrekt potensnotasjon: $k^3, k \cdot k^2$ og lignende	0	3
”k multiplisert med langsiden”, $k \cdot x$, $k \cdot l$, o.l.	0	5
Setter inn verdien 11 for k	3	1
k, x og lignende	7	9

Tabell 10: Prosentvis fordeling. Oppgave 6c Algebra 8 – 10

Vi ser at denne oppgaven er vanskelig for størsteparten av elevene. Det viktigste er at oppgaven, i en diagnostisk sammenheng, likevel gir oss nyttig informasjon om typisk tenkning knyttet til bruk av bokstaver som variable tallstørrelser.

Noen av svarene dreier seg trolig om antall ruter langs langsiden, for eksempel $2k$, $k + k$, og k^2 som alle er korrekt bruk av notasjoner for dette problemet. Svar av typen k^2, $k \cdot k$, $2k = k^2$ hører sannsynligvis hjemme i samme kategori som $2k$. Det er spesielt interessant at disse elevene tar i bruk potensnotasjon. Dette er typisk for de eldste elevene. Kan det være at de gjerne vil bruke noe som for dem nylig har vært tema i undervisningen? Dette er trolig et mer grunnleggende problem knyttet til matematikkundervisningen enn å ikke kunne skille mellom for eksempel $2k$ og $k2$. Det illustrerer at en del konvensjoner eller notasjoner i faget er «tomme for innhold» for mange elever.

I gjennomgangen av andre oppgaver vil vi se at det ikke er uvanlig at elevene tildeler en variabel størrelse en verdi ut fra dens plass i alfabetet. Således gis *a* verdi 1, *b* settes lik 2, og *k*, som i dette tilfellet, gis verdien 11. En del elever tildeler også variabler verdien 1, gjerne ut fra denne tankegangen: "Når en bokstav kan stå for hvilken som helst verdi, så hvorfor ikke for 1."

I kapittel 1 pekte vi på hvordan arbeid med tallmønster kan være et godt utgangspunkt for å knytte algebra og tallregning nærmere sammen. Elevenes utforskninger danner grunnlag for at de finner sammenhenger, generaliserer dem og uttrykker sammenhengene med sitt eget språk og deretter ved bruk av variabler. Elevenes svar på oppgave 6c viser at det siste trinnet i denne prosessen ikke er enkelt for elevene. Vanskene er nok knyttet både til ideen om å bruke en bokstav til å representere et vilkårlig tall og til hvilke notasjoner en bruker. Bruken av disse notasjonene har elevene liten erfaring med utenfor skolen. I del 2 i denne veiledningen gir vi noen eksempler på undervisningsaktiviteter som kan være med og bygge opp en slik erfaring.

Oppgave 6c Algebra 8 – 10 Forklaring	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	66	57
Riktig forklaring	2	13
Riktig forklaring. Feilaktig regneoperasjon	1	2
Riktig forklaring ut fra tall (Eks $11 \cdot 22$)	1	2
Manglende eller ufullstendig forklaring	3	3
Forklarer hvordan man finner den lengste siden	4	16
Andre svar	21	7

Tabell 11: Prosentvis fordeling. Forklaring på oppgave 6c Algebra 8 – 10

Legg merke til at det er svært mange elever som ikke har besvart dette spørsmålet. Dette kan ha sin grunn i at de er usikre på bruken bokstaven k i denne forbindelsen. Resultatene på denne oppgaven viser at læreren må vektlegge å uttrykke slike forklaringer med bruk av dagligtale før hun/han går over til å bruke et kompakt algebraisk språk. I del 2 av denne veiledningen vil vi gi eksempler på undervisnings-aktiviteter som sikter mot dette.

Kapittel 3 Symboler og symbolbruk

I kapittel presenterte vi kort forskjellige måter vi bruker bokstaver på i matematikk. I dette kapitlet vil vi diskutere en rekke oppfatninger knyttet til temaene som de ulike oppgavene i kartleggingsprøven kan gi oss informasjon om.

3.1 Sammenhenger der verdiene til de variable størrelsene er uvesentlige

Vi kan løse oppgave 4a nedenfor uten å vite hvilken verdi de to bokstavene representerer. Oppgaven kan løses hvis elevenes oppmerksomhet er rettet mot at svaret må bli 2 større enn 43.

Oppgave 4

a) Hvis $a + b = 43$, så blir $a + b + 2 =$

b) Hvis $e + f = 8$, så blir $e + f + g =$

Oppgaveeksempel 4: Oppgave 4 Algebra 8 – 10. Svar uavhengig av verdiene til de variable størrelsene

Løsningsfrekvensen er høy. Storparten av elevene oppfatter altså $a + b$ som et tall. Dette samsvarer bra med en stor engelsk undersøkelse (Küchemann 1981) av tretten - og fjortenåringer, der henholdsvis 92 % og 97 % fikk riktig svar på denne oppgaven. Det er likevel interessant å dvele litt ved noen av feilsvarene på denne oppgaven, siden vi finner disse typene feil igjen i andre oppgaver som vi vil diskutere senere.

Oppgave 4a Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	10	10	6
45 (**Riktig svar**)	84	84	90
2*ab*, *ab*2 eller lignende (Legger inntil hverandre)	1	0	1
4	1	1	0
86	0	1	1
Andre tallsvar enn 4 og 86	3	3	2

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave 4a Algebra 8 – 10

I flere undersøkelser av elevers forståelse av bruk av bokstaver til å representere ukjent eller variable viser det seg at når det er tale om addisjon, legger elevene symbolene og i noen tilfeller også tallene, ”inntil” hverandre. De bruker på en måte addisjon i betydningen ”legge sammen” eller å samle. Det er interessant at dette ikke skjer når bare rene tallsymbol inngår. Som vi ser, er det ikke mange som gjør dette i oppgave 4a, men tabell 12 viser at denne misoppfatningen er utbredt i oppgave 4b, og at antallet øker med alderen. En grunn til det kan være at korrekte svar her må inneholde *g*. Svaret 4 i oppgave 4a kan ha framkommet ved at eleven setter verdien 1 for de variable størrelsene, trolig ut fra den oppfatning at når en bokstav kan stå for hvilken som helst verdi, så kan denne verdien gjerne være 1. Svaret 86 kan eleven ha fått ved å regne ut $43 \cdot 2$.

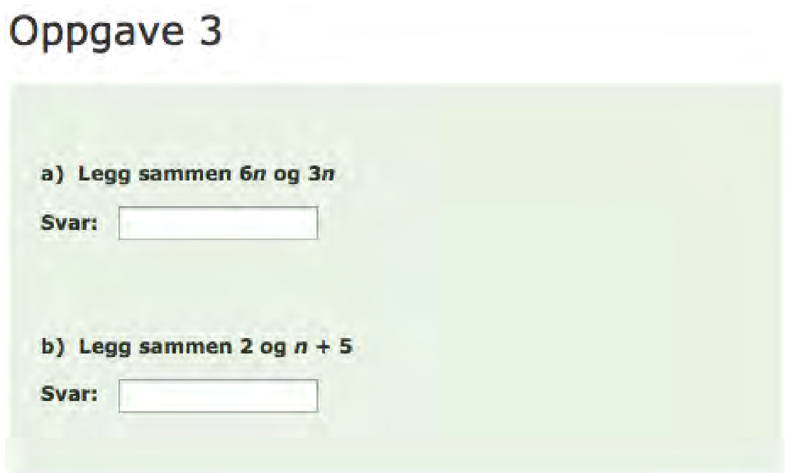
Oppgave 4b Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	27	23	13
$8+g$ eller $g+8$ **(Riktig svar)**	4	8	38
$8g$, $8\cdot g$ eller lignende. (Legger inntil hverandre)	4	11	27
9	21	16	3
10	7	7	2
12	18	16	7
15	5	3	1
16	2	3	2
Andre tallsvar	7	9	3

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave 4b Algebra 8 – 10

Denne oppgaven kan løses ved sammenligning, på samme måte som a-oppgaven, men selv om vi kan se bort fra hvilke verdier *e* og *f* kan ha, så må vi gi svaret ved å bruke *g*. Problemet for mange elever vil da være at hun/han må gi et svar som inneholder en addisjon. Dette vegrer elevene seg mot siden de ikke er vant til dette fra aritmetikken, der svaret alltid er ett bestemt tall. Noen elever løser dette ved å gi g en bestemt verdi. Av tabellen overfor ser vi at dette er en ganske vanlig reaksjon fra elevene på alle tre årstrinn, og at den forekommer mye hyppigere enn i oppgave 4a.

Svaret 9 i oppgave 4a indikerer også den oppfatningen at verdien til den ukjente størrelsen gjerne kan være 1. Legg merke til det store antallet som gir dette svaret på de to laveste årstrinnene.

Vi legger også merke til at svaret 12 forekommer ofte på alle de tre årstrinnene. Intervjuer med elever viser at elever forsøker å gi den samme tallverdi til alle variabler, i dette tilfellet 4, fordi *e* + *f* = 8, og derfor må *e* + *f* + *g* til sammen bli 12. I den engelske undersøkelsen av Küchemann (1981) var det hele 26 % som svarte slik.
En del elever synes å ha den oppfatningen at i oppgaver av denne typen gjelder det å oppdage et mønster eller en kode som skal knekkes. De er bevisste på at svaret skal være et tall. Da *g* er den sjuende bokstaven i alfabetet, gir de *g* verdien 7. Denne strategien gir feilsvaret 15.



Oppgaveeksempel 5: Oppgave 3 Algebra 8 – 10. Addisjon av algebraiske uttrykk

Det er mulig å løse oppgave 4 uten å kjenne verdiene som bokstavene kan ha. Dette er også tilfellet for oppgave 3 ovenfor. Det er to måter å unngå å forholde seg til bokstaver på i et algebraisk uttrykk. Den ene er å beholde bokstaven, men ignorere den, og den andre er ganske enkelt å kvitte seg med bokstaven. I en del tilfeller fungerer den ene eller den andre av disse strategiene som at vi kommer fram til et korrekt svar på algebraoppgaver. I oppgave 3a kan man også betrakte n som et objekt, for eksempel "nøtter". 6 nøtter og 3 nøtter blir til sammen 9 nøtter. Eller vi kan se på dette som enheter av en bestemt type, på samme måte som at m kan stå for enheten meter. Det er derfor rimelig at det er en høy løsningsfrekvens på denne oppgaven. Dette trenger ikke bety at elevene har en god forståelse av variabel-begrepet. Dette ser vi klart i oppgave 3b, der vi skal addere tallstørrelser sammen med variabler. Vi vil i kapittel 3.2 nedenfor diskutere mer utførlig den oppfatning at bokstaver i matematikken representerer objekter.

Oppgave 3a Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12	6	3
9*n* **(Riktig svar)**	72	85	84
9*nn*, 6*n*3*n* eller 6,3*n* (Legger inntil hverandre)	2	1	1
9 (Ignorerer variabel eller setter variabel = 1)	6	3	0
Potensnotasjon ($9n^2$ eller 9^n)	0	1	10
Andre tallsvar enn 9	5	2	0

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave 3a Algebra 8 – 10

Merk at 10 % av elevene på 10. årstrinn også her svarer med et potensuttrykk. Regning med potenser er lærestoff som nylig er introdusert for disse elevene. Elevene er vant til at de blir prøvd i det lærestoffet som nylig er gjennomgått. *Når lærestoffet ikke er forankret i forståelse, blir det ofte brukt ukritisk*. Vi har også pekt på dette fenomenet i diskusjonen av oppgave 6c og vil møte det igjen i flere oppgavene senere i vår diskusjon.

Oppgave 3b Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	16	14	5
n+7, 7+*n*, 7 og *n*, e.l. **(Riktig svar)**	4	9	37
2*n*+5, 2*n*5 e.l.(Legger inntil hverandre)	3	2	13
7*n*, *n*7, e.l. (Adderer tall og legger variabelen inntil)	58	50	33
7 (Ignorerer variabelen)	5	3	0
8 (Setter variabel lik 1)	2	2	0
8*n*	3	12	1
Potensnotasjon (7^4 eller $3n^4$)	0	1	1

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave 3b Algebra 8 – 10

I oppgaven 3b er 7*n* i en eller annen form det vanligste feilsvaret på alle årstrinnene, og forekommer oftere enn et korrekt svar på de to laveste årstrinnene. Det korrekte svaret, 7 + *n*, synes å være uaktuelt for flertallet av elevene. En grunn til dette kan være at mange elever er utilfredse med å gi et svar som inneholder en regneoperasjon, de er ikke vant til «åpne» svar av denne typen.

Dette fenomenet er påpekt i en rekke undersøkelser i flere land og har fått betegnelsen «lack of closure». Elevene bruker de oppgitte tallene i oppgaven, regner ut og ser bort fra den variable størrelsen i denne prosessen. Til slutt setter de inn den variable størrelsen i svaret.

En oppgave som ikke ble tatt med i den digitale versjonen av kartleggingsoppgaven, oppgave 3c, så slik ut:

Oppgave 3c Algebra 8 – 10 (ikke med)
c) Adder 4 og $3n$

Oppgaveeksempel 6: Oppgave 3c Algebra 8 – 10. Addisjon av algebraiske uttrykk

Sammenligner vi hvilket svar de elevene som svarte $7n$ på oppgave 3b, ga på oppgave 3c, finner vi at de er konsekvente. Henholdsvis 95 %, 95 % og 98 % av disse elevene på tre årstrinnene svarte også $7n$ på oppgave 3c. Dette tyder på at elevene har en konsekvent strategi som de benytter på slike oppgaver.

Svar som $2n + 5$, $2n5$ og lignende kan komme av at elevene legger den variable størrelsen inntil når det er tale om addisjon.

Oppgave 3c Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	16	11	5
$4 + 3n$, $3n + 4$, 4 og $3n$ **(Riktig svar)**	4	7	46
4, $3n$ eller 4 $3n$ (Legger inntil hverandre)	1	1	3
$7n$, $n7$, $4 + 3n = 7n$ (Adderer tall og legger variabelen inntil)	63	69	39
7 (Setter variabel lik 1, ignorerer variabelen)	6	4	-----
Potensnotasjon (7^4 eller $3n^4$)	-----	1	1

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave 3c Algebra 8 – 10. Ikke med i digital versjon

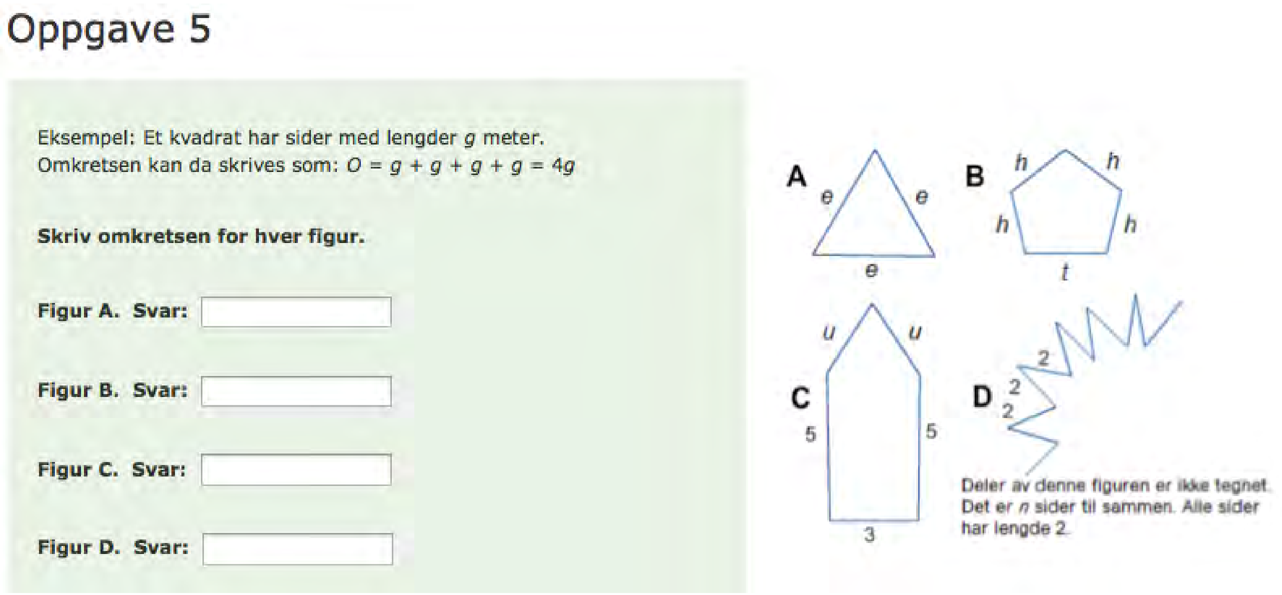
Vi legger merke til at færre elever bruker potensnotasjon i oppgavene 3b og 3c enn i oppgave 3a. Feilsvarene på oppgave 3 viser at elevenes tolkninger er et resultat av at de resonnerer intuitivt og pragmatisk når de møter ukjente tegnsystemer, i dette tilfellet ved at elevene kombinerer tall og variable størrelser. Dette kan ofte føre til at antakelser og analogier trekkes fra hvordan andre tegnsystemer benyttes, for eksempel i hverdagen, i andre deler av matematikken eller i andre skolefag. Det er vår bestemte oppfatning at elevene må bli bevisste på *meningsinnholdet* i algebraiske uttrykk dersom arbeidet med algebra skal bli en nyttig kunnskap for dem.

3.2 Bokstav som et objekt

I diskusjonen av oppgave 3 og 4 ovenfor pekte vi på at det er rimelig å tolke en del feilsvar ut fra at elevene trolig ser på bokstavene i disse oppgavene som konkrete objekter og ikke som symboler for tall. Vi pekte på at dette fører til at en rekke elever i disse addisjonsoppgavene adderer tallene og "samler" dette svaret med den variable størrelsen ved å legge denne inntil tallsvaret. Dette gjør elevene fordi de ikke ser på et uttrykk der det inngår en regneoperasjon, som et svar på en matematikkoppgave.

Når vi eksemplifiserer "bokstavregning" i matematikk, har vi tradisjonelt brukt eksempler som "3 bananer og 4 bananer blir til sammen 7 bananer" i forbindelse med uttrykk av typen $3b + 4b = 7b$. Ved et slikt eksempel bruker vi bokstaven b som et symbol for et objekt, i dette tilfellet bananer. Når vi senere møter oppgaver der vi skal forenkle uttrykk som $3a + 5b + 6a$, kan vi "samle" *a*-er og *b*-er som objekter. Vi kan dermed forklare hvordan vi har kommet fram til uttrykket $9a + 5b$. Vanskeligere blir det å bruke denne typen eksemplifisering til å skape mening i uttrykk som $3a - 5b + a$. Å si at vi har 4 appelsiner og tar bort 5 bananer fra dem, vil være meningsløst i denne konteksten. Og hvordan skal vi forklare $3a \cdot 5b = 15ab$? Det kan således diskuteres om denne "fruktsalat-introduksjonen" til algebra kan skape mer forvirring enn forståelse.

I oppgave 5 nedenfor vil elevene møte begge disse utfordringene. Bokstavene i oppgave 5 står for bestemte, men ukjente tall. Mange av elevene tolker i stedet bokstavene som navn på eller "etiketter" for sidene eller som et objekt i seg selv, og ikke som den ukjente lengden av siden. Oppgaven forutsetter at elevene har et begrep om hva som menes med omkrets. Det er mulig å løse oppgaven ved å betrakte bokstavene (eller sidene i figurene) som objekt.



Oppgaveeksempel 7: Oppgave 5 Algebra 8 – 10.

Tabell 17 nedenfor viser at de fleste elever klarer oppgave 5a (Figur A). Legg merke til hvor mange på 10. årstrinn som svarer *e* + *e* + *e*.

Oppgave 5 Algebra 8 – 10 Figur A	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	7	4	2
3*e* (Riktig svar)	75	77	81
e + *e* + *e* (Riktig svar)	1	3	10
3*g* eller 3*m*	6	6	2
3	3	1	0
Potensnotasjon (for eksempel e^3)	0	1	1
6 eller 6*m* (Måler omkrets)	4	3	0

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Algebra 8 – 10. Figur A

Svarene 3*g* og 3*m* er koblet til antall sider i trekanten. Det er mulig at elevene som har svart 3*m* tenker at måleenheten er meter. Svaret 3*g* kan komme fordi *g* er brukt i eksemplet i oppgaven. Noen få elever har svart 3. Kan det være fordi det er tre sider og de ignorerer den ukjente størrelsen? Eller er det at de setter den faste, men ukjente sidelengden, lik 1 slik vi observerte i oppgavene 3 og 4? Svar som inneholder 6 kan komme av at elevene måler omkretsen med linjal. De gir dette tallet som svar, og noen elever tilføyer en enhet, for eksempel *m*.

I oppgavene 5b (Figur B) og 5c (Figur C) møter elevene betydelig større problemer. Det er rimelig å tro at det har sin grunn i at det her er to faste, men ukjente størrelser (*h* og *t*) involvert i Figur B og en variabel, *u*, og ett eller flere tall i Figur C. Et korrekt svar må da i begge tilfeller inneholde en addisjon. Vi har tidligere pekt på at dette fører til nye typer problemer. Disse problemene er knyttet til de konvensjonene som brukes i matematikk.

Oppgave 5 Algebra 8 – 10 Figur B	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	14	8	6
4h+t eller *t+4h* **(Riktig svar)**	11	27	56
h+h+h+h+t og lignende **(Riktig svar)**	2	4	8
4*h* og *t* (Unngår addisjonstegn i svaret)	17	11	0
4*h* 1*t*, 4*h*, 1*t* eller lignende (Grupperer symbol)	17	13	1
4*h*1*t*, 4*ht*, *hhht* eller lignende (Legger inntil)	15	14	23
5 eller 5*m* (Variabel lik 1, evt. med måleenhet)	3	4	0
5*ht*, 5*g* eller 5*h* (Fem sider)	8	7	0
Tallsvar mellom 6 og 8 (Måler omkrets)	4	2	0
Potensnotasjon (f. eks h^4+t)	0	2	2

Tabell 18: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Algebra 8 – 10. Figur B

Både av tabell 17 og 18 ser vi at de aller fleste elevene har forstått hva de skal gjøre for å finne omkretsen av de to figurene, men at de har vansker med å gi svarene på en korrekt matematisk måte.

Svaret 4*h* og *t* i figur B forekommer ofte for de to laveste årstrinnene. Dette henger trolig sammen med den vegringen mot å gi et svar som inneholder en addisjon som vi har omtalt ovenfor. Denne måten å skrive svaret på kan også komme av at elevene oppfatter *h* og *t* som konkrete objekter. Av tabell 18 ser vi at det ikke er så aktuelt som på figur C. Kan det være fordi det her bare er én variabel involvert?

Disse to oppgavene (figur B og C) viser at det i hovedsak er to forskjellige måter å «samle symbolene» på når et korrekt svar må inneholde en addisjon. Den ene måten er å gruppere aktuelle tall og symbol og å skille disse gruppene fra hverandre på ulike måter. Vi finner mange slike varianter, for eksempel ved å bruke et komma som skille slik som 4*h*, 1*t* i figur B eller bare legge inn "et åpent rom" mellom de ulike gruppene som 2·*u* 2·5 1·3 i figur B. Den andre måten å samle symbolene på er å legge de aktuelle tallene og symbolene inntil hverandre, som 2*u*13 eller 2*u*2513. Vi kan muligens si at elevene i den første gruppen har kommet et skritt videre enn elevene i den andre gruppen. I begge tilfellene kan misoppfatningen om at bokstaver i matematikken representerer bestemte objekter ligge til grunn for svar av denne typen.

Merk at dette er hyppige typer av feilsvar i begge oppgavene, og at det er flere av de eldste elevene som "legger inntil" enn som grupperer symbolene. Kan dette være et tegn på at disse elevene er sikrere på å finne omkretsen, men mindre opptatt av å symbolisere dette på en korrekt matematisk måte enn de yngre elevene?

Oppgave 5 Algebra 8 – 10 Figur C	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	17	18	8

$2u+13$ eller $13+2u$ **(Riktig svar)**	6	7	30
$u+u+5+5+3$ eller $2\cdot u+2\cdot 5+3$ (Riktig svar)	4	12	26
$2u$ og 13 (Unngår addisjonstegn)	3	3	0
$2{\cdot}u$, $2{\cdot}5$, $1{\cdot}3$ eller lignende (Grupperer symbol)	27	22	6
$u13$, $2u13$, $2u2513$ e.l. (Legger inntil)	8	8	12
5, $5u$ eller $5g$ (Fem sider)	4	3	0
7 eller tallsvar mellom 6 og 8 (Måler omkrets)	4	2	1
$13u$ eller $13m$	4	2	1
$15u$ eller $15m$	8	6	1
Potensnotasjon (for eksempel $13u^2$, $u^2+5^2+3^1$)	0	2	8

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Algebra 8 – 10. Figur C

Både figur B og C har fem sider. Av tabellene 18 og 19 ovenfor ser vi at tallet 5 inngår i flere typer svar. Det er usikkert hva som kan være elevenes tanker bak disse ulike typene av uttrykk. Svaret 5 kan indikere at eleven vil uttrykke at figuren har fem sider, eller også at eleven har satt de variable størrelsene lik 1, mens $5ht$ og $5u$ kan indikere at en har tatt med de aktuelle variable og $5g$ refererer trolig tilbake til eksemplet i oppgaven. Noen elever måler trolig omkretsen med linjal, på samme måte som i figur A, og får dermed andre tallsvar.

Som pekt på tidligere, for eksempel i kommentarene til tabell 14, er det en del av de eldre elevene som gir svar som inneholder potenser av ulike typer i slike oppgaver. Vi legger merke til at det er relativt mange slike svar i oppgave 5 Figur C.

Oppgave 5d (Figur D), som bare ble gitt på 8. årstrinn og 10. årstrinn, skiller seg fra de andre oppgavene ved at ikke hele figuren er tegnet, og ved at den består av et bestemt, men ukjent antall sider, n. Dette stiller elevene overfor nye utfordringer når det gjelder i forhold til de andre spørsmålene i oppgave 5 ved at de må betrakte n som et generalisert tall og ikke som et ukjent måltall som i de foregående oppgavene. På den måten blir ikke misoppfatningen om at en bokstav står for et objekt, så aktuell for figur D som i figur B og C.

Oppgave 5 Algebra 8 – 10 Figur D	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	42	35
$2n$, $n2$ e.l. **(Riktig svar)**	9	35
16	1	1
$16n$, $16t$ eller 16,n	3	2
Ulike "former" av 32 (2×16; 2+2+...+2=32; 16,2)	9	7
$32+n$, $32+x$, $32n$ e.l.	3	2
Potensnotasjoner ($n2$, $2n$, 216, eller lignende)	2	2
Bruker 2 ganger en variabel som ikke er "n". ($2x$ e.l.)	4	2
Andre tallsvar enn 16 og 32	13	8

Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Algebra 8 – 10. Figur D

Det er en relativt stor andel av elevene som ikke svarer på dette spørsmålet, men likevel flere enn i oppgave 6c, og det er betraktelig flere som gir et riktig svar for figur D enn i oppgave 6c. Det mest interessante her er å diskutere den tenking som kan ligge bak de ulike feilsvarene.

Legg merke til at det er lite variasjon mellom de to årstrinnene på de svarkategoriene en har valgt.

Den delen av figuren som er tegnet i oppgave 5d har 16 sider. De fleste av kategoriene for feilsvar viser at elevene har tatt utgangspunkt i dette ved at tallene 16 og 32 går igjen på ulike måter i svarene. Noen få elever gir svaret 16, mens andre kobler 16 med opplysningen om at det er et ukjent antall sider i figuren og får svar som $16n$, $16k$, $16x$ eller $16{,}n$. Dette ligner på et fenomen som er pekt på tidligere, nemlig at noen elever en ignorerer den variable størrelsen i utregningen med de aktuelle tallene i en oppgave for så å sette den inn igjen i svaret de gir. Noen elever har merket seg at lengden til hver side er 2, og gir tallsvar som er ulike versjoner av 32, mens noen elever i tillegg til disse setter inn n eller en annen bokstav sammen med 32, både som addisjon og som multiplikasjon. Ingen av disse elevene har oppfattet n som et generelt antall. Vi merker oss også at det er en del elever som gir svaret som potenser.

I tillegg til de som har fått riktig svar på oppgaven er det noen elever som har tatt ett langt skritt mot en korrekt bruk av den variable størrelsen her ved at de har gitt svar som $2x$ eller $2s$.

3.3 Forenkling av uttrykk

Oppgavene 7, 8 og 9 Algebra 8 – 10 handler om å skrive et algebraisk uttrykk på en enklere eller, i noen tilfeller, på en mer kompakt form. Dette er typiske eksempler på oppgaver som har som siktemål å øve på prosedyrer i algebra, og som vi bruker relativt mye tid på i undervisningen i algebra i ungdomsskolen. Oppgavene som handler om forkorting av brøkuttrykk, forekommer kun på 10. årstrinn.

Oppgave 7

Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig.

Eksempel 1: $2a + 5a + 4b = 7a + 4b$

Eksempel 2: $x \cdot x = x$^2 (bruk ^ for å angi potens)

a) $2a + 5b + a =$

b) $a + 4 + a - 4 =$

c) $x + y - x + y =$

d) $(a + b) + (a - b) =$

Oppgaveeksempel 8: Oppgave 7 Algebra 8 – 10.

Oppgave 7a Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	2
$3a + 5b$ (Riktig svar)	86

$3a5b$, $7a^2a$	2
$2a^2 + 5b$	5
$8a$	4

Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 7a Algebra 8 – 10.

Vi ser at det er mange elever som klarer denne oppgaven, men likevel er det interessant å legge merke til at også her er det en del elever som samler symboler og tall på ulike måter. Vi merker oss også at denne samlingen av like symboler fører til at en del elever bruker potensnotasjon, som i svaret $2a^2 + 5b$.

Oppgave 7b Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	20	3
$2a$, $2a+0$, $a+a$ **(Riktig svar)**	33	79
$a4$-$a4$, $a4+a4$, $4a+4a$, $4a+a-4$, aa, $5a-3a$ (Legger inntil)	8	1
0, $0a$, a-a, 4-4 eller lignende	7	1
a, $1a$, $a+0$ eller lignende	7	1
$10a$	9	1
Potensnotasjoner, a^2, $-a^2$, $8a^2$, $a^2 + 8$ e.l.	1	7

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave 7b Algebra 8 – 10.

Det kan virke som det blir vanskeligere å løse oppgaven dersom eleven mener at bokstaven a står for et objekt. Effekten er likevel ikke så tydelig på dette årstrinnet.

Oppgave 7c Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	33	7
$2y$ **(Riktig svar)**	12	57
$xy-xy$, yy, $xxyy$ e.l. (Legger inntil)	8	3
0, $0x+0y$, $0xy$, eller lignende (Som om det var en parentes om x og y)	21	16
Potensnotasjoner, y^2, $-x^22y^2$, $2y^2$ e.l.	1	6

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave 7c Algebra 8 – 10.

Svaret 0 i en eller annen form er det hyppigst forekommende feilsvaret på begge årstrinn på denne oppgaven, og mer ”populært” enn det korrekte svaret i 8. årstrinn. Svaret 0 kommer trolig som et naturlig resultat for de elevene som oppfatter x og y som representanter for objekter, en har x og y og tar så bort x og y. Dette gir altså den samme effekten som om det sto en parentes etter minustegnet.

Svaret 0 kommer trolig som et naturlig resultat for de elever som oppfatter x og y som representanter for objekter: vi har x og y og tar så bort x og y. Dette gir altså den samme effekten som om det stod en parentes etter minustegnet. Merk også et nytt hopp i andelen av elever som ikke svarer på denne oppgaven på 8. årstrinn. Det samme skjer når vi går fra oppgave 7c til 7d. Nå får vi en stor økning også på 10. årstrinn.

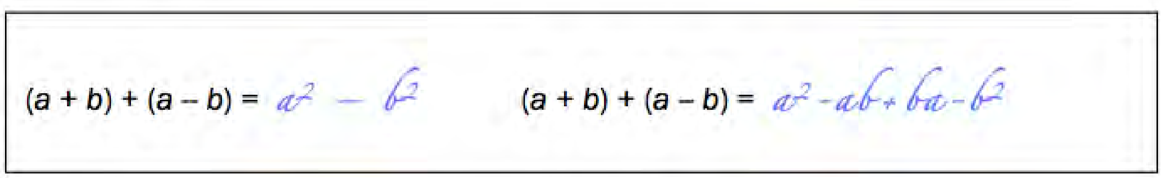
Oppgave 7d Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	45	19
$2a$, $a+a$, $2a+b$-b **(Riktig svar)**	8	40

aa− *bb, aabb, ab*+*ab* (Legger inntil)	9	3
0 eller 0*a*	12	5
Potensnotasjoner, a^2, $-a^2+b$, a^2b e.l.	1	5
Bruker tredje kvadratsetning, riktig eller galt, $a^2 - b^2$, $a^2 - ab + ba - b^2$, $a^2 + b^2$	0	15

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 7d Algebra 8 – 10.

Også på denne oppgaven er det mange elever som gir svaret 0. Det er vanskeligere å finne en en rimelig forklaring på dette svaret i denne oppgaven enn i oppgave 7c. På 8. årstrinn er det 67 % av de elevene som ga svaret 0 på oppgave 7d, som gjorde det samme på oppgave 7c. Kan det være at deres svar på oppgave 7c har påvirket det de svarer på denne oppgaven? Det er to ledd, i det ene pluss, i det andre minus, svaret blir derfor 0, som i oppgave 7c.

Vi har tidligere pekt på at elevene er vant til at de matematikkprøver de får, i første rekke handler om aktuelt lærestoff. Av svarene på oppgave 8d finner en spor av dette. Hele 15 % av elevene i 10. årstrinn bruker tredje kvadratsetning i denne oppgaven. Dette kan også være et tegn på at mange elever ser etter ”ytre” likheter i algebraiske uttrykk når disse skal forenkles. I dette tilfellet ser de to parenteser som inneholde de samme bokstavene, en med pluss og en med minus, noe som får elevene til å tenke på tredje kvadratsetning. Det er velkjent at mange elever baserer sine algebraiske prosedyrer på slike ”ytre” likhetstrekk, heller enn å se prosedyrene som en logisk konsekvens av variabelbegrepet og begrep om regneoperasjonene. Nedenfor ser vi to eksempler:



Elevsvar 1. Oppgave 7d Algebra 8 – 10

I tillegg til svar som tydelig har framkommet ved bruk av tredje kvadratsetning i oppgave 7d, har vi også tatt med andelen av elever på 10. årstrinn som gir andre svar som inneholder potenser i oppgavene 7b, 7c og 7d. Det viser seg at det i stor grad er de samme elevene som gir denne typen svar på disse deloppgavene. Svar av denne typen henger trolig sammen med at potenser også er aktuelt undervisningsstoff for denne elevgruppen.

Oppgave 8

Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig.

Eksempel 1: $2a + 5a + 4b = 7a + 4b$

Eksempel 2: $x \cdot x = x$^2 (bruk ^ for å angi potens)

a) $3a - (b + a) =$

b) $3a + a^2 + 2a =$

c) $x \cdot x \cdot x =$

d) $2y \cdot y^2 =$

Oppgaveeksempel 9: Oppgave 8 Algebra 8 – 10.

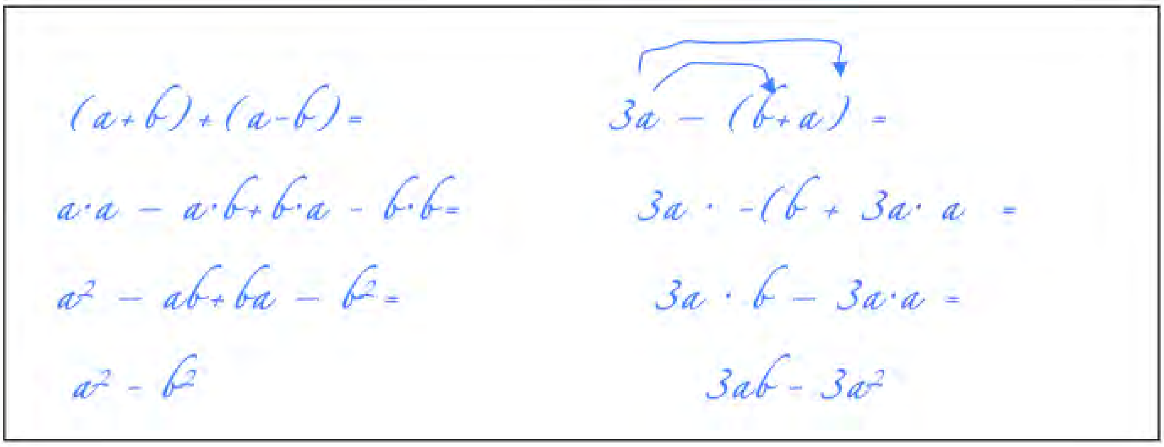
Vi har tidligere, i kapittel 2.1, diskutert konvensjoner for prioriteringer mellom ulike regneoperasjoner. Parenteser er et viktig redskap for slik prioritering. I oppgave 7d er ikke parentesen et *nødvendig signal for prioritering*. En del elevsvar i oppgave 7c tyder på at disse elevene tenker seg en parentes rundt de to siste leddene. Derimot har parentesen en nødvendig funksjon i oppgave 8a, siden denne oppgaven har et subtraksjonstegn foran parentesen. I undervisningen legges det ofte vekt på muntlige formuleringer som går på å beskrive den prosedyren vi følger ved omforminger av slike uttrykk. Vi bruker gjerne formuleringer som "Hvis tegnet foran parentesen er minus, så skal vi skifte tegn inni parentesen." På den måten legger vi mer vekt på framgangsmåten enn på forståelsen av et slikt sammensatt uttrykk, altså mer vekt på ferdigheter enn på begrepsforståelse.

Oppgave 8a Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	54	23
$2a-b$ (Riktig svar)	4	43
$3a-ba$, $3a-ab$, $3aba$, $2ab$ (Legger inntil)	6	5
$4a-b$ eller $3a-b+a$	6	7
$2a+b$	3	2
$4a+b$	3	2
$3ab - 3a^2$, $-3ab + 3a^2$, $-3ab - 3a^2$, $3ab+3a2$ (Multipliserer parentesen)	-----	9

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 8a Algebra 8 – 10.

Svarene viser at mange av elevene prøver å tolke denne oppgaven ut fra erfaringer de har med å skape mening til algebraiske uttrykk ved å betrakte de variable størrelsene som objekter. Sytti prosent av de tiendeklassingene som svarer rett på 8a gir også et korrekt svar på 7d, de fleste av disse ser altså ut til å beherske parentesreglene. Derimot er det 10 % av de som svarer rett på 8d som ignorerer parentesen i 8a og får svaret $4a - b$. Svaret $2a + b$ kan indikere at eleven skifter fortegnet til a, men ikke til b fordi denne ikke har noe fortegn.

Vi legger merke til at det, på samme måte som i oppgave 7d, er relativt mange av elevene på 10. årstrinn som multipliserer 3a med parentesen. Det er rimelig å tro at de gjør det av samme grunn som vi pekte på ovenfor: at mye av arbeidet i algebra på dette årstrinnet dreier seg om multiplikasjon, inkludert kvadratsetningene. Elevsvaret nedenfor viser hvordan en elev har regnet ut svarene på oppgavene 7d og 8a.



Elevsvar 2: Oppgave 7d Algebra 8 – 10 og oppgave 8a Algebra 8 – 10

Oppgave 8b skiller seg fra de foregående spørsmålene ved at vi skal trekke sammen ulike potenser av a. Dette spørsmålet er lettere enn de to foregående spørsmålene.

Oppgave 8b Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	49	12
a^2+ 5a, 5a + a·a eller lignende (**Riktig svar**)	11	61
5a^2eller lignende (Legger inntil)	6	7
7a, 4a + 3a eller lignende (Adderer tallene og henger på en a)	20	4
6a^2	3	6
5a^4	1	4
Andre potensnotasjoner	1	5

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 8b Algebra 8 – 10.

Det er mange elever som samler tallene og bokstavene hver for seg og legger disse inntil hverandre og får 5a^2. Andre elever adderer alle tallene i oppgaven, får svaret 7 og henger på en a til slutt. Svaret 6a^2 er et uttrykk for samme tenkemåte, med a^2 som et objekt. Svaret 5a^4 får en ved å addere tallene og a-ene hver for seg og skriver fire a-er som a^4.

De siste spørsmålene i oppgave 8 og i oppgave 9 handler om å forenkle uttrykk der det inngår multiplikasjon eller divisjon. Oppgave 8c handler om definisjonen av et potensuttrykk. Tabell 27 viser at 75 % av elevene på 10. årstrinn behersker denne notasjonen, og bare 14 % av elevene på 8. årstrinn. Det siste er ikke overraskende på grunn av plasseringen av dette lærestoffet i ungdomsskolen. På den andre siden er det interessant å observere hvilke oppfatninger elevene har av denne notasjonen, både før og etter at dette er behandlet i undervisningen. Dette er jo nettopp hensikten med å kartlegge før læreren behandler et tema i undervisningen.

Oppgave 8c Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	34	4
x^3 (**Riktig svar**)	14	75
x	5	0
3x eller x3	36	18

Tabell 27: Prosentvis fordeling. Oppgave 8c Algebra 8 – 10.

Hvis elevene oppfatter bokstavene som objekt og ikke som tall, er det lett å trekke den slutningen at det her er tre objekter, altså tre *x*-er. Det kan da for noen være naturlig å betegne dette som 3x. Det er henholdsvis 36 % og 18 % av elevene på disse to årstrinnene som gjør dette. Et annet interessant svar som kan ha bakgrunn i samme type objekttenking er svaret *x*. Eleven ser her bare en bokstav, og en måte å forenkle dette på er å vise til denne *bokstaven*.

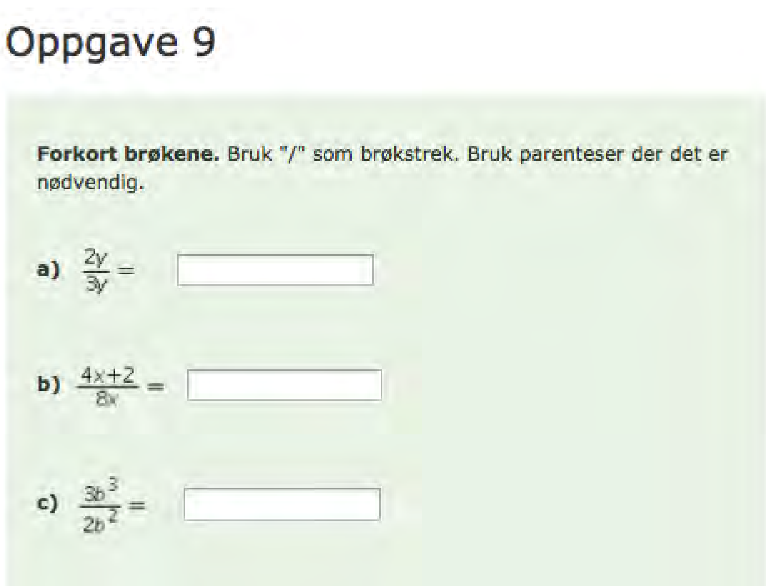
I oppgave 8d må vi bygge på den forståelsen av potensnotasjon som er undersøkt i oppgave 8c. Elevene møter her en ekstra utfordring i forhold til oppgave 8c i og med at det inngår både tall og potenser i spørsmålet. Vi ser at andelen av riktige svar går kraftig ned fra den forrige oppgaven.

Oppgave 8d Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	51	13
$2y^3$ **(Riktig svar)**	1	51
$2y \cdot y \cdot y$ (Riktig definisjon, forenkler ikke)	1	3
$4y$, $2y+2y$ eller lignende (Adderer tall og bokstaver hver for seg)	16	5
$2y^2$ eller $2y.y$	6	9
$3y^2$ (Teller 3 y-er og beholder eksponenten)	3	9
$4y^2$, $4y \cdot y$ eller $2y \cdot 2y$ (Betrakter eksponenten som et gitt antall)	4	1

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 8d Algebra 8 – 10.

Vi finner igjen noen av de feilene som er kommentert over, for eksempel at elevene adderer tall og bokstaver hver for seg. Vi ser også at en del elever betrakter eksponenten som et gitt antall, for eksempel består av to *y*-er. Noen bruker så dette videre og får enten $2y \cdot 2y$ eller til sammen tre *y*-er og beholder så eksponenten. Nesten 20 % av elevene i 10. årstrinn bruker denne tenkemåten.

Oppgavene i oppgave 9 Algebra 8 – 10 handler om forkortninger og er bare gitt på 10. årstrinn. Det er omtrent 1/3 av elevene som ikke svarer på hver av oppgavene. Når vi undersøker nærmere hvordan den enkelte elev svarer, finner vi at det stort sett er de samme elevene som svarer blankt på alle disse tre spørsmålene. Disse utgjør nesten 1/4 av alle elevene på 10. årstrinn som deltok i undersøkelsen. Vi kan undres over det store antallet av *ulike* svar som det er mulig å få på oppgaver av denne typen. Noen av disse svarene lar seg gruppere i kategorier som sier noe om karakteristiske omformingsstrategier som elevene bruker.



Oppgaveeksempel 10: Oppgave 9 Algebra 8 – 10.

Oppgave 9a Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart 33	33
2/3, 0,666... eller 0,67 eller lignende **(Riktig svar)**	20
y eller 1*y* Subtraksjonstenking (nevner minus teller)	13
−*y* eller −1*y* Subtraksjonstenking (teller minus nevner)	7
1/*y*, 1/1*y* eller −1/*y* Subtraksjonstenking (teller minus nevner, svaret i nevner)	3
0,67*y*, 2*y*/3, Delvis forholdstenking, korrekt tallforhold	10
1,5*y* Delvis forholdstenking, omvendt forhold	2
5*y* Addisjonstenking	2

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Oppgave 9a Algebra 8 – 10.

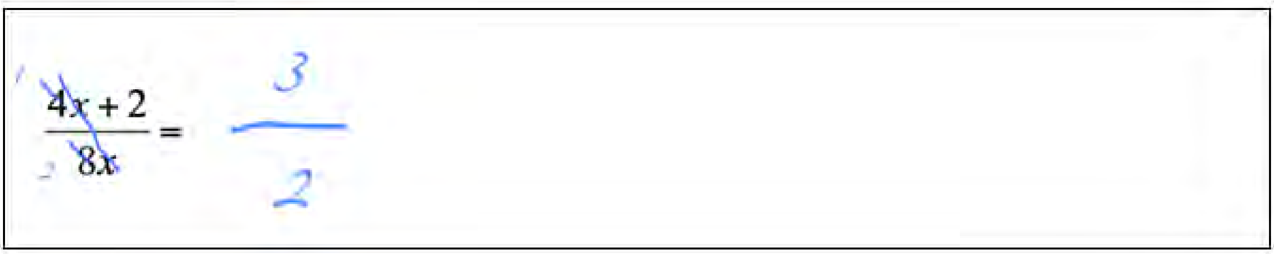
En oppfatning eller strategi er at ved forkorting av denne typen skal nevner subtraheres fra teller eller omvendt. Dette kan synes merkelig siden svært få av disse elevene ville mene at en forkorting av brøken $\frac{4}{8}$ ville gi svaret 4 eller −4.
Det er rimelig å tro at elevene *ikke* oppfatter disse oppgavene som brøker, men prøver å bruke regler de har fått presentert i undervisningen i algebra. I tabellen overfor kan vi se tre ulike typer av slike subtraksjonsstrategier. Nesten en femdel av elevene bruker denne tenkemåten. Vi finner også noen elever som følger en addisjonstenking og får svaret 5*y*. Videre er det noen elever (12 %) som betrakter forholdet mellom tallene, men ”trekker med seg” *y*-en som en slags enhet. Det er rimelig å tro at disse elevene oppfatter y som et objekt.

Oppgave 9b er klart mer komplisert enn oppgave 9a, i første rekke fordi det er en sum i telleren som inneholder en variabel størrelse i det ene leddet. Vi har funnet mer enn 40 forskjellige svar på denne oppgaven! På samme måte som i den forrige oppgaven finner vi subtraksjoner mellom teller og nevner, eller med bare den delen av telleren som inneholder *x*. Samtidig er det en rekke kreative typer av ”forkortninger”. I tabell 30 har vi tatt med noen typiske feil som kort blir kommentert nedenfor.

Oppgave 9b Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	32
(2*x*+1)/4*x* **(Riktig svar).** Flere typer riktig svar er godkjent.	2
A 0,75, ¾, 6/8 e.l. (Forkorter *x* mot *x* og trekker sammen)	4
B 0,75*x* eller lignende (Som over og ”henger på” en *x* til slutt)	2
C 1,5 eller lignende	2
D 2,5 eller lignende	2
E 6*x*/8*x* 4	4
F 0,5x+2	8
G 4*x*+2 eller −4*x*+2 (Subtraksjon)	4
H 2*x* eller −2*x*	3
I 2*x*+2 eller −2*x*+2	5
J (*x*+2)/2*x*	5
K 2/4*x* (Subtraksjon)	4
L 1 ”Forkorter alt”	7
M 0 ”Forkorter alt”	2

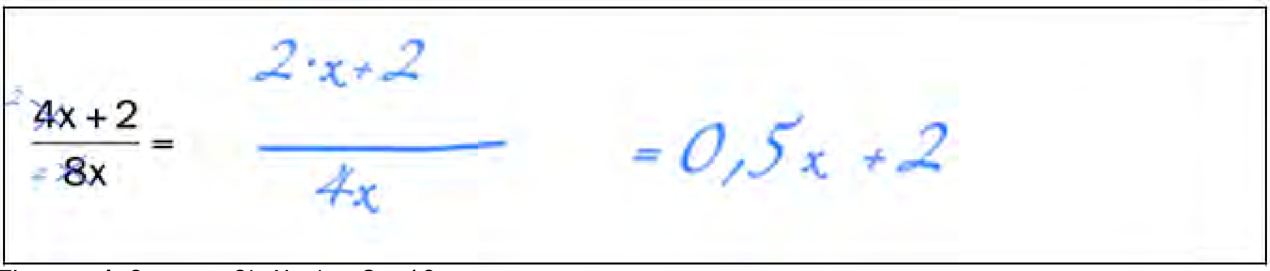
Tabell 30: Prosentvis fordeling. Oppgave 9b Algebra 8 – 10.

Gruppene **A** og **B** framkommer ved at elevene forkorter *x* mot *x* og får 6 i telleren og 8 i nevneren. Elevene i gruppe **B** ”henger så på” en *x* i svaret igjen. Gruppe **E** ligner litt på **A** og **B**, en ”samler” tallene og *x* i telleren, men forkorter ikke *x* slik elevene i gruppe A gjør.



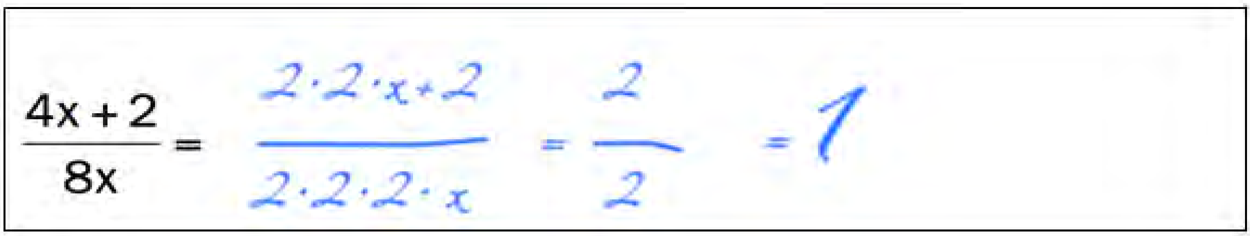
Elevsvar 3. Oppgave 9b Algebra 8 – 10

Tilsvarende får noen svaret 2,5 (gruppe **D**) ved å forkorte 4*x* mot 8*x*, som gir en halv, og addere dette til 2. I gruppe **F** forkortes 4 mot 8, en får 0,5 og beholder *x*-en (som en slags enhet) og får svaret 0,5*x* + 2.



Elevsvar 4. Oppgave 9b Algebra 8 – 10

Svarene 4*x* + 2, $-4x+2$ og $\frac{4x}{2}$ i gruppene **G** og **K** er alle eksempler på subtraksjoner mellom teller og nevner. Gruppene **I** og **J** er eksempler på en kombinasjon mellom delvise forkortinger og subtraksjoner. Men noen elever "forkorter" bort alt, noen av disse gir svaret 1 (gruppe **L**).



Elevsvar 5. Oppgave 9b Algebra 8 – 10

Andre svarer 0, disse foretar en subtraksjon etter at alt er forkortet (gruppe **M**).

Oppgave 9a og 9c er faglig sett relativt like. Vi ville kanskje tro at oppgave 9c var vanskeligst fordi den inneholder potenser av den variable, men tabell 26 viser at flere har fått riktig svar på oppgave 9c enn på oppgave 9a. Flesteparten (83 %) av dem som svarte riktig på oppgave 9a, ga også riktig svar på oppgave 9c. Det ser altså ut til at omtrent 1/4 av elevene behersker prosedyrene i omforming av uttrykk av denne typen. Men det betyr altså ikke at de dermed behersker prosedyrene for forenkling av uttrykk som i oppgave 9b. Tilsvarende resultater ble også funnet i en undersøkelse gjort i Sverige tidlig på 1980-tallet.

Oppgave 9c Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	36
1,5*b* eller 3*b*/2 og lignende (**Riktig svar**)	29
b eller 1*b* og lignende	14
Andre uttrykk med *b* multiplisert med et tall (2*b*, 3*b* osv.)	3
b^3	1
1,5 multiplisert med potenser av *b*	2
Andre potenssvar	5

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave 9c Algebra 8 – 10.

Som i de foregående oppgavene er det de ulike typene av feilsvar som gir oss den mest verdifulle informasjonen om elevenes tenking. For eksempel har vi gruppen av svar med 1,5 multiplisert med en potens av *b*, altså elever som har et korrekt forhold mellom tallene, registrert følgende svar:

- $1{,}5\,b^{1{,}5}$, de regner også ut forholdet mellom eksponentene
- $1{,}5\,b^2$, og $1{,}5\,b^7$ det er vanskelig å finne en begrunnelse for disse eksponentene
- $1{,}5\,b^5$, de adderer eksponentene
- $1{,}5\,b^6$, de multipliserer eksponentene

Noen elever får svaret $5b^5$, de adderer både tall og eksponenter. Andre elever mener at eksponentene har virkning både på den variable størrelsen og på tallene, og de omformer $\frac{3b^3}{2b^2}$ til $\frac{27b^3}{4b^2}$ og får svar som 6,25*b* eller med andre eksponenter av b. Kategorien ”andre potenssvar” i tabellen inneholder svar som *b*5, 5 b^5, 0,67b^5, b^2, 5b^3 osv., altså en blanding av prosedyrer anvendt på tallene og på de variable.

Vi mener det er viktig å ikke se seg blind på alle de forskjellige resultatene som er presentert med utgangspunkt i oppgavene 7, 8 og 9 Algebra 8 – 10. Det viktigste budskapet til læreren fra denne analysen er at flertallet av elevene ser ut til å bruke vilkårlige, men i noen grad konsekvente, prosedyrer ved omformingene. Ofte er dette prosedyrer som har tilknytning til brokker av tidligere erfaringer med tallregning, men også prosedyrer som er totalt løsrevet fra tallregningen, som for eksempel når vi skal forenkle brøkuttrykk. *På den måten blir reglene deres isolerte kunnskaper som er vanskelige å bruke i nye sammenhenger*. Satt på spissen kan elevsvarene ovenfor tyde på at flesteparten av elevene går mye av tiden de bruker på å arbeide med algebra, ut på å flytte ”tomme” symboler meningsløst rundt på et papir.

Det er ikke riktig å hevde at elevene har en rekke misoppfatninger når det gjelder prosedyrer for omforming av algebraiske uttrykk. Det er rimelig å tro at de fleste bare har erfaringer med prosedyrene fra aktivitetene i matematikkundervisningen. De har således ikke hatt anledning til å utvikle begrepsstrukturer eller tankemodeller som inkluderer disse prosedyrene. Dette fører til at de prøver å huske regler fra tilsvarende oppgaver i algebra. Hvis disse reglene bare er knyttet til ytre trekk ved disse kunnskapene, er det ikke uventet at man får en stor variasjon av ulike elevsvar. Ofte fører dette til prosedyrer som er totalt meningsløse, for eksempel at en elev subtraherer nevner fra teller når man skal omforme et algebraisk uttrykk som er gitt som en brøk. Bak en slik tanke ligger trolig den ”ytre” erfaringen man har fått ved forkortinger. Når eleven for eksempel forkorter med 2, eller a, så stryker man et 2-tall, eller en a, både over og under brøkstreken. Dette minner i høy grad om å ”ta bort” det samme, eller like mye, både i teller og nevner.

Det er vår mening at læreren bare kan hjelpe i denne situasjonen ved å legge vekt på begreps-forståelse av de ulike prosedyrene ved algebraiske omforminger, en forståelse som må bygge på solide kunnskaper i tallregning, som så kan bli utgangspunktet for de algebraiske prosedyrene. Dette vil kreve en balansert fordeling av den tiden som brukes på begrepsdanning og ferdighetstrening.

3.4 Å sette inn verdi

Oppgave 11

Sett inn bokstavenes verdi og regn ut.

a) $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$

$a + b - c =$

b) $b = 2$

$b^3 =$

c) $3x = 7$ og $5y = 11$

$3x + 5y =$

d) $a = 10$ og $b = 2$

$a - 3b =$

Oppgaveeksempel 11: Oppgave 11 Algebra 8 – 10

Oppgave 11 er bare med for 10. årstrinn. Det er 12 – 13 % av elevene som ikke svarer på disse oppgavene. Flesteparten av dem, 91 %, har alle disse oppgavene blanke. Oppgave 11a er den enkleste. Det vanligste feilsvaret er 6 som framkommer ved å addere de tre oppgitte verdiene.

Oppgave 11a Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	13
0 (Riktig svar)	81
6	3

Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave 11a Algebra 8 – 10.

Den nye utfordringen i oppgave 11b sammenlignet med oppgave 11a ligger i å sette verdien 2 inn i et potensuttrykk og å regne ut dette uttrykket.

Oppgave 11b Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	12
8 **(Riktig svar)**	68
2^3	4
6 eller 2+2+2 og lignende	9
16 eller $2^3=16$	2
$2b^3$	1

Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave 11b Algebra 8 – 10.

Relativt mange av elevene som har besvart oppgaven klarer dette, noen elever setter inn riktig verdi, men regner ikke ut. En del elever, 9 %, betrakter potensuttrykket som en addisjon. Vi ser også at noen elever tror at $2^3=16$, mens noen gir svaret $2b^3$, de "samler" tallet med uttrykket isteden for å erstatte *b* med 2.

I oppgave 11c ønsker vi å undersøke om elevene oppfatter 3*x* og 5*y* som tall.

Oppgave 11c Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	13
18 **(Riktig svar)**	70
76 $(3 \cdot 7 + 5 \cdot 11)$	11

Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave 11c Algebra 8 – 10.

Omtrent 80 % av de elevene som prøver å løse denne oppgaven, får riktig svar. Det helt dominerende feilsvaret er 76. Disse elevene oppfatter ikke 3*x* og 5*y* som tall, men setter i stedet inn henholdsvis verdiene 7 og 11 for *x* og *y* og får $3 \times 7 + 5 \times 11 = 76$. En grunn til dette kan være at de er vant til å sette inn verdier for ukjente variabler i ligningsløsning.

Oppgave 11d Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	13
4 **(Riktig svar)**	65
2	4
5	2
14	1
16	2
– 22	3
8 eller 8*b*	2

Tabell 35: Prosentvis fordeling. Oppgave 11d Algebra 8 – 10.

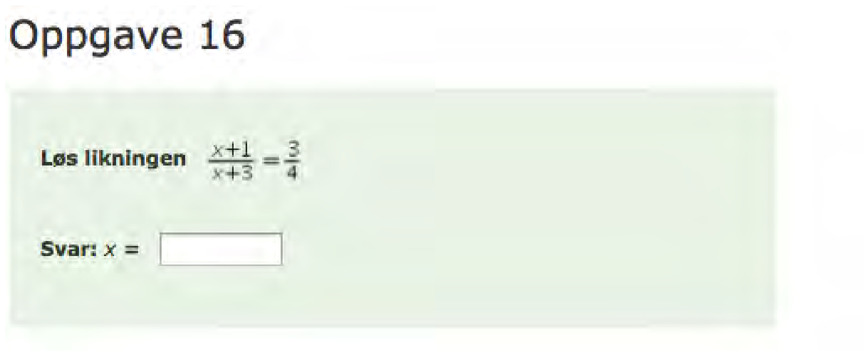
I tabellen er det gjengitt noen typiske feilsvar.

- 2 kommer fram ved at elevene setter opp $10 - 2 \cdot 2 \cdot 2$ eller i noen tilfeller $10 - 2^3$, de ser på 3 som en eksponent, på tilsvarende måte får noen svaret 1 ved å sette opp $10 - 3^2$.
- 5 ved at de setter opp uttrykk som $10 - (3 + 2)$
- 14 ved først å subtrahere 3 fra 10 og deretter multiplisere med 2, de regner fra venstre mot høyre $(10 - 3) \times 2$.
- 16 får eleven ved å addere: $10 + 3 \times 2$
- –22 kommer av at a settes lik 10 og at en erstatter b med 2 i 3*b* og får derved 10 − 32.

Oppgave 11 viser at omtrent 3/4 av elevene på 10. årstrinn som forsøker å løse denne oppgaven, behersker det å sette inn verdier for variable størrelser i sammen-satte uttrykk. *De feil som oppstår, kan tilbakeføres til usikkerhet i tallregning*, for eksempel når elevene gir svaret 5 eller 14 i oppgave 11d. Videre kan det være en sammenblanding av potensuttrykk og addisjon eller multiplikasjon. Svarene 6 i oppgave 11b og 2 eller 1 i oppgave 11d er eksempler på det. Vi ser også indikasjoner på manglende forståelse av posisjonssystemet i sammenhenger som er mer ukjent for elevene, som når innsetting av verdien 2 for *b* i 3b i oppgave 11d blir 32. Dette illustrerer det som det er pekt på tidligere, nemlig at en del av vanskene i algebra kan spores tilbake til usikkerhet i tallforståelse og tallregning.

3.5 Å finne verdien til en ukjent størrelse

Av de oppgavene som er med i den læringsstøttende prøven i *Algebra*, er det bare i en oppgave, oppgave 16 Algebra 8 – 10, der det er spurt etter hvilken verdi for den variable størrelsen som tilfredsstiller en likhet. De andre diagnostiske handler i første rekke om elevenes forståelse av variabler. Det er flere måter vi kan løse denne oppgaven på. Felles for alle disse er ideen om at verdien av uttrykkene på begge sider av likhetstegnet skal være den samme når vi setter inn en verdi for den variable størrelsen. Som vi har pekt på tidligere – som for eksempel forståelse og bruk av
likhetstegnet, er elevenes første erfaringer med likhetstegnet at det er et signal om å utføre en regneoperasjon. I oppgave 16 ønsker vi å undersøke hvordan elevene
angriper denne typen oppgaver, og ikke å studere ligningsløsning generelt.



Oppgaveeksempel 12: Oppgave 16 Algebra 8 – 10.

Denne oppgaven kan være vanskelig å løse med de konvensjonelle metodene som elevene er best kjent med. En grunn til at denne oppgaven er valgt, er at vi ønsket å finne ut hvilke strategier elevene bruker i slike sammenhenger. En strategi som fører fram i denne oppgaven, er å sette inn forskjellige verdier for *x* og så undersøke om svaret blir 3/4. I tabell 36 nedenfor har man hentet informasjon både fra svarene til elevene og metodene de har brukt. Flesteparten (80 %) av de elever som gir korrekt svar, viser at de har prøvd seg fram med ulike verdier. De resterende fordeler seg nokså likt mellom de som svarer 5 uten å vise hvordan de kom fram til svaret, og elever som bruker algebraiske metoder.

Oppgave 16 Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	50
5 (Riktig svar)	9
5/12	1
2	5
2/1 eller 2 og 1, eller 2+1 eller (2,1) eller lignende	17
0,75 eller ¾	2

Tabell 36: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Algebra 8 – 10.

Den vanligste feilen er at elevene setter inn ulike verdier for *x* i teller og nevner, det vil si at de løser en ligning for tellerne og en annen for nevnerne. Elevene vet at *x* kan ha ulike løsningsverdier fra ligning til ligning, så hvorfor ikke også for ligninger for telleren og nevneren i denne oppgaven? Eksempler på dette finner vi i elevsvar 6 nedenfor:

$$\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{4} \qquad \frac{2+1}{1+3}=\frac{3}{4} \qquad x=\frac{2}{1}$$

Elevsvar 6a. Oppgave 16 Algebra 8 – 10

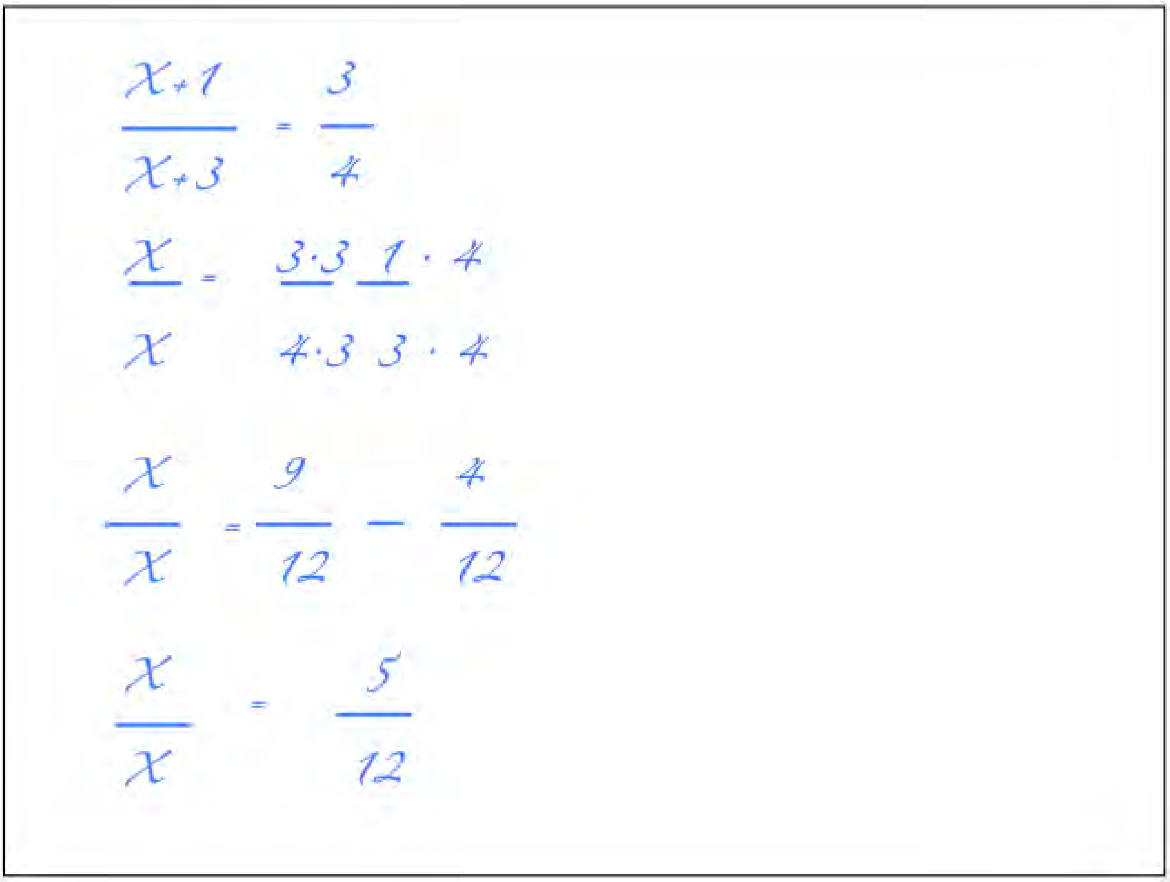
$$\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{4} \qquad x=2 \text{ og } 1$$

Elevsvar 6b. Oppgave 16 Algebra 8 – 10

Svaret $\frac{5}{12}$ framkommer når elevene stryker *x* i teller eller ignorerer *x* og foretar en brøkregning med tallene. Eksempler på dette finner vi i elevsvar 7 og 8:

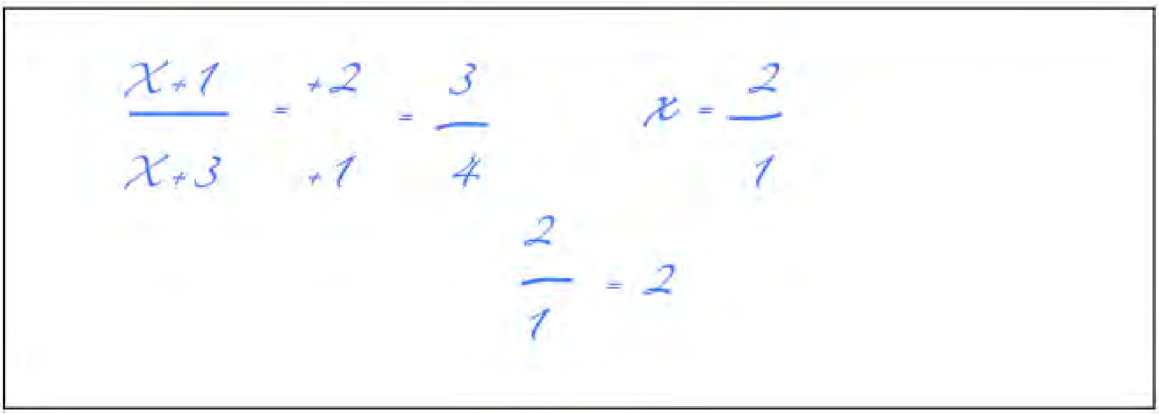
$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$$
$$-\ \frac{3}{4}=\frac{4}{12}$$
$$=\frac{5}{12}$$

Elevsvar 7. Oppgave 16 Algebra 8 – 10



Elevsvar 8. Oppgave 16 Algebra 8 – 10

Av tabell 36 ser vi at det er hele 5 % av elevene som gir svaret 2. Også bak de fleste av disse svarene ligger det trolig at elevene setter inn ulike verdier for *x* i teller og nevner og får svaret $\frac{2}{1}$. De blir opptatt av at $\frac{2}{1}$ er det samme som 2, uten å reflektere over det utgangspunktet de valgte. Elevsvar 9 nedenfor er et eksempel på dette:



Elevsvar 9. Oppgave 16 Algebra 8 – 10

Men det finnes også andre muligheter for svaret 2, som i elevsvar 10:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4} \quad \Big| -3$$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{3}{4} \quad \Big| -1$$

$$x = 2$$

Elevsvar 10. Oppgave 16 Algebra 8 – 10

Det er en stor mengde forskjellige svar på denne oppgaven. Dette indikerer at få elever på 10. årstrinn har virkelig forståelse av hva som foregår i rutinene som brukes i ligningsløsning. Elevsvarene ovenfor viser at elevene husker brokker av framgangsmåter som de ”håper” vil gi dem et korrekt svar.

3.6 Fra algebraiske uttrykk til kontekst og omvendt

Vi tar likevel med noen eksempler på slike oppgaver for å vise hvordan elevene tenker om slike typer oppgaver.

Målet med slike oppgaver er å se om elevene kan tenke på en passende, realistisk kontekst der det algebraiske uttrykket blir brukt på en korrekt måte. Vi kan rette søkelyset mot flere forskjellige aspekter ved elevenes tenkning om bruk av bokstaver i matematikk i en oppgave av denne typen, for eksempel:

- Hvilken kontekst bruker elevene i matematikkfortellingen?
- Er konteksten realistisk?
- Hvordan behandler elevene den variable størrelsen?
- Hvilke oppfatninger av variable størrelser viser denne oppgaven at elever kan ha?

Oppgave A Algebra 8 – 10 (ikke med)

Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket.

$$3a + 2a = 5a$$

Oppgaveeksempel 13: Oppgave A Algebra 8 – 10. Ikke med i den læringsstøttende prøven.

Tabell 37 nedenfor viser hvordan svarene fordeler seg for noen typiske elevoppfatninger av bokstaven a i denne oppgaven:

Oppgave A Algebra 8 – 10	6. årstrinn	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	34	28	31
Riktig svar	2	5	7
a står for et konkret objekt	11	16	27
a står for et udefinert objekt	3	9	7
3*a* og 2*a* står for selvstendige objekter	16	16	13
Beskriver prosedyrer for å få ”svaret” 5*a*	8	9	7
Kontekst er matematikkoppgave fra skolen	3	3	1

Tabell 37: Prosentvis fordeling. Oppgave A Algebra 8 – 10. Ikke med i digital versjon.

Noe under 1/3 av elevene besvarer ikke oppgaven. En grunn til dette tallet er så høyt, kan være at dette er en ukjent oppgavetype for de fleste elever. Vanligvis går vi i undervisningen i matematikk den ”motsatt veien”: Vi gir oftest en problemstilling i en bestemt kontekst, som så skal ”oversettes” til et ”algebraisk språk”.

Et riktig svar i denne sammenhengen innebærer at bokstaven blir oppfattet som en variabel, et ukjent antall eller et generelt tall. Det kan for eksempel være knyttet til en kontekst som antall fyrstikker i en eske eller en pris på en vare. Vi ser at det er få elever på alle årstrinnene som gir matematikkfortellinger av denne typen.

Den hyppigste svarkategorien er karakterisert ved at *a* står for et konkret objekt. Disse elevene ser ofte på a som et symbol eller en ”merkelapp” for et konkret objekt som aper, appelsiner, klasser, kjærester osv. Dette er ikke unaturlig, da en i mange sammenhenger bruker bokstaver på en slik måte i matematikk. For eksempel bruker en m som en merkelapp for enheten meter og tilsvarende l eller L for liter. Et eksempel på slike elevsvar kan være:

Espen hadde 3 epler, så fikk han 2 til.
Hvor mange epler hadde Espen
= 5a

Elevsvar 11. Oppgave A Algebra 8 – 10

Det er bemerkelsesverdig at andelen av denne typen svar øker fra 11 % på 6. årstrinn til 27 % på 10. årstrinn. I en annen type svar lar elevene a stå for et udefinert objekt, som i følgende eksempel:

Det var en gang en 3 a-er som møtte på
2 a-er. Hvor mange a-rer var det da.

Elevsvar 12. Oppgave A Algebra 8 – 10

Også svar der elevene refererer til 3*a* og 2*a* som fullstendige eller helhetlige objekter, er ganske vanlige. Et eksempel på slike svar er:

3A og 2A skulle på tur sammen ute i
Skogen så sa læreren at kanskje 3a og
2a kunne slå seg sammen så kunne de
Kalle seg 5a

Elevsvar 13. Oppgave A Algebra 8 – 10

I kapittel 1 og i innledningen til dette kapitlet har vi pekt på det betenkelige ved å bruke objekter når læreren skal introdusere regning med algebraiske uttrykk. Hvis elevene trekker sammen 2*a* + 3*a* og får 5*a*, kan det være fristende å si at vi ikke kan legge sammen to appelsiner og tre bananer og få fem ”appelsinbananer”. Det er vår oppfatning at argumentasjoner som dette kan være med på å forsterke den oppfatning at bokstavene i algebra representerer objekter. Svarene på denne oppgaven viser at rundt halvparten av elevene på 10. årstrinn bruker objekttenkning i en eller annen form.

En del elever knytter sine matematikkfortellinger til prosedyrer for sammentrekning av uttrykker $3a + 2a$. I elevsvarene nedenfor går prosedyrene på først å ignorere *a*, addere de to tallene og sette inn *a* igjen i svaret.

Du tar 3 +2 det er 5.
Så tar du a+a og det blir a
Da blir det 5a.

Elevsvar 14. Oppgave A Algebra 8 – 10

Du legger sammen tallene og beholder a.

Elevsvar 15. Oppgave A Algebra 8 – 10

En rekke ganger har vi i denne veiledningen pekt på at det er nødvendig å knytte den måten vi bruker bokstaver på i algebra, sammen med generalisert aritmetikk.

Vi tar med en oppgave til under dette temaet. Denne oppgaven går på sett og vis den ”motsatte veien”. Her er det gitt hva de variable størrelsene står for, *g* for antall kg gulrøtter og *p* for antall kg poteter, og elevene skal i oppgave Ba forklare hva den gitte summen representerer i denne konteksten. Uttrykket i spørsmål a er i realiteten en funksjon som beskriver hvor mye vi må betale når vi kjøper forskjellige mengder av gulrøtter og poteter. Oppgave B Algebra 8 – 10 skiller seg på denne måten fra de fleste andre oppgavene i den læringsstøttende prøven i algebra, som handler om begreps-forståelse av variable størrelser og regneoperasjoner med slike størrelser. Vi viser ellers til veiledningen for den digitale prøven for *Funksjoner* for en mer utførlig diskusjon av funksjoner.

Oppgave B Algebra 8 – 10 (ikke med)

Gulrøtter koster 13 kr per kg, og poteter koster 5 kr per kg.

a) Hvis *g* står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da $13g + 5p$ for?

b) Hvor mange kg ble kjøpt til sammen?

Oppgaveeksempel 14: Oppgave B Algebra 8 – 10. Ikke med

De to spørsmålene i denne oppgaven kunne ha blitt stilt i omvendt rekkefølge. Oppgaven ville da trolig blitt lettere, spesielt b-spørsmålet, siden svaret vil følge nesten direkte av teksten. Vi legger merke til i tabell 38 nedenfor at over halvparten av elevene på begge de aktuelle årstrinnene mener at 13*g* + 5*p* står for hvor mange kilogram vi kjøper til sammen. Hadde spørsmålene blitt byttet om, ville vi ikke fått fram at dette er en dominerende misoppfatning, nemlig at bokstavene i slike sammenhenger står for objekter eller er ”merkelapper” for objekter. På den andre siden får vi nå trolig færre riktige svar på oppgave b siden svaret er avhengig av at elevene husker innledningen til spørsmål a.

Oppgave Ba Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	21	18
Riktig svar	2	7
18gp, 13g, 5p eller lignende (Legger inntil)	2	1
194 kroner eller andre referanser til pris (Prissvar)	4	9
13 gulrøtter + 5 poteter eller andre referanser til antall (Antallsvar)	9	2
13 gulrøtter + 5 poteter eller andre referanser til mengde (Mengdesvar)	55	60

Tabell 38: Prosentvis fordeling. Oppgave Ba Algebra 8 – 10. Ikke med.

Noen typiske eksempler på riktig svar er:

- ”Prisen på *g* kg gulrøtter og *p* kg poteter.”
- ”Hvor mye det koster.”
- ”Hvor dyrt det blir til sammen.”
- ”13 kr $\cdot$ *g* kg + 5 kr $\cdot$ *p* kg”
- ”Formel for samlet pris”

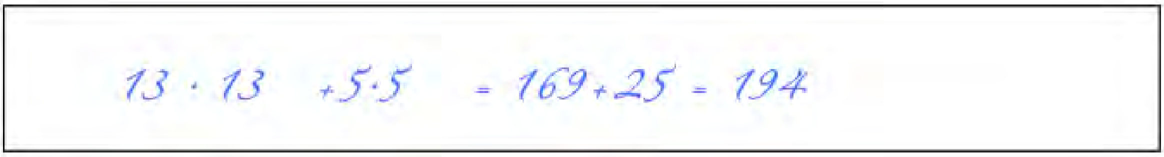
Et typisk eksempel på den vanligste feiltypen, *mengdesvar*, er:

Elevsvar 16. Oppgave Ba Algebra 8 – 10

Her oppfatter elevene at *g* står for ”kg gulrøtter” og *p* for ”kg poteter”. Bokstaven *g* representerer en mengde gulrøtter og *p* en mengde poteter. Dette er e*n form for en oppfatning av variabel som et objekt*. En lignende form finner vi i det vi har kalt *antall svar*. Elevsvar 17 nedenfor er et eksempel på dette.

Elevsvar 17. Oppgave Ba Algebra 8 – 10.

Disse elevene tolker *g* som gulrot og *p* for potet. Denne gruppen av elever betrakter helt klart *bokstavene som objekter*. Det er rimelig å tro at elevene som gir ”mengdesvar”, har en oppfatning av bruk av bokstaver i matematikk som er mer omfattende enn denne gruppen.
Noen elever mener at uttrykket viser at vi kjøper 13 kg gulrøtter til 13 kr per kg og 5 kg poteter til 5 kr per kg. De mener altså at *g* står for kiloprisen på gulrøtter. Elevsvar 18 er et eksempel på dette:



Elevsvar 18. Oppgave Ba Algebra 8 – 10

Som nevnt ovenfor ville vi trolig fått flere riktige svar på denne oppgaven hvis spørsmålene hadde byttet plass. Når elevene har gitt et mengde- eller antall svar i a-oppgaven, er det rimelig å forvente at de også svarer 18 eller 18 kg på b-spørsmålet. Når vi undersøker hvordan den enkelte elev svarer på disse spørsmålene, finner vi at hele 90 % av de elevene på 10. årstrinn som gir et ”mengdesvar” i oppgave a, også svarer 18 kg i oppgave b. De tilsvarende tallene for 8. årstrinn er 87 % og 71 %.

Oppgave Bb Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart		
$g + p$ (Riktig svar)		
2 eller 2 kg		
18 eller 18 kg		
194, 169 + 25, 169 kr + 25 kr og lignende		

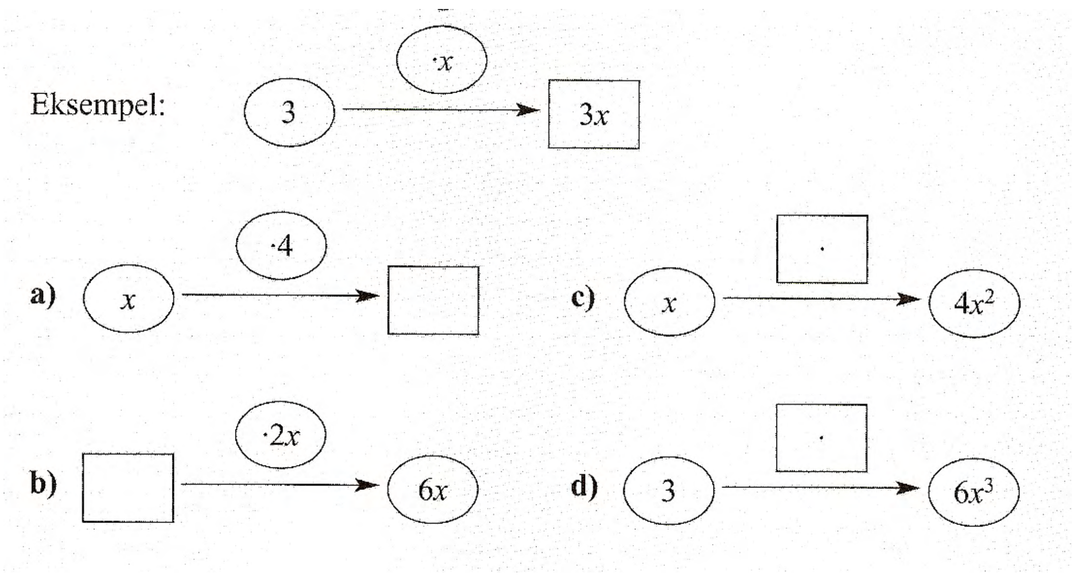
Tabell 39: Prosentvis fordeling. Oppgave Bb Algebra 8 – 10. Ikke med i digital versjon.

Noen elever svarer 2 eller 2 kg. Sammenligner vi disse svarene med svarene på a-spørsmålet, finner vi at disse elevene ser på *g* som 1 kg gulrøtter og *p* som 1 kg poteter.

3.7 Tilordninger

Oppgave C Algebra 8 – 10 (ikke med)

Sett inn i rutene det som mangler:



Oppgaveeksempel 15: Oppgave C Algebra 8 – 10. Ikke med.

Oppgaven er ikke med i settet, men vi tar den likevel med her og kommenterer den. Både i noen læreverk og i undervisningen har det vært vanlig å representere algebraiske sammenhenger skjematisk som i oppgaveeksempel 15. Denne oppgaven tar sikte på å undersøke elevenes forståelse av slike representasjoner. Sammenlignet med oppgaver som bare er representert med algebraiske uttrykk, ser vi at elevene på 10. årstrinn behersker dette relativt bra.

Oppgave Ca Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12	6
$4x$ eller $x4$ og lignende **(Riktig svar)**	80	86
x^4	2	8
Andre svar	5	1

Tabell 40: Prosentvis fordeling. Oppgave Ca Algebra 8 – 10. Ikke med.

Vi legger merke til en økende forveksling med potensnotasjoner på 10. årstrinn. Som pekt på tidligere kommer dette trolig av at elevene prøver å bruke det lærestoffet som er "nytt" eller "aktuelt" for årstrinnet.

Oppgave Cb Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12	6
3 **(Riktig svar)**	52	81
4	4	1
x eller $1x$	3	----
$3x$	21	9
12, $8x$, $12x$, $8x^2$, $12x^2$ eller $6+2+x^2$	----	3

Tabell 41: Prosentvis fordeling. Oppgave Cb Algebra 8 – 10. Ikke med.

Utgangspunktet er ukjent i oppgave b, mens det var spurt etter sluttposisjonen i oppgave a. Vi må derfor forvente at spørsmål b er vanskeligere enn a, som om sammenhengene mellom de tre elementene er av samme type i begge spørsmålene. Vi merker oss at dette har skapt betydelig større problemer for de yngre elevene. Noen svartyper viser at elevene ikke fullt ut forstår denne måten å illustrere sammenhenger på. De tenker seg pilen i "motsatt retning" og får svar som 12, $8x$, $12x$, $8x^2$, $12x^2$ eller $6+2+x^2$.

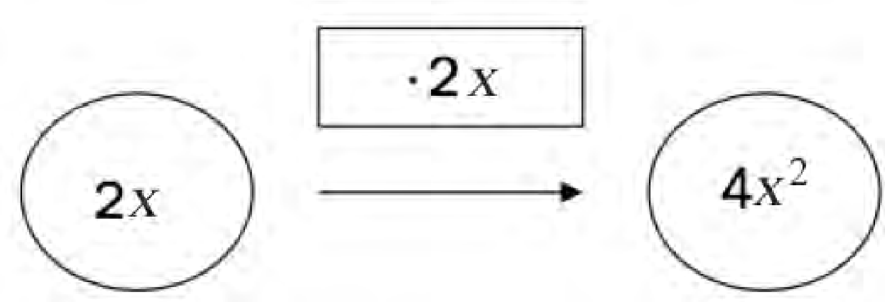
Tabell 41 viser at $3x$ er den vanligste feilen, spesielt på 8. årstrinn. Siden vi i forbindelse med data-innsamlingen ikke spurte om begrunnelse for svaret, kan vi her bare komme med mulige hypoteser om hvordan elevene tenkte med utgangspunkt i mønstre i svartyper. Svaret $3x$ kan ha sin bakgrunn i en ufullstendig forståelse av figuren, eller også i begrepsmessige situasjoner. Det kan være slik at elevene som ser på x som en "merke-lapp" for en enhet eller et objekt, vil trekke med seg denne "merkelappen" også i svaret. Denne forklaringen styrkes når vi sammenligner svarene til den enkelte elev på denne oppgaven med de svar de ga på oppgavene 5c og 3c. På 8. årstrinn var det for eksempel 79 % av de elevene som svarte $3x$ på denne oppgaven, som også svarte $7n$ på oppgave 3c. Det er viktig å peke på at det er lettere å få informasjon av denne typen gjennom samtale med den enkelte elev.

I de to siste spørsmålene skal elevene beskrive den multiplikasjonen som må utføres. Det kan være flere grunner til at disse oppgavene er vanskeligere enn de to oregående. Det er som regel mer problematisk å beskrive forandring av uttrykk enn start og sluttpunkt i algebraiske sammenhenger. Det er rimelig å tro at eksponentene i c og d skaper ekstra utfordringer i disse oppgavene. Som pekt på tidligere har elevene på 8. årstrinn hatt lite undervisning om potensuttrykk. Det er derfor rimelig å forvente en mye større forskjell mellom årstrinnene på disse to spørsmålene enn på de to første.

Oppgave Cc Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	23	9
$4x$, $4 \cdot x$ eller $x4$ og lignende (**Riktig svar**)	4	65
2	7	1
4	12	4
4^2 eller 16	28	8
$4x^2$	4	4
Endrer innholdet på flere steder i skjemaet	6	-----

Tabell 42: Prosentvis fordeling. Oppgave Cc Algebra 8 – 10. Ikke med

Den vanligste feiltolkningen i oppgave c, på begge årstrinn, er 4^2, se tabellen ovenfor. En nærliggende tolkning av svar av denne typen er at elevene leter etter et mønster mellom leddene i oppstillingen. Da mangler det 4^2. En annen mulig forklaring er at de oppfatter uttrykket $4x^2$ som $(4x)^2$. Svaret 16 er også registrert i denne gruppen av svar, siden en del elever vet at $4^2 = 16$. Spesielt finner vi dette på 10. årstrinn. En tilsvarende argumentasjon kan føres for å begrunne svaret 4: Det mangler et firetall. Svaret 2 kan også oppfattes som et forsøk på å skape et mønster. 2-tallet i eksponenten må da komme fra en eller annen plass – det mangler altså et 2-tall. Noen elever forsøker å finne et mønster ved å endre på flere plasser i skjemaet og skriver for eksempel:



Disse elevene viser at de behersker et kunnskapselement fra algebra, men svarer ikke på det spørsmålet som oppgaven stiller. Legg merke til at dette stort sett bare gjelder elever på 6. årstrinn.

Vi finner tilsvarende forsøk på å finne et mønster i skjemaet i oppgave d. Fordelingen av de vanligste kategoriene er vist i tabell 43 nedenfor.

Oppgave Cd Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	26	9
$2x^3$ (**Riktig svar**)	15	69
2	11	2
2^3	11	2
6	4	-----
$2x$	6	3
x^3	3	1
$2x^2$	3	6
$3x^3$	2	3

Tabell 43: Prosentvis fordeling. Oppgave Cd Algebra 8 – 10. Ikke med.

3.8 Bokstav som et generelt tall

Oppgave 12

$a + b + c = c + a + b$

Velg en av påstandene.

- ○ Dette er alltid sant
- ○ Dette er aldri sant
- ○ Dette kan være sant

Oppgaveeksempel 16: Oppgave 12 Algebra 8 – 10.

Oppgave 13

$4 + x = 4 + y$

Velg en av påstandene.

- ○ Dette er alltid sant
- ○ Dette er aldri sant
- ○ Dette kan være sant

Oppgaveeksempel 17: Oppgave 13 Algebra 8 – 10.

Oppgave 14

$2a + 3 = 2a - 3$

Velg en av påstandene.

- ○ Dette er alltid sant
- ○ Dette er aldri sant
- ○ Dette kan være sant

Oppgaveeksempel 18: Oppgave 14 Algebra 8 – 10.

Oppgave 15

$l + m + n = l + p + n$

Velg en av påstandene.

- ○ Dette er alltid sant
- ○ Dette er aldri sant
- ○ Dette kan være sant

Oppgaveeksempel 19: Oppgave 15 Algebra 8 – 10.

I oppgave 12 vil vi undersøke om elevene vet at det ikke spiller noen rolle i hvilken rekkefølge vi adderer. Oppgave 13 fokuserer på om elevene vet at *x* og *y* kan representere et generelt tall, og at likheten kan gjelde hvis x og y har samme verdi. I oppgave 14 undersøkes det i hvilken grad elevene vet at en bestemt bokstav må representere samme verdi i et bestemt problem. Og til sist, i oppgave 15 kun for 10. årstrinn, om elevene på samme måte som i oppgave 13 gir uttrykk for at bokstavene kan representere et generelt tall, noe som gjør likheten sann bare hvis m og p har samme verdi. Tabellene 44 – 47 nedenfor framstiller hvordan elevene på de to årstrinnene krysser av på disse oppgavene. Opprinnelig ba oppgavene elevene om å forklare hvordan de kom fram til svarene.

Det er her verken tatt hensyn til kvaliteten på de forklaringer som er gitt, eller om det i det hele tatt finnes en forklaring. Der ser ut til at de yngste elevene krysser av mer tilfeldig enn de eldre elevene, ved at de sprer seg mer mellom de tre alternativene. Elevene på 8. årstrinn gir også færre forklaringer enn elevene på 10. årstrinn. Ev de elevene som har krysset av riktig, er det på 8. årstrinn henholdsvis 31 %, 58 % og 43 % som har gitt forklaring på de tre første oppgavene. Tilsvarende tall for de fire spørsmålene på 10. årstrinn er henholdsvis 18 %, 23 %, 29 % og 25 %. Ser vi på de elevene som har krysset av feil, er prosentandelene uten forklaring mye høyere enn de prosenttallene som er nevnt ovenfor.

Oppgave 12 Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12	7
Alltid sant (**Riktig svar)**	39	65
Aldri sant	12	9
Kan være sant	33	18

Tabell 44: Prosentvis fordeling. Oppgave 12 Algebra 8 – 10.

Den vanligste korrekte forklaringen til oppgave 12 går på at rekkefølgen ikke spiller noen rolle i addisjon. Svar som: "*De har bare bytta rekkefølgen på tallene. Derfor blir svaret det samme*", eller: "*Bokstavene har like stor verdi uansett rekkefølge*". Det er henholdsvis 17 % og 33 % av elevene på de to klassetrinnene som gir forklaringer av denne typen. Dette betyr at omtrent to tredeler av de elevene som har krysset i riktig rute og som gir forklaring bruker denne argumentasjonen. Men det fins også elevsvar i denne gruppen som røper andre, mer uklare, tanker knyttet til denne "bokstav-regningen".

Oppgave 13 Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	14	7
Alltid sant	11	4
Aldri sant	23	54
Kan være sant (**Riktig svar)**	31	34

Tabell 45: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 Algebra 8 – 10.

De vanligste feilsvarene i oppgave 13 finner vi i den gruppen som har krysset av for at likheten aldri er sann. De vanligste av disse forklaringene går på at *x* og *y må* representere forskjellige verdier *fordi* de er symbolisert ved hjelp av forskjellige bokstaver. Svar som *"x og y er forskjellige uansett"*, *"4 + x og 4 + y kan ikke være sant fordi x og y aldri står for samme tall"* og *"x og y verdiene er ikke lik i samme oppgave"* er typiske for denne tenkingen.

Oppgave 14 Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	15	9
Alltid sant	9	4
Aldri sant **(Riktig svar)**	60	72
Kan være sant	14	14

Tabell 46: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Algebra 8 – 10.

Det er tydeligvis lettest å knytte et korrekt meningsinnhold til oppgave 14 i denne oppgaven. Dette kan ha sammenheng med at elevene i dette spørsmålet kan bruke strategier som ikke var anvendbare i de foregående spørsmålene fordi det i disse var mer enn én variabel. Det blir derfor her mulig å bruke noen av de argumentasjonene som ikke førte fram i de foregående spørsmålene. Likevel er det en stor del av elevene som bare krysser av uten forklaring. 29 % av elevene i 10. årstrinn som krysser av i riktig rute gir ingen forklaring.

Oppgave 15 Algebra 8 – 10	10. årstrinn
Ubesvart	12
Alltid sant	15
Aldri sant	49
Kan være sant **(Riktig svar)**	33

Tabell 47: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 Algebra 8 – 10.

Oppgave 15, som bare er med i 10. årstrinn, er av samme struktur som oppgave 13. Selv om en nå har tre variable størrelser på hver siden av likhetstegnet, er det omtrent like mange elever som krysser av i riktig rute i oppgave 15 som i oppgave 13. Blant elevene som gir forklaring til riktig svar i d er det 86 % som gir tilsvarende forklaring i oppgave 13.

3.9 Fra situasjon til algebraiske symboler

I kapittel 1.2 diskuterte vi kort ulike elementer av matematikk kompetanse. Der ble det pekt på at ofte når vi skal problemer i en kontekstuell situasjon, må vi foreta en matematisering. Dette kan for eksempel gå ut på å uttrykke en bestemt matematisk sammenheng ved hjelp av matematiske kunnskaper, oftest ved bruk av matematiske symboler. I noen tilfeller er disse tall og i andre tilfeller bokstaver som representerer variable størrelser. Hensikten med den algebraiske matematiseringen er å kunne omforme sammenhengene for å finne en løsning på problemet.

I oppgave 10 Algebra 8 – 10 møter elevene på 8. årstrinn og 10. årstrinn to relativt enkle spørsmål knyttet til algebraisk matematisering.

Oppgave 10

Håkon har en årslønn på 100 000 kr. Berits årslønn er en og en halv gang så stor som Håkons årslønn.

a) Hvor stor er Berits årslønn?

Svar: ______ kr

Ivar har en årslønn på *x* kroner. Roalds årslønn er dobbelt så stor som Ivars årslønn.

b) Hvor stor er Roalds årslønn uttrykt ved *x*?

Svar: ______

Anitas årslønn er en og en halv gang så stor som Ivars årslønn.

c) Hvor stor er Anitas årslønn uttrykt ved *x*?

Svar: ______

Oppgaveeksempel 20: Oppgave 10 Algebra 8 – 10.

På samme måte som i flere av de andre oppgavene som er diskutert i denne veiledningen, møter elevene også her problemer som ikke i første rekke er knyttet til algebra, når de skal komme fram til et korrekt svar. Vi vet at uttrykk som ”dobbelt så stor som”, ”en og en halv gang så stor som” og lignende er uklare for mange elever. I slike problemstillinger skal vi sammenligne én størrelse (mengde, lengde, lønn osv.) med en annen ved å se på *forholdet* mellom størrelsene. En annen måte å sammenligne størrelser på er å se på forskjellen mellom dem, altså *differansen*. For en elev kan det være interessant å vite at Liv er 10 cm høyere enn Peder, men trolig lite interessant å vite forholdet mellom høydene deres. Elevene har flere erfaringer med sammenligninger der vi betrakter forskjeller, enn å betrakte forhold. Daglig språkbruk kan også bidra til forvirring. Man bruker for eksempel ofte ordene tredobbelt og firedobbelt i betydningen tre, respektive fire, ganger så mye som. Vi ser noen utslag av slike problemer nedenfor.

Oppgave 10a Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	7	6
150 000 (Riktig svar)	22	36
50 000	11	6
250 000	46	48

Tabell 48: Prosentvis fordeling. Oppgave 10a Algebra 8 – 10.

Legg merke til den lave andelen av rette svar på denne oppgaven. 250 000 er det vanligste feilsvaret. Dette har trolig sin bakgrunn i at elevene er opptatt av forskjellen i slike sammenhenger, og adderer så 150 000 til Håkons årslønn. Som vi ser er dette feilsvaret mye mer utbredt enn det korrekte svaret for begge årstrinn. 50 000 er også et vanlig feilsvar. De kan ha lest teksten feil ved å tro at det står ”en halv gang så stor som Håkons årslønn”, eller igjen at de bare er opptatt av forskjellen.

Oppgave 10b Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	32	14
2*x* eller *x*+*x* **(Riktig svar)**	32	60
x	5	2
$x \cdot x$ eller x^2	14	18
100 000	3	1
200 000	4	1
Andre tallsvar	6	2

Tabell 49: Prosentvis fordeling. Oppgave 10b Algebra 8 – 10.

En del av de problemene som er pekt på, og som elevene tydelig har illustrert eksisterer i oppgave 10a, blir unngått av mange i oppgave 10b. Dette har trolig forbindelse med at sammenheng mellom størrelser ved dobling har en annen funksjon, språklig sett, enn i uttrykket *en og en halv gang så stor som,* slik spørsmålet er formulert i oppgave 10a. Ordet dobbelt er språklig mer direkte knyttet til forhold enn uttrykket … *ganger så stor som*. Det er derfor ikke uventet at så mange svar faller i kategorien 2*x* eller *x* + *x*. Dette kommer tydelig fram når en sammenligner svarene til de enkelte elevene på disse to spørsmålene. For eksempel, blant de elevene i 10. årstrinn som gir riktig svar på oppgave 10a er det hele 74 % som svarer 2*x* på oppgave 10b, mens bare 44 % av de som gav riktig svar på oppgave b også hadde oppgave 10a riktig. Nesten alle de resterende i gruppen av rette b-svar skrev 250 000 på 10a-oppgaven. Feilsvaret *x* er rimelig å fortolke som at eleven har funnet forskjellen. Det lave antallet svar av denne typen støtter også påstanden over.

Konklusjonen vår er at flesteparten av elevene i 10. årstrinn behersker den relativt enkle matematiseringen i denne oppgaven.

Blant feilsvarene på oppgave 10b finner en bare en hovedkategori, nemlig de som svarer $x \cdot x$ eller x^2. Disse elevene forveksler altså addisjon med multiplikasjon. De ser kanskje at det må bli *x* to ganger og multipliserer *x* med *x*.

Oppgave 10c Algebra 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	39	25
1,5*x* **(Riktig svar)**	13	32
0,5x eller *x*/2	4	6
x	6	4
2,5*x*	7	13
$x^{0,5}$	2	1
$x^{1,5}$	1	1
$x^{2,5}$	1	2
Andre potenssvar	5	7
Tallsvar	10	2

Tabell 50: Prosentvis fordeling. Oppgave 10c Algebra 8 – 10.

Vi legger merke til at det er nesten like mange elever i tiende årstrinn som kommer fram til korrekt svar på denne oppgaven som det var i oppgave 10a. Vi finner at omtrent 60 % av de elevene som gir riktig svar på oppgave 10a også finner en korrekt løsning på oppgave 10c. Og også motsatt, 60 % av de som svarer riktig på 10c gjør det samme på oppgave 10a. Når vi derimot sammenligner hvordan den enkelte elev svarer på oppgavene 10b og 10c, finner vi ikke dette mønsteret. Bare 50 % av de som svarer riktig på oppgave 10b, gjør det samme i oppgave 10c. Motsatt er det 95 % av de som svarer riktig på 10c som også har riktig svar på oppgave 10b. Det er også interessant å legge merke til at 97 % av elevene i 10. årstrinn som svarte 2,5*x* på oppgave 10c gav svaret 2*x* på oppgave 10b.

Dette understreker igjen at eleven er mer opptatt av forskjellen mellom størrelsene enn forholdet mellom dem og at dobling er et spesialtilfelle.

Konklusjonen vår er at av de elever som betrakter forholdet korrekt, er det flertallet som også klarer å representere dette ved å bruke algebra.

Del 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen presenterer vi en samling undervisningsaktiviteter som tar opp noen utfordringer i forbindelse med det å utvikle en god forståelse av algebra. Utbredte problemer og misoppfatninger har stått sentralt i diskusjonen av oppgavene i den første delen av denne veiledningen. Bruken av bokstaver som symboler for variable størrelser stiller krav til abstrakt tenkning, og elevene skal gjennom undervisningen utvikle en grunnleggende forståelse for denne bruken av bokstaver. Samtidig skal de lære å skille denne bruken av bokstaver fra andre måter bokstaver blir brukt på i matematikk. Siktemålet med undervisningen bør være at bokstaver brukt som symboler for variable størrelser skal oppleves meningsfulle. Dette kan oppnås ved å legge vekt på forbindelsen mellom det matematiske symboluttrykket og den situasjon uttrykket relaterer seg til.

Språket er et viktig redskap for å utvikle gode begreper og å gi mening til symboler. Begrepet språk refererer seg til all bruk av tegn og signaler som del av en kommunikasjon. Vi har her konsentrert oss om hvordan *bevisst bruk av skriftlig eller muntlig norsk* kan bidra til styrkingen av algebra.

I de aktivitetene vi foreslår, vil bruk av elevenes dagligspråk[2] stå sentralt. Skal læreren hjelpe elevene til å utvikle forståelse av matematikk, er det nødvendig å ta utgangspunkt i de erfaringer elevene har, og det språk de bruker for å uttrykke disse erfaringene. Det blir lærerens oppgave å knytte dagligspråket hos elevene til det matematiske språket.[3] Dette tas opp i kommentarene til de ulike undervisnings-aktivitetene. Vi vil knytte bruken av bokstavsymboler til ulike typer av *situasjoner* som kan danne utgangspunkt for åpne og reflekterende samtaler og diskusjoner. Selv om vi har lagt vekt på å bruke situasjoner som elevene burde ha et visst kjennskap til, vil graden av gjenkjenning variere fra elev til elev.

Å lese og lytte i matematikk

Å kunne lese matematiske tekster er nødvendig for å tilegne seg mer matematisk kunnskap og for å forstå hva matematiske problemer omhandler, noe som igjen er en nødvendig forutsetning for at et matematisk problem kan løses.

Mengden av tekst vi bør ha i oppgaver og læremateriell i matematikk, har blitt diskutert blant lærere i ulike sammenhenger. Noen hevder at mye tekst vil skape unødvendige problemer for lesesvake elever. De peker på at noen av de problemer en elev måtte ha med å finne svar på bestemte oppgaver, ikke trenger å skyldes manglende forståelse i matematikk, men bunner i leseproblemer. For å unngå leseproblemene ønsker vi derfor så langt som mulig å minimalisere bruken av tekst i matematikkoppgaver. En ulempe med en undervisning av denne typen er at den lett vil kunne føre til at vi i første rekke retter oppmerksomheten mot å praktisere de matematiske ferdighetene. I algebra vil da arbeidet til elevene lett avgrenses til det å manipulere med symboler og i mindre grad til å arbeide med å knytte algebra til bruken i praktiske situasjoner. Slike situasjoner vil nødvendigvis måtte beskrives. I oppgaver blir slike situasjoner oftest beskrevet skriftlig, eventuelt med støtte i en tegning eller figur. Det er ved å legge mer vekt på sammenhengen mellom situasjoner og algebraiske symboler at læreren kan bidra til å gjøre symbolene meningsbærende for elevene (se også kapittel 1.2). Å bruke språket, muntlig og skriftlig, er etter vår mening et nødvendig redskap for å utvikle god begrepsforståelse. Nedenfor presenteres forslag til noen aktiviteter som kan hjelpe elevene til å lese og forstå en matematisk tekst, heller enn å prøve å unngå denne typen tekst.

[2] Dagligspråk refererer hertil det vi noe upresist kan kalle vanlig bruk av norsk uten noen spesiell referanse til matematikk.
[3] Matematisk språk refererer til en korrekt måte å uttrykke matematikk på ved bruk av norsk. Forskjellen mellom det vi kaller elevenes dagligspråk, og et matematisk fagspråk er ofte stor. Det er lærerens oppgave å bygge en bro mellom disse.

I forslagene til aktiviteter har vi bestrebet oss på å bruke et språk som skal ligge tett opp til dagligspråket. Denne intensjonen kan være problematisk å lykkes med, enten symbolene er tallsymboler eller det er bokstaver som symboler for variable størrelser. Elevene må i begge tilfeller gi symbolene et meningsinnhold. Vi legger spesiell vekt på å arbeide med de symbolene som er nye for elevene, eller får en utvidet betydning når man går fra aritmetikk til algebra, som for eksempel likhetstegnet.

I aktivitetene legges det vekt på at elevene skal bli vant til å lytte til hverandre på en måte som fremmer refleksjon rundt begreper og symboler for disse begrepene. Elever har ofte en forestilling om at det i matematikk gjelder å komme raskest mulig fram til et svar, og at det å arbeide med matematikk er ensbetydende med å produsere svar. De kan derfor være raske med å avbryte den som snakker, og selv gi svaret og på den måten motvirke en nødvendig refleksjon rundt matematiske begreper.

Å skrive og snakke matematikk

Å bruke språket aktivt ved å sette ord på det man arbeider med, er et viktig redskap for å utvikle solide matematiske begreper. Språket er et hjelpemiddel til å klargjøre egne ideer og oppfatninger. Prosessen med å sette ord på noe bidrar til egen læring ved at elevene blir bevisst på sine egne ideer. Slik vil også ulike typer misoppfatninger komme til uttrykk. På grunn av dette er det viktig at læreren ikke griper inn i prosessen for tidlig. Det er avgjørende at elevene læres opp til å lytte til hverandre, og at det ikke bare fokuseres på å komme fram til et riktig svar.

Skriving er et godt redskap for matematikklæring, særlig hvis elevene læres opp til å skrive for å klargjøre egne refleksjoner rundt matematiske prosesser og begreper. Hva er mine tanker om variabler som jeg blir presentert for i en bestemt sammenheng? Hva er det jeg er usikker på? Hva er det jeg opplever som hensikten med det vi arbeider med? Hva trenger jeg mer kunnskap om? Skal elevene oppleve skrivingen som meningsfull, må den få konsekvenser for den videre undervisningen. Vi kan for eksempel bruke det som er skrevet, som utgangspunkt for videre diskusjon av en problemstilling der hovedhensikten er å bidra til refleksjon rundt et spesifikt tema.

Både det å skrive og det å snakke kan trolig ikke overvurderes som hjelpemidler når det gjelder å utvikle matematisk forståelse. Ved å framheve dette i de aktivitetene vi foreslår, vil vi illustrere hvordan bevisst bruk av språk kan øke aktiv deltakelse og refleksjon og dermed forståelse av algebraiske begreper.

Vanlige misoppfatninger hos elevene innenfor *Algebra*:

- Prioritering av regnerekkefølge
- Ser på bokstaver som konkrete objekter og ikke som symboler for tall, men som ”merkelapper” for objekter, for eksempel ”*a*” står for ”appelsiner” eller ”aper”, ”*b*” står for ”bananer” osv.

Kapittel 4 Undervisningsaktiviteter

I kapittel 1.1 ble det pekt på at læring av algebra har sine røtter i den matematikken elevene lærer i de første årene i skolen, når elevene legger merke til regelmessigheter i arbeid med tall. Fra denne begynnelsen utvikler de kunnskaper om egenskaper ved tallene og regneoperasjonene, egenskaper som senere skal generaliseres til kunnskaper i algebra. En del av dette kapitlet vil dreie seg om generalisering av denne typen. Dette vil handle om fem aspekter som er essensielle for læring av algebra:

1) forståelse av likhet,
2) kunnskaper om sammenhenger mellom regneoperasjonene,
3) forståelse av viktige egenskaper ved tallene,
4) å kunne beskrive mønstre og sammenhenger og
5) bokstaver brukt til å representere generaliserte tall.

Disse aspektene vil bli dekket gjennom de aktivitetene som bli presentert. Før dette arbeidet vil vi imidlertid drøfte hvordan vi kan bruke diskusjoner mellom elever i begrepsdanning av denne typen.

4.1 Organisering med sikte på diskusjoner

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.*

Dette innebærer at vi i de matematikktimene som omhandler begrepsdanning, må legge opp til en variert og bevisst bruk av språk, slik det er framhevet i innledningen til del 2. Lærerens oppgaver er å skape en atmosfære i klassen som bidrar til åpne og reflekterende diskusjoner, og å organisere dette på en måte slik at alle elevene deltar aktivt. En undervisning med en lærerdominert stil og med hovedvekt på individuelt arbeid vil holde både mengden og kvaliteten på diskusjoner på et lavt nivå; noen lærere assosierer elevdiskusjoner med et høyt støynivå og mangel på disiplin.

Ulike måter å organisere arbeidet på kan ha sine fordeler og ulemper. Det viktige er at læreren er bevisst på og utnytter dette til å legge forholdene til rette slik at alle elevene kan få varierte erfaringer når det gjelder å reflektere rundt matematiske begreper. Læreren bør utnytte den dynamikken som ligger i å veksle mellom ulike måter å organisere arbeidet på, slik dette er beskrevet nedenfor.

Individuelt arbeid

Individuelt arbeid skal gi elevene mulighet til å tenke over og utvikle sine egne ideer knyttet til en matematisk problemstilling eller oppgave. Læreren bør la elevene få nok tid til å tenke igjennom en gitt situasjon eller problemstilling individuelt før de blir bedt om å prøve ut tankene sine i par eller i gruppe. Hvis arbeidet starter direkte i grupper, kan det lett bli slik at de flinkeste eller de mest verbale elevene ”kjører over” medelever som de skal samarbeide med. Ofte kan det være nyttig at elevene skriver ned noe skriftlig som en del av dette individuelle arbeidet, som de kan ta med seg til partneren eller gruppen sin.

Arbeid i par

Det å la elevene diskutere to og to legger forholdene til rette for at alle skal kunne være aktive i diskusjoner i matematikk uten at det oppleves som truende. Dette er spesielt viktig fordi man vet at mange elever har liten erfaring med å diskutere matematikk og lett føler seg usikre. Å arbeide i par er også en organiseringsform som kan brukes uten store forberedelser fra lærerens side.

Arbeid i grupper

Gruppediskusjoner er viktige for at elevene skal lære å uttrykke og klargjøre sine matematiske ideer ved å prøve dem ut på flere andre. I en gruppe vil det vanligvis bli større variasjon i innfallsvinkler enn i parvise diskusjoner, og elevene lærer å snakke matematikk mens flere hører på. Diskusjoner i en gruppe vil også oftere få en mer argumenterende stil enn diskusjoner mellom to elever. Før en eventuell klassediskusjon kan man vurdere å la to grupper sammenligne og diskutere sine konklusjoner.

Klassediskusjoner

Ved å la hvert par eller hver gruppe presentere sine forslag for klassen kan elevene få innblikk i ulike måter å angripe et problem på. Det å oppleve en slik variasjon i innfallsvinkler kan bidra til at elevene utvikler mer solide begreper og blir mer fleksible i sin måte å analysere et problem på. Det at det er deres egne forslag som blir tatt opp og diskutert, virker også motiverende.

4.2 Utforskning og eksperimentering som utgangspunkt for diskusjon

Aktivitet 1 ”Hva er regelen min?”

Oppgave 1
Studer tegneserien nedenfor, ”Hva er regelen min?”

Hvorfor tror dere Lise svarer Jan på den måten hun gjør, når han sier at han har gjettet regelen? Tenk igjennom hvordan dere selv skal svare når dere spiller.

Aktivitet 1, oppgave 1

Oppgave 2

Spill deretter ”Hva er regelen min?”. Bytt på å være den som bestemmer en regel, og den som skal gjette hva regelen er. Dere må begge passe på å holde oversikt slik at dere vet hvilke tall som hører sammen.

Forklar hvordan det kan være nyttig å tenke når dere prøver å finne regelen raskest mulig.

Aktivitet 1, oppgave 2

Kommentarer til aktivitet 1

Utforskning og eksperimentering er velegnet til å introdusere sentrale sider av læreplanens innhold i algebra. Det er lite trolig at alle elever har erfaring med ”Hva er regelen min?”. Tegneserien i oppgave 1 er bare tenkt brukt i en startfase. Elevene bør gjøre denne aktiviteten flere ganger for å få varierte erfaringer før de går videre med aktivitet 2 og aktivitet 3. Det er trolig hensiktsmessig å bruke perioder på 5 til 10 minutter til aktiviteter av denne typen. Hensikten er at elevene skal få erfaring med å uttrykke sammenhenger mellom tall før man setter søkelyset på å ikle slike sammenhenger en algebraisk språkdrakt. Aktiviteten passer best i grupper med to eller tre elever. Såpass små grupper er lette å organisere. Dette er viktig med tanke på at alle elevene bør involveres aktivt og få trening i å formulere seg. I større grupper vil ofte noen ta rollen som aktive, mens andre bare hører på. Å sette ord på en slik regel er god trening i å uttrykke seg matematisk.

Elevene må bytte på rollene. Når den ene setter ord på noe, må den andre være aktivt lyttende. Å være aktivt lyttende innebærer å stille spørsmål og også noen ganger å gi noe hjelp. Det er viktig at læreren passer på at en ikke overtar for den som har ordet. Begge parter må gis mulighet til selv å reflektere over det som sies, og eventuelt revurdere dette. Elevene vil trolig trenge noe opplæring i forhold til dette.

Klassediskusjoner kan bidra til at elevene får oversikt over det de arbeider med. Dette gir læreren anledning til å rette oppmerksomheten mot sentrale kunnskapselementer i det elevene har arbeidet med i gruppene. Læreren bør legge vekt på å klargjøre eventuelle motsetninger og problemer i det som kommer fram i gruppediskusjonene, noe som ytterligere bidrar til refleksjon rundt læringsinnholdet.

Under arbeidet i gruppene vil trolig elevene ha opplevd et behov for å systematisere dataene. Dette gir læreren anledning til å introdusere tabeller som et nyttig verktøy for slik systematisering.

Aktivitet 2 Systematisere, gjette, sjekke og forbedre

Oppgave 1
Vera har lekt med datamaskinen. Hun har gitt den starttall og bedt den bruke bestemte regler for å beregne de tilhørende resultattallene. Nedenfor har vi satt opp tabeller som viser Veras starttall og resultattall da hun ba maskinen bruke reglene A, B, C og D.

Starttall	3	5	0	2,7	27
Resultattall	2	4	−1	1,7	26

Starttall	4	11	0	−5	3,2
Resultattall	2	5,5	0	−2,5	1,6

Starttall	5	8	0	1,5	100
Resultattall	9	15	−1	2	199

Prøv å finne reglene A, B, C og D som maskinen har brukt. Tenk over hvordan du vil forklare de reglene du har funnet, for partneren din.

Skriv ned reglene.

Du og partneren din skal så forklare for hverandre, annenhver gang, hva hver av reglene går ut på.

Snakk sammen om de utregningene dere har gjort, og hvordan dere forklarer reglene. Forklarte dere reglene på samme måte?

Aktivitet 2, oppgave 1

Når vi skal finne en regel, er det ofte nyttig å arbeide på en systematisk måte. Vi kaller denne måten å arbeide på for å systematisere, gjette, sjekke og forbedre fordi vi

- først systematiserer opplysningene for å skape en oversikt,
- så gjetter vi hva som kan være regelen,
- deretter sjekker vi om denne regelen passer for alle de tallene vi har;
- hvis denne regelen ikke stemmer for alle tallene, prøver vi å forandre etter forbedre regelen slik at den skal passe for alle tallene.

Ofte må vi gjøre dette flere ganger før vi finner en regel. Det vi her har kalt å gjette, er ikke tilfeldig gjetting, fordi vi bruker den informasjonen vi har samlet, for eksempel fra en tabell.

Oppgave 2

a) **Finn fram regler ved å systematisere, gjette, sjekke og forbedre for hver av tabellene nedenfor.**

Når du mener at du har funnet en regel som passer for alle tallene, skal du bruke den til å fylle ut resten av tabellen. **Skriv til slutt regelen din.**

Starttall	4	7	9	3	0	10
Resultattall	12	21	27	9		

Starttall	5	6	3	10	2	0
Resultattall	12	14	8	22		

Starttall	0	1	3	6	7	100
Resultattall	1	6	16	31		

Starttall	1	3	5	8	12	100
Resultattall	2	8	14	23		

b) **Diskuter og sammenlign dine resultater med partneren din.
Har her kommet fram til samme regel?**

c) En regel kan ofte uttrykkes på ulike måter. Vi kan si innholdet i regelen er det samme, selv om regelen kan uttrykkes ulikt.
**Har dere funnet regler som dere har uttrykt ulikt?
Prøv i så fall å avgjøre om innholdet i reglene likevel er det samme.**

Aktivitet 2, oppgave 2

Kommentarer til oppgave 2

Denne aktiviteten er ganske styrt, og den er tenkt som en hjelp i diskusjoner som kan ha oppstått under arbeidet med "Hva er regelen min?". Gjennom å gi elevene rom for refleksjoner over egne løsninger, legger vi forholdene til rette for læring. Et mål med aktivitet 2 er å bevisstgjøre elevene på hvordan de kan gå fram for å finne en regel. I en innledende fase bør læreren være forsiktig så han/hun ikke for raskt kommer med de "gode tipsene" og de "rette svarene".

Aktivitet 2 tar sikte på å gi elevene erfaring med å systematisere opplysninger og bruke disse til å oppdage en regel og formulere denne regelen med ord. Det vil fortsatt være behov for både oppsummeringer og trening rundt viktige strategier hvor læreren styrer ganske mye. Det advares likevel mot at dette gjøres for tidlig i prosessen. Trening i å formulere seg skriftlig, sammenligne om elevene har funnet fram til samme regel, og ikke minst om elevene uttrykker den på samme måte som andre, vil utgjøre en viktig basis for neste trinn i prosessen mot en "algebraisering". På neste trinn i prosessen er det å lære å uttrykke en regel ved hjelp av bokstavsymboler det sentrale.

Aktivitet 3 "Hva er regelen min?" – *kortform* og bokstavsymboler

Oppgave 1
Vivi og Peter lekte "Hva er regelen min?".

Vivi sa at hennes regel var slik at hun finner resultattallet ved å starte med 2 og så legge til tre ganger starttallet. Peter gjettet at hennes regel var at hvis du multipliserer starttallet med 3 og legger til 2, så får du resultattallet.

Vivi hadde skrevet regelen slik på kortform:
Resultattallet $= 2 + 3 \cdot$ starttallet

Peter hadde skrevet det han gjettet var regelen i *kortform*, slik:
Starttallet $\cdot\, 3 + 2 =$ resultattallet

a) Hadde Peter funnet Vivis regel?
   Diskuter dette med partneren din.

Ofte blir regler ved bruk av vanlig tekst lange og uoversiktlige. Vi kan derfor skrive regelen på det vi kaller kortform. Dette kan være en blanding av ord og matematiske symboler. I matematikk har vi blitt enig om at en bokstav kan stå for en variabel tallstørrelse, slik som starttall og resultattall i vårt eksempel.

b) Velg en bokstav som skal stå for starttallet, og en som skal stå for resultat-tallet. **Skriv Vivis regel slik Vivi beskrev den, og slik Peter beskrev regelen ved å bruke de bokstavene du har valgt for starttall og resultattall.**
   Diskuter dette med partneren din.

Aktivitet 3, oppgave 1

Oppgave 2
Spill "Hva er regelen min?" med partneren din.

Skriv regelen din med bokstavsymboler og skjul så denne lappen.
(Skriv gjerne regelen i *kortform* først, før du "oversetter" til bokstavsymboler.)

Når dere tror at begge har samme regel (fordi den passer for en del forskjellige tall), skal den som har gjettet, også skrive regelen med bokstavsymboler.

Er regelen den samme? Har dere uttrykt regelen på samme måte?

Bytt roller og fortsett å spille på samme måte.

Aktivitet 3, oppgave 2

Oppgave 3
Kari og Nils spilte "Hva er regelen min?"

Har Nils funnet Karis regel?

Forklar hvorfor du mener at svaret til Nils er riktig eller feil.

Diskuter det du har kommet fram til, med partneren din.

Aktivitet 3, oppgave 3

Oppgave 4
Under hver tabell nedenfor er det oppgitt to regler.

For hver tabell skal du avgjøre om ingen, en eller begge reglene er riktige for de tallene som står i tabellen. Du skal begrunne svarene dine.

A

a	1	2	5	10
b	6	9	18	33

$b = 3 \cdot a + 3$ $\quad$ $b = 3 + 3 \cdot a$

B

q	1	2	3	10
p	7	11	15	43

$p = q + q + q + 4$ $\quad$ $p = 4 \cdot q + 3$

C

s	1	2	5	10
t	6	9	18	33

$t = 3 \cdot s + 4 \cdot s$ $\quad$ $t = 7 \cdot s$

D

k	1	2	3	10
j	7	11	15	43

$j = 5 \cdot k^2 + 1$ $\quad$ $j = 4 \cdot k \cdot k + 1$

Aktivitet 3, oppgave 4

Kommentarer til aktivitet 3

Siktemålet med aktivitet 3 er at elevene skal gå fra å beskrive en regel med ord til å bruke det vi har kalt kortform, og til slutt uttrykke regelen med bokstavsymboler. Elevene vil ganske fort få erfaring med at det ofte er komplisert å uttrykke en regel presist og kortfattet med dagligspråk. På den andre siden vil det å bruke bokstaver som symboler for *ukjente* tall, *generaliserte* tall eller *variable* størrelser være et intellektuelt sprang for de fleste elever (se kapittel 1.8). Aktivitet 3 er ett eksempel på hvordan en slik prosess kan startes. Elevene bør få mange, relativt enkle oppgaver som fokuserer på hva som utgjør det matematiske innholdet i en variabel. I kapittel 1.7 ble det pekt på at innholdet har flere sider, for eksempel er en side at en bokstav kan stå for et ukjent, men bestemt tall, mens en annen side er at den variable kan stå for et generalisert tall. Denne forståelsen er avgjørende for at algebra skal kunne bli meningsfull kunnskap og ikke bare regler for å omforme algebraiske uttrykk. I analysen av elevsvar i del 1 har man sett at det er langt flere elever som kan manipulere med symbolene, enn som er i stand til å gi et meningsinnhold til en variabel i et algebraisk uttrykk.

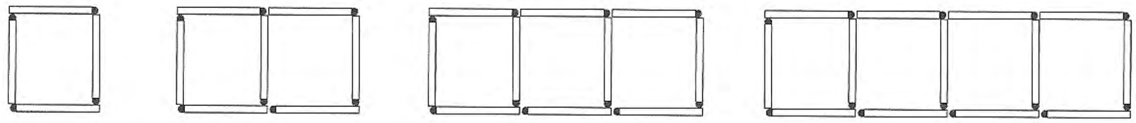
Utgangspunktet i de foregående aktivitetene antas å være kjent for mange elever. I aktivitetene nedenfor vil vi ta et utgangspunkt som fokuserer på mønster og system som kan danne et grunnlag for å få kunnskap om bruk av bokstaver som generaliserte tall.

En måte å tilrettelegge for diskusjon og refleksjon på er å sette ulike løsninger opp mot hverandre. Det kan gjøres på mange måter. I aktivitet 3 skal elevene avgjøre om to regler har det samme innholdet selv om de uttrykkes med ord på ulike måter. Tegneserien som ble brukt i aktivitet 1 som introduksjon til ”Hva er regelen min?”, inneholdt også det element at samme regel kan uttrykkes verbalt forskjellig selv om innholdet er det samme. Omforming av eller manipulering med algebraiske uttrykk baserer seg på en grunnleggende forståelse av at samme regel eller sammenheng kan uttrykkes forskjellig og likevel innholdsmessig være ekvivalent. Det er bra om elevene har erfart at dette også er tilfellet i muntlige og skriftlige beskrivelser av mønstre og regler, før de lærer å omforme algebraiske uttrykk med bokstavsymboler.

4.3 Geometriske mønstre og tallfølger

I kapitlene 2.2 og 2.3 diskuterte vi elevenes svar på to oppgaver som er basert på geometriske følger med tilhørende tallfølger. Arbeid med slike oppgaver kan også være et startpunkt for de aktiviteter som er beskrevet i kapittel 4.2.

Hensikten med slike oppgaver er at elevene skal få erfaringer som kan brukes til å uttrykke generelle beskrivelser av mønstre og sammenhenger ved å bruke algebraisk symbolisering. Å introdusere algebra på denne måten, som et språk som uttrykker sammenhenger mellom to variable størrelser, er ikke det samme som å finne ”verdien til en ukjent” og representerer et klart brudd med det å legge hovedvekten på prosedyreaspektet i skolealgebraen. Målet med slike aktiviteter er at elevene skal oppleve at den kortform man har lagt vekt på i aktivitet 3, er nyttig når slike sammen-henger skal beskrives. Analysen viste at elevene har visse vansker med å finne et mønster, og at de hadde større vansker med å uttrykke mønsteret de har oppdaget, med ord. Det å kunne uttrykke sammenhenger i dette mønsteret generelt ved å bruke bokstaver for et generalisert tall viste seg å være enda vanskeligere. I oppgave 6 Algebra 8 – 10 er det sammenhengen mellom ruter langs kortsiden i rektanglene og ruter totalt som skal uttrykkes. Til slutt skal dette gjøres for alle slike rektangler. Det vi fant i analysen av disse oppgavene, er i tråd med undersøkelser som er gjort i flere land. En mønsterbasert tilnærming til algebra fører ikke automatisk til at elevene gjenkjenner en sammenheng ved hjelp av generaliserte tall (bokstaver).



Figur 3: Mønster av fyrstikker

For eksempel kan vi tenke seg at et mønster av fyrstikker som i figur 3 ovenfor kan beskrives av noen elever som: "Du starter med fire i den første firkanten og legger til tre nye for hver ekstra firkant:" Andre kan kanskje si; "Begynn med en fyrstikk, siden trenger du tre fyrstikker for hvert kvadrat du lager." Ved denne måten å arbeide på blir sammenheng oppfattet som handlinger ("Bruk tre fyrstikker for hvert nytt kvadrat). Slike beskrivelser av sammenhenger ønsker man så å utvikle til beskrivelser som: "Antallet av fyrstikker er tre ganger antallet av kvadrater pluss en fyrstikk." Man uttrykker her en *funksjonssammenheng*.

Det å introdusere algebra på denne måten, som et språk til å beskrive sammenhenger mellom to variable størrelser, synes å gjøre arbeidet med mer komplekse formler og funksjoner lettere. Arbeidet er estetisk tiltalende, for læreren og elevene kan gjøre god bruk av konkret materiell til å bygge mønstre. En annen fordel er at det er mulig for elevene å se *forskjellige* korrekte uttrykk for det *samme* generaliserte mønsteret. For eksempel kunne den første beskrivelsen som er gjengitt ovenfor, resultere i følgende algebraiske uttrykk: $F = 1 + 3 \cdot (K - 1)$, der F er det antall fyrstikker vi trenger for å bygge et mønster med K kvadrater, mens den andre beskrivelsen kunne uttrykkes ved $F = 1 + 3 \cdot K$.

Ved å sammenligne de to uttrykkene har vi også mulighet for å introdusere forestillingen om matematisk likeverdighet. Dette blir videre diskutert i kapittel 4.4.

En rekke studier påpeker at mange elever har betydelige vansker med å utvikle algebraiske regler fra tabeller. De har en tendens til å lete etter en fortsettelse av tabellen (rekursjon) der de lager det neste tallet med utgangspunkt i det forrige.

Antall kvadrater, *K*	1	2	3	4
Antall fyrstikker, *F*	4	7	10	13

Elevene ser hvordan antall fyrstikker øker med tre for hvert nytt kvadrat. Eller litt mer avansert, at når *K* øker med 1, så vil *F* øker med 3. Det er få elever som ser etter en *funksjonssammenheng* som knytter de to variablene sammen, de ser ikke "på tvers" i de tabellene de lager. Elevene lurer kanskje på hvorfor en funksjonssammenheng er viktig og nyttig siden det er så enkelt å oppdage mønsteret i en rad i tabellen. Blant de elever som ser en regel som forbinder de to variable størrelsene, er det få som er i stand til å skrive denne regelen på en algebraisk form. Veien fra å oppdage et mønster eller en sammenheng til å skrive en algebraisk regel er lang og kronglete. Elevene må ta mange kritiske skritt langs denne veien, og kan mangle nødvendige ferdigheter og kunnskap eller ta andre feilaktige beslutninger. Noen av disse kritiske skrittene fra tabell til algebraisk uttrykk er

- vite hva som er irrelevant, og hva som er viktig
- gå videre fra bare å fortsette en rad i tabellen til å finne en sammenheng mellom to variable størrelser som er satt opp i tabellen
- sjekke at mønsteret vi har oppdaget gjelder for alle verdiene i tabellen
- være i stand til å uttrykke sammenhengen på en slik måte at den kan brukes til utregning av nye verdier og generalisering

- vite hvordan en algebraisk sammenheng uttrykkes (for eksempel uttrykker ikke $x+2y$ en slik sammenheng)
- vite hvilke typer sammenhenger som passer til et gitt problem
- vite hva som kan og ikke kan uttrykkes ved grunnleggende algebra
- kjenne den algebraiske syntaksen

Vi vil altså anbefale å bruke geometriske mønstre og tallfølger i arbeidet med å bygge opp kunnskap om funksjonssammenhenger. Videre vil vi reflektere litt over hva som kan være viktig å vektlegge i dette arbeidet.

Som det går fram av andre aktiviteter i denne veiledningen, mener vi det er viktig at vi først beskriver sammenhengene i et geometrisk mønster verbalt og deretter velger en passende beskrivelse som man uttrykker algebraisk. Det er mye som tyder på at en slik fase med verbal beskrivelse nesten er en nødvendig del av det å lære å uttrykke sammenhenger mellom to størrelser. Det kan være på sin plass å peke på at å fokusere for mye på konstante differanser i tabellene kan hindre elevene i å oppdage en funksjonssammenheng. For i eksempel ovenfor: Når K øker med 1, vil F øke med 3. Derfor får vi $F=3\cdot K$... Det kan bli et tankekors for noen elever hvorfor det å addere med 3 automatisk resulterer i 3 ganger noe. Eller sagt på en annen måte: hvorfor den konstante forskjellen i tabellen blir en faktor som vi multipliserer med. Kanskje elevene ikke forstår sammenhengen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon. Det viktige punktet er å oppdage at addisjonen refererer til den ene variable, mens multiplikasjonen knytter den ene variable størrelsen til den andre i dette tilfellet. Vi vil av denne grunn advare mot å lære elevene bare denne typen "prosedyrer".

På den andre siden er det lite trolig at formuleringer som "Du trenger tre flere fyrstikker hver gang du bygger et nytt kvadrat" er en god introduksjon til å oppleve nytten av algebra, siden den rekursive sammenhengen i tabellen er mye tydeligere enn funksjonssammenhengen. Det er derfor viktig å bruke situasjoner der tabellene ikke har tydelige konstante differanser, som for eksempel:

I et forsøk målte vi følgende størrelser *A* og *H*

Størrelse, *A*	4	6	13	22		
Størrelse, *H*	28	42	91	154		

a) Hva tror du *H* ville bli hvis *A* var 30?
b) Hva ville *A* bli hvis *H* var 218?
c) Forklar med ord hvordan du kan finne *H* hvis noen fortalte deg hva *A* var.
d) Bruk algebra til å skrive en regel som knytter *A* og *H* sammen.

Oppgaver av denne typen kan lett settes i en reell kontekst og gir elevene erfaringer med å lete etter funksjonssammenhenger uten å gå veien om rekursjoner.

4.4 Likhetstegnets betydning

Språket vi bruker i tallregning, fokuserer på de svar vi får, mens språkbruken i algebra fokuserer på sammenhenger. Sammenlign for eksempel $234+432=666$ med et typisk algebraisk uttrykk som $2(x+1)=2x+2$. I tallregningen gir likhetstegnet et signal om å finne et svar, se også kapittel 1.5. Hvis elevene bare har denne erfaringen angående likhetstegnet når de skal arbeide med algebra, vil de få store problemer med å knytte et meningsinnhold til algebraiske uttrykk.

Aktivitet 4

Oppgave 1
Vegard og Eva skulle løse denne oppgaven:

Skriv riktig tall i ruten

a) $3 \cdot \boxed{} = 21$ b) $\boxed{} \cdot 2 + 4 = 12$ c) $3 + 2 \cdot \boxed{} = 15$ d) $25 - 2 \cdot \boxed{} = 17$

$3 + 2 \cdot \boxed{6} = 15$

$25 - 2 \cdot \boxed{4} = 17$

Eva

$3 + 2 \cdot \boxed{3} = 15$

$25 - 2 \cdot \boxed{0{,}75} = 17$

Vegard

Hvilke svar mener du er riktige?
Hvordan tror du at den som har gjort feil, tenker?
Skriv hvorfor du mener det.

Etterpå skal du diskutere løsningen med partneren din.

Aktivitet 4, oppgave 1

Oppgave 2
Når det står et likhetstegn mellom to matematiske uttrykk, påstår vi at uttrykkene er likeverdige. På samme måte som i andre språk kan det vi påstår, noen ganger være sant/riktig, andre ganger usant/feil.

Nedenfor er det skrevet tre påstander i vanlig språk:

1) Oslo ligger nord for Trondheim. 2) Solen er varm. 3) Istapper er flytende.

Avgjør hvilke påstander som er sanne. De som ikke er sanne, skal du prøve å gjøre sanne ved å forandre litt på påstanden.

I oppgave 1 kan vi si at både Vegard og Eva påstod at deres svar gjorde at høyre og venstre side av likhetstegnet var like store. I matematikk, som i andre språk, kan det vi påstår, noen ganger stemme og andre ganger ikke.

Aktivitet 4, oppgave 2

Oppgave 3
Nedenfor har vi skrevet noen matematiske uttrykk som vi påstår er like, ved å bruke et likhetstegn. Du skal først avgjøre hvilke av disse påstandene som er riktige, og hvilke som er uriktige. De påstandene som er uriktige, skal du så prøve å gjøre riktige ved å foreta *en* forandring,

Kan du komme med flere løsninger til hver påstand hvor du ved å gjøre en forandring får noe som stemmer?

Til slutt skal du og partneren din diskutere de løsningene dere har kommet fram til.

Påstander:

a) $7 \cdot 3 = 19 + 9$ b) $6 \cdot 4 = 27 - 3$ c) $23 - 11 = 12 + 9$

d) $8 \cdot 6 = 21 + 24 - 3$ e) $7 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 2 + 1$ f) $10 - \frac{6}{2} = 14 - 12$

Aktivitet 4, oppgave 3

Oppgave 4
Du og partneren din lager flere oppgaver til hverandre av samme type som i oppgave 3. Skriv to matematiske talluttrykk som du påstår er like, ved å bruke et likhetstegn.

Dere bytter oppgaver og løser dem ved først å avgjøre hvilke påstander som er riktige, og hvilke som er uriktige.

Kom med så mange løsninger som mulig til hver oppgave på hvordan en enkelt endring kan gjøre at påstanden om likhet stemmer.

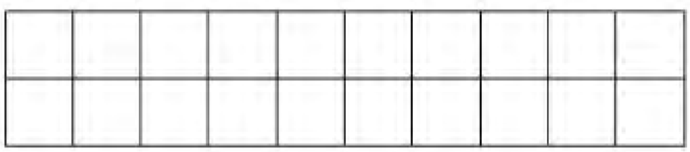
Aktivitet 4, oppgave 4

Oppgave 5
Tegn så mange rektangler med omkrets 24 cm som du kan, på et ruteark.

For hvert rektangel du har tegnet, skal du skrive en likhet for omkretsen.

For eksempel vil omkretsen av rektanglet nedenfor kunne gi denne likheten:

$24 = 2 + 10 + 2 + 10$



Aktivitet 4, oppgave 5

Kommentar til aktivitet 4

I del 1 er det en rekke ganger pekt på det viktige i å knytte algebra nærmere til aritmetikken (se for eksempel kapittel 1.4) og likedan at mange av de problemene som elevene viser seg å ha i algebra, kan tilbakeføres til sviktende kunnskaper i aritmetikk. I aktivitet 4 viser vi eksempler på hvordan elevene kan arbeide med oppgaver som kan bidra til refleksjon rundt det at likhetstegnet uttrykker en likeverdighet mellom uttrykk, i tillegg til at det også kan oppfattes som et resultat av en regneoperasjon. Elevenes svar på oppgave 1 Algebra 8 – 10 viste at mange er usikre på hvordan de skal regne ut uttrykk som inneholder flere regneoperasjoner.

Konvensjonene om prioritering mellom regneartene er viktige i aritmetikken, men det er ikke sikkert at alle elever har gjort bevisste erfaringer med dette. Oppgave 1 i aktivitet 4 er et eksempel på hvordan elevene kan få erfaring med dette, mens oppgavene 3 og 4 spesielt tar opp likhetstegnets betydning. I oppgave 2 kan elevene lett se hva som er sant og ikke i påstandene uttrykt med ord. Hensikten er at elevene skal erfare at små gjerne litt varierte endringer kan gjøre påstandene sanne. Her vil det kanskje være naturlig å endre påstand 1 ved å bytte ut nord med sør, og i påstand 3 å legge til ordet ikke. Det er lett å lage flere slike eksempler, men ofte vil elevene raskt oppfatte poenget slik at de kan gå videre i arbeidet med matematiske påstander.

Forholdene ligger vel til rette for at elevene kan lage oppgaver for hverandre, slik som beskrevet i oppgave 4 i aktivitet 4. Det største problemet når elever skal gjøre det, er ofte at de lager for kompliserte oppgaver. Læreren kan da eventuelt foreslå begrensninger på hvor mange ledd det er tillatt å ha på hver side av likhetstegnet, i alle fall i en innledningsfase.

Elevene trenger varierte erfaringer med bruk av likhetstegnet i ulike sammenhenger. De trenger å erfare at likhetstegnet ikke alltid betyr at de skal utføre en regne-operasjon. I oppgaver av typen $5{,}7+9{,}2=$ ______ og $4{,}2-2{,}6=$ ______ vil likhets-tegnet, naturlig nok, oppfattes som en beskjed om å utføre en regneoperasjon for å finne et svar. Lar vi elevene arbeide med oppgaver av typen $5{,}7+9{,}2=8{,}7+$ _____ og _____ $=5{,}7+9{,}2$, kan elevene utfordres til å reflektere rundt andre betydninger av likhetstegnet. Den siste typen oppgaver er også ganske vanlige i lærebøker, men elevenes oppfatning vil avhenge av hvordan læreren bruker oppgavene.

En type oppgaver som er av lignende type som i eksemplet ovenfor, er at elevene blir bedt om å skrive så mange likheter som mulig med utgangspunkt i for eksempel $5+9=$ ______. De kan skrive likheter som $5+9=10+4$, $5+9=2\cdot 7$, $5+9=19-2-3$ osv. Slike oppgaver kan også bli oppgaver som elevene løser mer eller mindre automatisk uten å reflektere over hva de gjør. Oppgave 4 vil kunne være en variant til de typer oppgaver som er skissert ovenfor.

I oppgave 5 skal elevene skrive så mange likheter som mulig. Å se begrunnelsene bak disse sammenhengene krever en generalisering av egenskaper til tall som i realiteten er dypt algebraisk. I tillegg til å observere at alle rektanglene har omkrets 24 cm, kan elevene oppdage at de ulike rektanglene vil ha forskjellig areal. For eldre elever kan denne oppgaven gjøres mer utfordrende ved å bruke andre enheter enn 1. Prøv for eksempel 0,2 eller $\frac{1}{2}$. Skal oppgaver av denne typen bidra til å styrke elevenes læring slik at de får et bedre utgangspunkt for algebra, må de følges opp med diskusjoner og refleksjon.

Det kan være hensiktsmessig eksplisitt å ta opp likhetstegnets ulike betydninger avhengig av i hvilken sammenheng det inngår. Men på samme måte som da vi diskuterte ulike måter å bruke bokstavsymboler på (aktivitet 3), bør vi ikke starte med å forklare at likhetstegnet har ulike betydninger. Kunnskapen om og forståelsen av det vil sannsynligvis bli langt bedre hvis vi starter med ulike aktiviteter der elevene blir utfordret til å reflektere over egne erfaringer og diskutere sine tanker med andre før oppsummeringer av viktige hovedpunkter blir gjort av læreren.

4.5 Å forstå egenskapen til tall og regneoperasjoner

En av de aktivitetene elevene bruker mesteparten av tiden sin til i algebra, er å omforme algebraiske uttrykk som for eksempel $a-(b-c)=(a-b)+c$. Hvis elevene skal forstå hva som foregår her, må de vite hvordan subtraksjon fungerer. Skulle de glemme reglene for hvordan de omformer algebraiske uttrykk, kan de med kunnskaper om regneoperasjonene gå tilbake til aritmetikken i spesielle tilfeller for å se hva som hender med bestemte tall i stedet for bokstaver. For å kunne gjøre det, trenger de å ha gjort erfaringer som "Hvis jeg trekker fra 1 *mindre*, så bli svaret 1 *større*." De må forstå dette så godt at de ikke trenger å sjekke det ved for eksempel å regne ut begge sider av $4032{,}17-(137{,}7-1)=(4032{,}17-137{,}7)+1$.

Oppgaver av den typen som det er gitt eksempler på i oppgave 1 nedenfor, tar sikte på å knytte denne viktige forbindelsen mellom aritmetikk og algebra.

Aktivitet 5 Egenskaper til tall og regneoperasjoner

Oppgave 1

a) **Finn svaret på denne oppgaven:** 303,7 – 25,8 =
Bruk kalkulator om du vil.

b) **Skriv svarene på disse subtraksjonsoppgavene uten å trekke tallene fra hverandre. Forklar hvordan du vet at svarene er riktige.**

303,7	303,7	303,7	303,7	303,7	303,7
– 25,9	– 25,7	– 26,8	– 35,8	– 15,8	– 28,8

c) **Finn svaret på denne oppgaven:** 62,14 – 19,89 =

d) **Lag seks andre subtraksjonsoppgaver som har samme svar som i oppgave c. Forklar hvordan du endret tallene 62,14 og 19,89.**

Aktivitet 4, oppgave 1

Elever som har mangelfull forståelse av tallenes egenskaper, er sjelden opptatt av hvordan en endring i rekkefølgen mellom tallene i et regnestykke påvirker svaret. Dette har stor betydning for rekkefølgen av de regneoperasjoner som må utføres i sammensatte uttrykk. Noe av dette har vi tidligere behandlet i aktivitet 4. Den neste oppgaven tar utgangspunkt i et arbeid i en klasse på 8. årstrinn.

Oppgave 2

a) Kari, Petter og Ella skulle finne hva svaret blir hvis de starter med 3, multipliserer med 5, deretter adderer 9 til dette svaret og så dividerer det siste svaret med 3. De skrev dette regnestykket: $3 \cdot 5 + 9 : 3$. De fikk forskjellige svar.

Kari sa: "Jeg vet at $3 \cdot 5$ er 15, og jeg vet at 9 : 3 er 3, så svaret må bli 15 + 3, altså 18."

Petter sa: "Nei, det er feil. Det er et tretall først og delt på 3 til slutt. Du kan forkorte disse treerne. Vi får altså 5 + 9, altså 14."

Ella sa: "Jeg tror svaret er 8, fordi du må regne ut fra venstre mot høyre. Tre ganger 5 er 15, og 15 + 9 er 24 delt på 3 er 8."

Har Kari rett? Har Petter rett? Har Ella rett?

b) Kan du forandre svarene på noen av regnestykkene nedenfor ved å sette inn parenteser?

1) $6 \cdot 12 \cdot 3$ 2) $6 \cdot 12 : 3$ 3) $6 \cdot 12 - 3$ 4) $6 \cdot 12 + 3$

c) Velg tre tall. Hva ser du? Hva hender hvis du bruker brøker? Prøv for eksempel

$$6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \quad \text{og} \quad 6 \cdot \frac{1}{3} + 3$$

Aktivitet 4, oppgave 2

4.6 Bruk av bokstavsymboler

I kapittel 1.2 ble ulik bruk av matematikk diskutert. I denne sammenheng har det algebraiske symbolspråket en tosidig rolle, dels det å representere ulike størrelser og sammenhenger, dels det å bruke symbolspråket til å omforme de matematiske sammenhengene eller det symbolske uttrykket for dermed å få fram nye aspekter ved en gitt situasjon/kontekst. Når vi skal arbeide algebraisk, er det nødvendig å beherske alle fasene som er diskutert i kapittel 1.2. I gjennomgangen av elevenes svar har vi flere ganger pekt på den tradisjon at relativt mye tid har vært brukt til å manipulere symboler på bekostning av det å representere og tolke størrelser og sammenhenger.

For å forstå at symboler kan representere variable størrelser, trenger elevene å få bred erfaring i å "oversette" fra en situasjon til et algebraisk uttrykk og fra et algebraisk uttrykk til en situasjon. I denne sammenhengen vil en av lærerens oppgaver bli å fungere som en "hjelpetolk" for elevenes oversettelser mellom situasjonen beskrevet i et hverdagsspråk og den samme situasjonen beskrevet med matematiske bokstavsymboler.

Det viser seg at å ”oversette” fra et algebraisk uttrykk til en situasjon er vanskeligere enn å gå den motsatte veien. I oppgave A Algebra 8 – 10 skulle elevene skrive en regnefortelling som passet til uttrykket $3a+2a=5a$. Denne oppgaven avslørte ulike typer av vansker.

4.6.1 Fra situasjon til algebraisk uttrykk

Aktivitet 6 Fra ord til symboler

Læreren introduserer for elevene at algebra er et nyttig redskap til å løse problemer. Det kan pekes på følgende:

- Ofte er det nyttig å kunne gå fra en situasjon beskrevet med ord til å uttrykke det samme ved hjelp av bokstavsymboler.
- Vi kaller dette å oversette fra ord til bokstavsymboler. Vi kan sammenligne dette med å oversette fra ett språk til et annet.
- Nedenfor finnes forslag til noen oppgaver som kan hjelpe elevene med oversettelse fra ord til bokstavsymboler.
- Elevene bør i disse aktivitetene arbeide sammen med en partner som de diskuterer med.

Læreren bør passe på at begge elever deltar aktivt. De skal skifte på å være den som snakker, og den som lytter. Gangen i arbeidet bør så poengteres:

- Elevene leser nøye igjennom det som står skrevet i oppgaven. Den ene forteller den andre hva oppgaven går ut på.
- Elevene skal bli enige om hvilke størrelser som er ukjente i oppgaven. De skal så bli enige om hvilke symboler de vil bruke for de ukjente størrelsene. De bør skrive ned hvilke symboler som brukes, og hva de står for.
- Deretter skal de skrive et uttrykk hvor disse symbolene blir brukt til å uttrykke hva som er innholdet i den situasjonen som er beskrevet med ord i oppgaven.
- Til slutt skal en av elevene forklare for den andre hva symbolene og symbol-uttrykket betyr. Dette blir gjort for å sjekke at de er enige om, og har en klar forståelse av, hva som ligger i symbolene og symboluttrykket.

Oppgave 1

Lena legger fliser på gulvet i baderommet. Mønsteret har dobbelt så mange blå fliser som hvite fliser.

a) En av dere skal fortelle den andre hva som er innholdet i oppgaven. Bli enige om innholdet.

b) Hva er ukjente størrelser i den situasjonen som er beskrevet?

c) Hvilke symboler velger dere å bruke for de ukjente størrelsene?

d) Skriv et symboluttrykk for denne situasjonen ved å bruke de symboler dere har valgt i c). Vi kaller dette å oversette fra ord til symboler.

e) Lag en tegning av gulvet med blå og hvite fliser.

f) Undersøk om det dere får når dere teller på tegningen, er det samme som det dere får når dere bruker tall, ved å bruke symboluttrykket i d).

Aktivitet 6, oppgave 1

Oppgave 2

En fabrikk lager to forskjellige størrelser av poser med seigmenn. De har bestemt at det skal være fire ganger så mange røde som gule seigmenn i alle posene.

a) Beskriv med egne ord hva som er innholdet i situasjonen ovenfor.

b) Hva er ukjente størrelser i denne situasjonen?

c) Hvilke symboler velger dere å bruke for de ukjente størrelsene?

d) Oversett denne situasjonen fra ord til matematiske symboler.

e) Velg noen verdier som dere bruker til å sjekke om det uttrykket dere har satt opp, stemmer.

Aktivitet 6, oppgave 2

Oppgave 3

Jan har dobbelt så mange penner i pennalhuset som Nils har. Dette kan skrives i kortform på denne måten:

Jans antall penner $= 2 \cdot$ Nils´ antall penner

Hvis vi velger følgende bokstaver som symbol for de ukjente størrelsene:

Nils´ antall penner $= a$
Jans antall penner $= b$

så kan vi skrive dette i *matematisk symbolspråk* slik: $b = 2 \cdot a$

Diskuter hver av situasjonene som er beskrevet i ord nedenfor, og skriv først hvordan det blir i kortform. Bestem deretter hvilke symboler dere vil bruke for de ukjente størrelsene. Til slutt skal dere oversette situasjonen til et matematisk symbolspråk.

a) Rita har tre ganger så mange penner som Nils.

b) Anders har halvparten så mange penner som Nils.

c) Sara har to penner mer enn Jan.

d) Mai-Linn hadde like mange penner som Nils. Hun delte sine penner likt med sine brødre. Hvor mange har hun nå?

Aktivitet 6, oppgave 3

Oppgave 4

Morten skryter av at han har 11 Hondaer hjemme på gården sin. De er enten motorsykler eller biler. Til sammen har kjøretøyene hans 36 hjul. Hvor mange Hondaer av hvert slag har Morten? Anne brukte et regneark for å løse problemet.

	A	B	C	D
1	Antall biler	Antall motorsykler	Hjul til sammen	
2	1	=11-A2	=4*A2+2*B2	
3	=A2+1			
4				
5				
6				
7				
8				
9				

a) Hvorfor skriver hun 11 – A2 for antall motorsykler?

b) Hvorfor skriver hun 4*A2 + 2*B2 for antall hjul til sammen?

c) Hvorfor skriver hun A2 + 1 for neste antall biler?

d) Bruk regnearket til Anne til å lage en tabell. (Kopier formlene nedover.)

e) Morten sier at av de 11 Hondaene er det et ukjent antall biler, *x*.

Skriv et uttrykk med *x* som forteller oss hvor mange hjul han da har.

Aktivitet 6, oppgave 4

Kommentarer til aktivitet 6

Det ble innledningsvis poengtert at vi bør bestrebe seg på å bruke et språk som ligger nær opp til elevenes dagligspråk i aktivitetene. Vi ønsker i starten å arbeide seg gradvis fra dagligspråk til algebraiske uttrykk med samme meningsinnhold.

I aktivitet 6 starter elevene med å diskutere innholdet i den teksten som beskriver situasjonen. Det at elevene i fellesskap diskuterer seg fram til enighet om hva en oppgave går ut på, før de begynner å "gjøre noe", er derfor en vesentlig del av prosessen. Dette er en tilnærming til en tekstoppgave som vil kunne gi elevene en bedre forståelse av teksten. Oppgavene tar videre sikte på å lære elevene til å reflektere rundt hvilke størrelser som er ukjente, og i samarbeid til å kunne oversette fra tekst til matematiske symboler. Det er viktig at læreren hele tiden oppmuntrer elevene til åpne diskusjoner seg imellom.

Språket i oppgave 1 er noe oppkonstruert sammenlignet med hvordan vi oftest ville uttrykke dette i dagligspråk. "Lena trenger dobbelt som mange blå fliser som hvite fliser til baderommet" er nok mer dagligdags måte å uttrykke seg på. Vi har valgt formuleringen for at situasjonen beskrevet i ord skal være nærmere det matematiske symbolspråket. En situasjon beskrevet med dagligspråk vil ofte kunne gi assosiasjoner til omvendte algebraiske sammenhenger av dem som er korrekte når vi oversetter til bokstavsymboler. Ved å omforme oppgaven slik at vi bruker "er lik", vil den muntlige formuleringen ligger nærmere slik vi uttrykker denne sammenhengen. Ulempen er at språket vil da kunne virke oppstyltet. I oppgavene 2 og 3 har vi ikke gjort slike omforminger. Teksten i disse oppgavene er mer i samsvar med en dagligdags måte å uttrykke seg på. Elevene bør selv erfare hvor lett det er å sette opp slike sammenhenger motsatt, før læreren retter deres oppmerksomhet spesielt mot dette problemet.

Her gis bare noen få eksempler på oppgaver og hvordan de kan danne utgangspunkt for diskusjon i klassene. Elevene bør trolig få arbeide med flere oppgaver av denne typen før de går videre. Vi kan gjerne ta utgangspunkt i oppgaver fra læreboka, det viktige er å legge hovedvekten på at elevene skal diskutere rundt det å gå fra tekst til bokstavsymboler.

Oppgave 4 kan løses ved å bruke tabeller der man systematisk varierer for eksempel antall biler og deretter regner ut antall hjul for hver situasjon. Algebra er altså ikke et nødvendig redskap for å løse dette problemet. Vi har her valgt å bruke regneark som et eksempel på et annet redskap som er effektivt til å finne løsninger på slike problemer. En fordel med regnearket i denne sammenhengen er at det tydeliggjør visse deler av meningsinnholdet til variabler, og derfor er en god introduksjon til algebra.

Når elevene har fått en del erfaring med dette, vil tiden være moden for å fokusere spesielt på problemet med å sette opp sammenhengen motsatt. I aktivitet 7 kommer det forslag på oppgaver som skal hjelpe elevene til å reflektere over hvorfor de gjør en slik feil, og hvordan de kan unngå å gjøre den. Igjen er det å tilrettelegge for diskusjon og refleksjon som er den viktige oppgaven for læreren. Det å være rask med å fortelle elevene hva de skal gjøre, uten at de har fått den tilstrekkelige tiden til selv å diskutere, vil antakelig ikke gi den ønskede læringseffekten.

Aktivitet 7 Problemet "omvendt sammenheng"
Læreren introduserer problemet ved å fokusere på at

- elevene kanskje allerede har lagt merke til at de må passe på når de oversetter fra tekst til bokstavsymboler. Det er fort gjort å skrive den algebraiske sammenhengen den motsatte veien. Understrek at den måten en sammenheng er beskrevet på i tekst, gjør at denne feilen lett kan forekomme. Dagligspråket kan ikke da oversette det til et matematisk symbolspråk direkte
- dette kan sammenlignes med når en oversetter fra for eksempel norsk til engelsk. Vi kan da vanligvis heller ikke oversette ord for ord hvis oversettelsen skal bli god. Vi må ta hensyn til reglene for hvordan det enkelte språk er bygget opp, det vil si språkets innebygde logikk. På samme måte er logikken i det matematiske språket forskjellig fra vårt dagligspråk
- oppgavene i aktivitet 7 kan hjelpe elevene til å bli klar over problemet. Oppgavene har som siktemål å gi elevene noen ideer om hva de kan gjøre for å unngå å sette opp en matematisk sammenheng den omvendte veien.

Oppgave 1
Noen elever ble bedt om å oversette en sammenheng beskrevet i ord til bokstav-symboler. De skulle også skrive hva symbolene de brukte, stod for.

Her er sammenhengen beskrevet i vanlig tekst:

"I en klasse er det dobbelt så mange øyne som det er neser."

ø står for øyne.
n står for neser.

Oversatt til symbolspråk får vi da
$2 \cdot ø = n$

Gruppe A

ø står for antall øyne.
n står for antall neser.

Oversatt til symbolspråk får vi da
$ø = 2 \cdot n$

Gruppe B

Studer disse to løsningene nøye.

Hvilken av de to løsningene mener du er den riktige?
Skriv hvorfor du mener at den er riktig.

Bruk tabeller med verdier for de to løsningene til hjelp for å avgjøre hvilken løsning som er riktig.

Hva er forskjellen på den måten de to gruppene skriver hva bokstavsymbolene står for? Hvilken av disse måtene mener du er den riktige?

Skriv hvorfor du mener at den er riktig.
Diskuter hele oppgaven med partneren din og bli enige om et felles svar og en felles begrunnelse.

Aktivitet 7, oppgave 1

Oppgave 2
Noen elever ble bedt om å oversette følgende fra ord til symboler:

”Et rektangel er tre ganger så langt som det er bredt:”

Gruppe A skrev følgende uttrykk for denne sammenhengen mellom lengde og bredde:

$$l = 3 \cdot b$$

Gruppe B skrev følgende uttrykk for denne sammenhengen mellom lengde og bredde:

$$3 \cdot l = b$$

a) **Elevene lot l stå for lengden og b bredden. KURSIV**
   Diskuter hva hvert av uttrykkene betyr.

b) **Hvilket uttrykk mener dere gir en riktig beskrivelse av denne sammenhengen?**

Aktivitet 7, oppgave 2

Etter at elevene har gjort disse oppgavene, kan det være nyttig med en klasse-diskusjon. Det gir læreren mulighet til å peke på hvordan vi kan bruke tabeller over samsvarende verdier for å kontrollere de uttrykkene vi har satt opp.

Det er også viktig at elevene blir vant til å omformulere en setning ved bruk av vanlig språk. En annen måte å beskrive situasjonen i oppgave 1 på kan være: ”Antall øyne er lik to ganger antall neser.” Ved å beskrive denne sammenhengen på denne måten med ”er lik” er det ofte lettere å oversette fra ord til matematisk symbolspråk. I klassediskusjonen kan dette bringes inn.

Oppgave 3

I alle de situasjonene som er beskrevet nedenfor, skal du først omforme måten situasjonen er beskrevet på, til en setning som inneholder ”er lik”. Skriv denne setningen og bruk den som utgangspunkt til å uttrykke sammenhengen med symboler. Dere skal så sammenligne og diskutere det dere har skrevet ned. Til slutt skal dere lage tabell for å sjekke at det dere har satt opp, stemmer.

a) Det er seks ganger så mange høner som haner på mange bondegårder.
Omform setningen slik at den inneholder ”er lik”. Oversett til et matematisk symboluttrykk.
Lag tabell med noen verdier for å kontrollere om det symboluttrykket dere har satt opp, stemmer.

b) I mange butikker er prisen på Flax sjokolade fem ganger prisen på Fix sjokolade. Omform setningen, oversett til symboluttrykk og kontroller uttrykket ved hjelp av en tabell.

c) På mange typer arrangementer er prisen for barn halvparten av prisen for voksne.

d) I alle saueflokker er antallet sauer fjerdeparten av antallet bein i flokken.

Aktivitet 7, oppgave 3

Kommentarer til aktivitet 7

Problemet med at vi setter opp en motsatt sammenheng når vi bruker algebra, er knyttet til en forskjell i struktur mellom dagligspråk og algebraisk språk. Det er her et helt nytt språk som elevene skal føres inn i. Når elever så gjør feil, kan vi ikke påstå at de har en misoppfatning. De må først vinne erfaringer med den nye strukturen. Gjennom refleksjon og diskusjon, basert på omforming av ulike måter å uttrykke sammenhenger på gjennom vanlig språkbruk og i bokstavuttrykket, og ved å lære elevene å kontrollere resultatet etterpå, tar disse oppgavene sikte på å øke forståelsen både av hva problemet gjelder, og av hvordan man kan hanskes med det.

I oppgave 1 i aktivitet 6 skulle eleven lage en tegning av et baderom. Det å lage en tegning, en illustrasjon eller et diagram kan ofte være til hjelp. Ved å sammenligne det vi får når vi setter inn verdier i uttrykket med bokstavsymboler, med det vi får når vi teller opp på tegningen, kan vi kontrollere det vi har gjort. Det er vår erfaring at det er få som gjør feil når de arbeider med tegningen, mens det er lett å gjøre feil når vi setter opp sammenhengen ved hjelp av bokstavsymboler.

Når vi i denne aktiviteten starter med en oppgave med nese og øyne, er det fordi det er en kontekst hvor det er lett for elevene ved hjelp av et par verdier å avgjøre om det symboluttrykket de har satt opp, stemmer eller ikke. Oppgave 3 er et eksempel på oppgaver som bør brukes etter at vi har vært igjennom en del stoff, og der elevene trenger trening i det nye de har lært seg. På samme måte som vi trener på andre ferdigheter i matematikk, bør også slike råd som mer går på å bli klar over språklige problemer med å oversette fra ord til bokstavsymboler, trenes inn. På lengre sikt kan kanskje også slike operasjoner bli mer automatisert. Hvis elevene har fått forståelse av dette, vil en automatisering være en fordel. Det er når den grunnleggende forståelsen mangler, at nytten av en automatisering er tvilsom.

4.6.2 Fra algebraisk uttrykk til en konkret situasjon

Aktivitet 8 Fra algebraisk uttrykk til en konkret situasjon
Lærerens introduksjon kan ta utgangspunkt i å lage regnefortellinger som passer til algebraiske uttrykk. Det å oversette fra algebraiske uttrykk til vanlig språk er ofte vanskeligere enn å gå den motsatte veien. Lærerens introduksjon bør også omfatte at for å få en idé om en situasjon som passer, lønner det seg å tenke grundig over hva de enkelte bokstavsymbolene kan stå for. Vi kan for eksempel bruke følgende eksempel:

Sammenhengen $u = 3 \cdot v$ er gitt. Hvis jeg vet at u står for antallet sjokolader som Unni har, og v står for antallet sjokolader som Vera har, kan jeg beskrive denne sammen-hengen slik med ord: *Det antallet sjokolader som Unni har, er lik tre ganger det antallet sjokolader som Vera har.*

Vi har da uttrykt sammenhengen i en setning som inneholder "er lik". I dagligspråk ville vi kanskje heller si det på denne måten: *Unni har tre ganger så mange sjokolader som Vera.*

Oppgave 1

s står for antall sjokolader som Siri har, og *t* står for antall sjokolader som Tore har.

Forklar med ord hva hvert av uttrykkene nedenfor betyr.
Lag en setning som forklarer hvert uttrykk, og hvor du bruker "er lik".

a) $s = t + 1$ b) $s = 2 \cdot t$

c) $s = 2 \cdot t + 1$ d) $t = s + 3$

Aktivitet 8, oppgave 1

Oppgave 2

Marit og Marius diskuterte hvordan de ville forklare uttrykket nedenfor:

$$n = 3 \cdot b$$

n står for det totale antallet boller
b står for antallet boller i hver pose

De ble enige om at uttrykket fortalte dem det totale antallet boller i tre poser.

a) Er du enig i deres forklaring? Hvis du ikke er enig, hva mener du at uttrykket forteller?

b) Kan du beskrive en situasjon som passer til uttrykket $n = (3 \cdot b) + 3$?

c) Kan du beskrive en situasjon som passer til uttrykket $n = 3 \cdot (b + 1)$?

d) Beskriver uttrykkene i b) og c) forskjellige situasjoner?
Forklar hva du mener.

Hele oppgaven skal diskuteres med din partner.

Aktivitet 8, oppgave 2

Oppgave 3

For hvert bokstavuttrykk nedenfor skal du tenke deg en mulig situasjon som uttrykket kan beskrive. Bestem selv hva bokstavuttrykkene skal stå for.

Skriv hva de vil at bokstavsymbolene skal stå for.
Lag en regnefortelling som beskriver en situasjon som passer med uttrykket.
Skriv regnefortellingen.

a) $s = 2 \cdot t + 1$ b) $m - 2 = d$

c) $n = m - 8$ d) $p = 3 \cdot r + 4$

Dere skal lese hverandres regnefortellinger og diskutere dem. Har dere klart å beskrive situasjoner som uttrykkene kan stå for? Bli også enige om en måte å sette opp hva bokstavsymbolene står for.

Aktivitet 8, oppgave 3

Kommentarer til aktivitet 8

I kapittel 3.6 ble svar på å skrive en matematikkfortelling til uttrykket $3a+2a=5a$ analysert. Vanlige feiltolkninger i denne oppgaven var at

- bokstaven a ble oppfattet som et konkret objekt eller en merkelapp for dette konkrete objektet
- bokstaven a ble oppfattet som et udefinert objekt
- $3a$ og $2a$ ble oppfattet som helhetlige objekter

I algebraiske uttrykk står bokstavene for variable størrelser. Elevene må derfor få anledning til å vinne erfaring med i hvilke sammenhenger bokstaver brukes i algebra. *Fokus må rettes mot å bruke bokstavene som symboler for variable størrelser*.

Aktivitet 9 Regler fra dagliglivet
Vi bruker mange regler i hverdagslivet for å beregne sammenhengen mellom størrelser. Ofte gjør vi det nesten automatisk og uten å tenke over at vi bruker en form for matematikk. Noen ganger er reglene skrevet med bokstavsymboler, andre ganger er de skrevet med ord.

I de følgende oppgavene skal vi arbeide med noen slike regler fra dagliglivet og med å oversette disse fra ord til symboler eller omvendt.

Oppgave 1

Steiketiden for lammestek er avhengig av vakten på steken. I kokeboken står det at vi skal la steken stå i ovnen i 25 minutter for hvert kilogram den veier, pluss 20 minutter ekstra.

a) Hva er de variable størrelsene i denne situasjonen?

b) Bestem hvilke bokstavsymboler du vil bruke for de variable størrelsene, og skriv et symboluttrykk som viser regelen for steking av lammestek.

c) Hvor lang tid vil det ta å steke en lammestek på 2,5 kg?

Aktivitet 9, oppgave 1

Oppgave 2

Ofte beregner vi hvor mye medisin et barn skal ha, ved å ta utgangspunkt i det som er en normal mengde for en voksen person. Regelen for å beregne mengde med medisin som et barn skal ha, er i en brosjyre beskrevet på følgende måte:

$$\text{Barnets mengde medisin} = \text{voksen mengde} \cdot \frac{\text{barnets alder i år}}{\text{barnets alder i år} + 12}$$

Her er regelen satt opp med en blanding av ord og matematiske symboler (pluss, likhetstegn, brøkstrek). Vi kaller dette å beskrive en sammenheng i *kortform*. Det lønner seg ofte å bruke en kortform fordi en beskrivelse med bare ord kan bli lang, og en beskrivelse med bare symboler kan være vanskeligere å forstå. En kortform kan ofte være en god mellomstasjon på veien.

a) Lag en regnefortelling som beskriver bare med ord, det som kortformen ovenfor forteller om hvordan vi beregner mengden av medisin for et barn.

Velg bokstavsymboler for barnets alder, for mengden av medisin som et barn skal ha, og for mengden av medisin som en voksen skal ha.

b) Skriv regelen for å beregne et barns medisinmengde med bokstavsymboler.

c) En voksen dose av en medisin er 50 ml.
Hvor mye skal et tre år gammelt barn ha av samme medisin?

Aktivitet 9, oppgave 2

Kommentarer til aktivitet 9

Aktivitet 9 tar sikte på å vise elevene at sammenhenger mellom variable størrelser er noe vi ofte støter på i dagliglivet. Dette kan brukes som et utgangspunkt for å diskutere nytten av algebra. Det er viktig at elevene erfarer at matematikk ligger *implisitt* i mye av det de gjør, uten at de tenker over det. Spesielt gjelder det å finne slike tilknytningspunkter for lærestoffet i algebra, som ellers lett kan bli begrenset til en meningsløs manipulering med symboler.

Det finnes utallige eksempler på slike regler som kan brukes som utgangspunkt for diskusjoner i klasserommet. Hvor mye garn som trengs for å strikke gensere i ulike størrelser, og hvor mye bensin en bil trenger for å kjøre ulike strekninger, er to slike eksempler. Vi mener at det er viktig å dvele ved eksempler av denne typen som finnes i lærebøkene. Arbeidet med slike eksempler bør organiseres på en måte som gjør at alle elever blir aktivt involvert, se innledningen til del 2. Dette arbeidet gir ikke samme læringsutbytte dersom oppgavene bare skal løses individuelt og eventuelt forklares ved en klassediskusjon. I store klasser kan ikke alle elever få tilstrekkelig tid til å sette ord på sine tanker i en klassediskusjon.

Referanser

Bergsten, C., Häggström, J & Lindberg, L. (1997). Algebra för alla. *Nämnaren* TEMA. Göteborgs universitet. Göteborg.

Breiteig, T. & Venheim, R.(1999), *Matematikk for lærere 2*. Tano Aschehoug, Oslo.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Kerry, T. (1981). Talking: The teacher´s role. I C. Sutton (ed.): Commmunicating in the Classroom. London: Hodder & Stoughton

Kieran, C. (1984). Constructing meaning for equations and equations solving. I: A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (ed.). *Theory, research and practice in mathematics education* (s. 243 – 248). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Kücheman, D. (1981). Algebra. I: K.Hart (red.) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16, s. 102-119. London: John Murray.