Utdanningsdirektoratet

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Funksjoner

Bokmål

INNLEDNING

Dette ressursheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til Læringsstøttende prøverom emnet *Funksjoner*. Spesielt retter disse oppgavene seg mot funksjonsbegrepet i grunnskolen.

Disse oppgavene er prøvd ut tidligere etter L97. Prøvene kan brukes fra 8. – 10. årstrinn etter Kunnskapsløftet LK06. En del av oppgavene er prøvd ut på mellomtrinnet i L97, mens elevene etter LK06 skal kunne prøves i *Funksjoner* på 8. årstrinn og opp til 10. årstrinn. Vi har likevel tatt med statistikk fra den opprinnelige utprøvingen på mellomtrinnet i L97, da det kan være interessant.

Del 1 i dette ressursheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger basert på utprøvingen av oppgavene.

Oppgavene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved elevens forståelse av forskjellige sider ved funksjonsbegrepet i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisningen, slik at elevene kan utvikle en så solid begrepsforståelse som mulig.

Analysen, som utfyller de veiledningstekster som knyttes til den enkelte oppgave i den digitale prøven, er likevel ikke fullstendig. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begreps-dannelse innenfor temaet funksjoner.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer og veiledninger, som retter seg mot de vansker som kartleggingsoppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan kartleggingsoppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg på bakgrunn de vanskene som elevene har.

DEL 1 ANALYSE AV OPPGAVENE I LÆRINGSSTØTTENDE PRØVER

FUNKSJONER

I denne delen blir ulike sider av funksjonsbegrepet analysert og diskutert. Noen av de de diagnostiske oppgavene er noe modifisert sammenlignet med de opprinnelige oppgavene, mens andre en uforandret. Hovedvekten er lagt på den grafisk siden av funksjonsbegrepet, men andre sider ved funksjonsbegrepet er også trukket inn.

Det deltok 106 klasser på 5. årstrinn og 88 klasser på 7. årstrinn og 87 klasser på 9. årstrinn i datainnsamlingen. På disse årstrinnene var det omtrent 1900 elever på hvert årstrinn som deltok. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulik størrelse.

Blant de elevene som besvarte prøvene, har vi trukket ca. 500 elever. Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen er følgende:

Funksjoner: 488 på 5. årstrinn, 486 på 7. årstrinn og 471 på 9. årstrinn

Kapittel 1 Koordinatsystemet og funksjoner

Hvilke ideer har elevene om koordinatsystem og funksjoner i grunnskolen? Fra å være et begrep som tidligere har vært innført først på høyere årstrinn, kom funksjons-begrepet inn på barnetrinnet med Mønsterplanen av 1974. Siden har dette området fått en styrket stilling innenfor grunnskolematematikken.

Koordinatsystemet brukes i en rekke sammenhenger i matematikken. For eksempel brukes det ofte i statistiske framstillinger. Det brukes videre i forbindelse med analytisk geometri til å framstille forskjellige typer kurver i planet, og det brukes til grafisk framstilling av funksjoner. De ulike bruksmåtene forekommer om hverandre i skolematematikken. Dette gjør det ofte krevende for elever å få en klar oppfatning og hva som er felles, og hvordan de ulike bruksmåtene skiller seg fra hverandre.

Som eksempel kan vi ta for oss ligningen

$$y = -x + 1$$

Denne ligningen kan illustreres ved en rett linje i planet. Det vil gå tydeligere fram hvis vi ber elevene løse ligningssettet

$$\begin{aligned} y &= 2x + 3 \\ y &= -x + 1 \end{aligned} \qquad \text{eller ofte skrevet som} \qquad \begin{aligned} y - 2x &= 3 \\ y + x &= 1 \end{aligned}$$

På den andre siden kan uttrykket $y = -x + 1$ være en måte å gi y som funksjon av x. Uttrykket kan derfor være flertydig for elevene. I denne framstillingen vil vi kartlegge de begrepene elevene har om koordinatsystemet og funksjoner.

Funksjonsbegrepet står sentralt i matematikk og har en lang historie. Det har utviklet seg ulike måter å definere funksjonsbegrepet på.

Vi kan se på funksjonen som en regel som setter oss i stand til å finne verdien av en størrelse som er avhengig av en annen:

Prisen på varer som har 25 % avslag, finner vi ved å multiplisere prisen med 0,75. Alternativt kan vi velge å skrive prisen med avslag som y og den opprinnelige prisen som x, $y = 0{,}75x$

Vi vil kalle dette den *operasjonelle* måten å betrakte funksjoner på.

Vi kan også definere funksjoner på en annen måte, som en mengde av par, som er slik at ett førsteelement i et par ikke kan høre sammen med ulike andreelementer. I overensstemmelse med vanlig praksis betegner vi funksjonen med *f*. Hvis vi skulle skrive funksjonen i eksemplet ovenfor på denne måten, ville den se slik ut:

$$f = \{(x, y) : y = 0{,}75x\}$$

Her vil vi si at vi har en *strukturell* betraktningsmåte. Den strukturelle måten å betrakte funksjoner på er ofte ikke den første måten elever møter i skolematematikken, men senere er de to betraktningsmåtene ofte blandet sammen. En strukturell betraktningsmåte ligger nærmere bruk av framstilling i koordinatsystemer.

Funksjoner opptrer i en rekke ulike former i skolens matematikkundervisning. Kanadieren Claude Janvier har identifisert fire slike:

- graf
- situasjon (verbal beskrivelse)
- formel (algebraisk)
- tabell

Vi møter alle disse sammenhengene både i skolen og utenfor. Angivelsene av sammenhenger mellom to variable størrelser ved grafer har blitt mer og mer vanlig, ettersom digitale verktøy tas i bruk i stadig større utstrekning.

I verbale beskrivelser finner vi også funksjonstekningen representert, men ofte lite eksplisitt uttrykt.

Funksjoner uttrykt som formler er kanskje ikke så vanlige utenfor matematikken, men i forbindelse med økonomi finner vi også bruk av formler. Som eksempel kan vi trekke fram beregningsmåter for innføring av bil til Norge, utgitt av Toll- og avgiftsdirektoratet.

Tabeller finner vi i en rekke daglige situasjoner, som portotabeller og rutetabeller. Vi tenker ikke på dette som funksjoner, men med en matematisk betraktningsmåte vil vi se klare funksjonssammenhenger: Porto for et innlandsbrev er en funksjon av vekten til brevet. For å systematisere de ulike formene for å beskrive funksjoner i skolematematikken, har Claude Janvier satt opp følgende tabell over sammenhenger mellom dem (Janvier, 1978):

Fra \ til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon		Måling	Skisse	Modellering
Tabell	Avlesning		Plotting	Tilpassing
Graf	Tokning	Avlesning		Kurvetilpassing
Formel	Gjenkjenning	Beregning	Plotting	

Vi har brukt denne systematiseringen i vår gjennomgåelse av funksjonsoppgavene. Som nevnt før spiller den grafiske framstillingen en framtredende rolle i dette ressursheftet.

1.1 Fra graf til situasjon

1.1.1 Fra graf til situasjon, koordinatsystemet

I den første delen er det presentert et koordinatsystem. Den første oppgaven vi skal se på er med i den digitale versjonen av kartleggingsprøvene under emnet Statistikk, sannsynlighetsregning og kombinatorikk, heretter forkortet SSK.

Oppgave 10

Seks elever plukket jordbær. Fem av elevene plukket i to uker. Diagrammene viser hvor mye de plukket hver uke. Ulf plukket bare i den første uken. Han plukket mindre enn Eva og mer enn Ole.

a) Hvilken elev plukket minst i første uke?

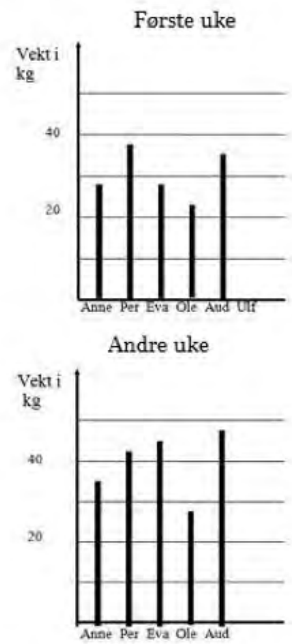
Svar:

b) Hvilken elev økte mest fra første til andre uke?

Svar:

c) Hvordan kan søylen for første uke se ut for Ulf?

Svar:



Oppgaveeksempel 1: Oppgave A Funksjoner 8 – 10. Se SSK 8 – 10 oppgave 10

I oppgaven ovenfor får vi presentert et stolpediagram over bærplukking. Hensikten med å ta med slike oppgaver her, under overskriften funksjoner, er at de gir oss informasjon om hvordan elever behersker koordinatsystemet. Framstillingsformen er valgt fordi elevene ofte støter på denne måten å representere en tilsvarende situasjon på.

I oppgaven skal elevene arbeide innenfor rammen av koordinatsystemet, slik at dette er et eksempel som prøver *operasjonell* forståelse av koordinatsystemet.

Få elever har problemer med å finne at det er Ole som har plukket minst i første uke. Rundt 95 % har denne oppgaven korrekt for 5. – 10. årstrinn Det vi kan merke oss er at noen få prosent svarer Ulf.

I spørsmål c) er problemet å se på økningen fra første til andre uke. Misoppfatningen som oppgaven skal avsløre, er at *den høyeste søylen er den som har størst økning*, og at vi altså ikke i første rekke ser på differansen som kommer fram, mellom søylene i de to koordinatsystemene.

Misoppfatning: *I en sammenligning betyr høyest på grafen også størst økning.*

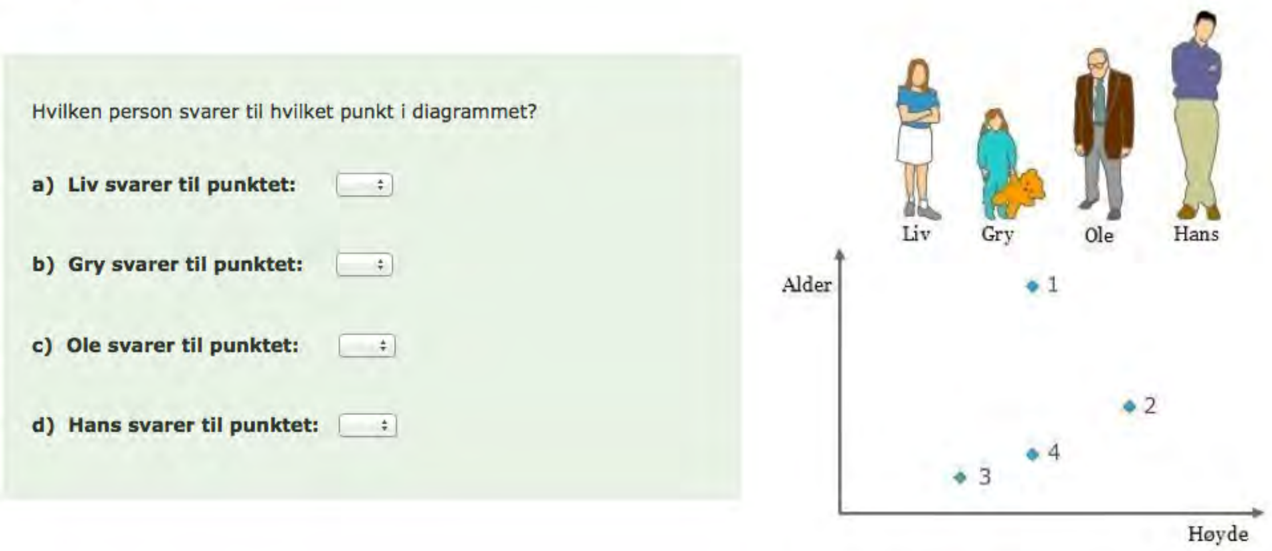
	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Eva (**Riktig svar**)	52	69	82
Aud	41	26	16

Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave Ac Funksjoner 8 – 10

Vi legger merke til at denne misoppfatningen blir merkbart redusert med økende årstrinn.

Det er en liten forskjell på økningen til Eva og Aud. Oppgave A er flyttet til SSK 8 – 10 og prøvd ut på nytt. Jfr. veiledningen for Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk (SSK) 8 – 10.

Oppgave 2



Oppgaveeksempel 2: Oppgave 2 Funksjoner 8 – 10

Oppgave 2 ovenfor er den samme for alle årstrinn. For å gi riktig svar må elevene vurdere *både* alder og høyde. I oppgaven er høyden avsatt langs førsteaksen og alderen langs andreaksen. Dette er det motsatte av det vi vanligvis ville bruke. Vi kan argumentere at en svakhet med oppgaven er at spørsmålene ikke er uavhengige.

Et felles inntrykk for alle spørsmålene er den relativt høye prosenten av elever som ikke har svart. Det viser at dette er en oppgave som faller vanskelig for mange. Det er også et fellestrekk at andelen av riktige svar stiger med økende årstrinn.

For hvert spørsmål er det tatt med det vanligste feilsvaret.

Oppgave 2a Funksjoner 8 – 10 Liv	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	7	3
Liv svarer til punkt 4 (**Riktig svar**)	52	61	81
Liv svarer til punkt 2	21	19	10

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Oppgave 2a Funksjoner 8 – 10

Det at mange krysser av for Liv som punkt 2, kan komme av at hun kan se litt høyere ut enn Ole på bildet, og derfor blir hun krysset av som den nest høyeste. Vi kan se dette svaret som en indikasjon på at elevene tolker grafen som et bilde.

Oppgave 2b Funksjoner 8 – 10 Gry	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	7	3
Gry svarer til punkt 3 **(Riktig svar)**	67	79	89
Gry svarer til punkt 1	14	7	5

Tabell 3: Prosentvis fordeling. Oppgave 2b Funksjoner 8 – 10

Flere svarer riktig på dette spørsmålet enn på de tre andre i oppgave 2. Det kan vi forklare ut fra at Gry både er lavest og yngst. At såpass mange krysser av punkt 1 for Gry, er derimot vanskeligere å forklare. *En* forklaring kan likevel være at hun er i en ytterkant av personene — yngst og lavest. På den måten skiller hun seg ut fra de andre, slik at eleven for eksempel bytter retning på andreaksen. Det kan òg være at eleven krysser av punkt 1 fordi Gry er yngst.

Oppgave 2c Funksjoner 8 – 10 Ole	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	7	3
Ole svarer til punkt 1 **(Riktig svar)**	43	49	67
Ole svarer til punkt 4	21	22	11
Ole svarer til punkt 2	17	18	17

Tabell 4: Prosentvis fordeling. Oppgave 2c Funksjoner 8 – 10

Avkryssingen for Ole gir et interessant bilde. At Ole svarer til punkt 2, holder seg ganske konstant gjennom alle årstrinnene. Det kan vi oppfatte som et uttrykk for en bildetolkning. At en del krysser av at Ole svarer til punkt 4, kan komme av at de velger mellom to alternativ — to som har lik høyde — og så gjør de et noe tilfeldig valg. Men det kan også komme av at Ole er eldst og dermed nummer 4.

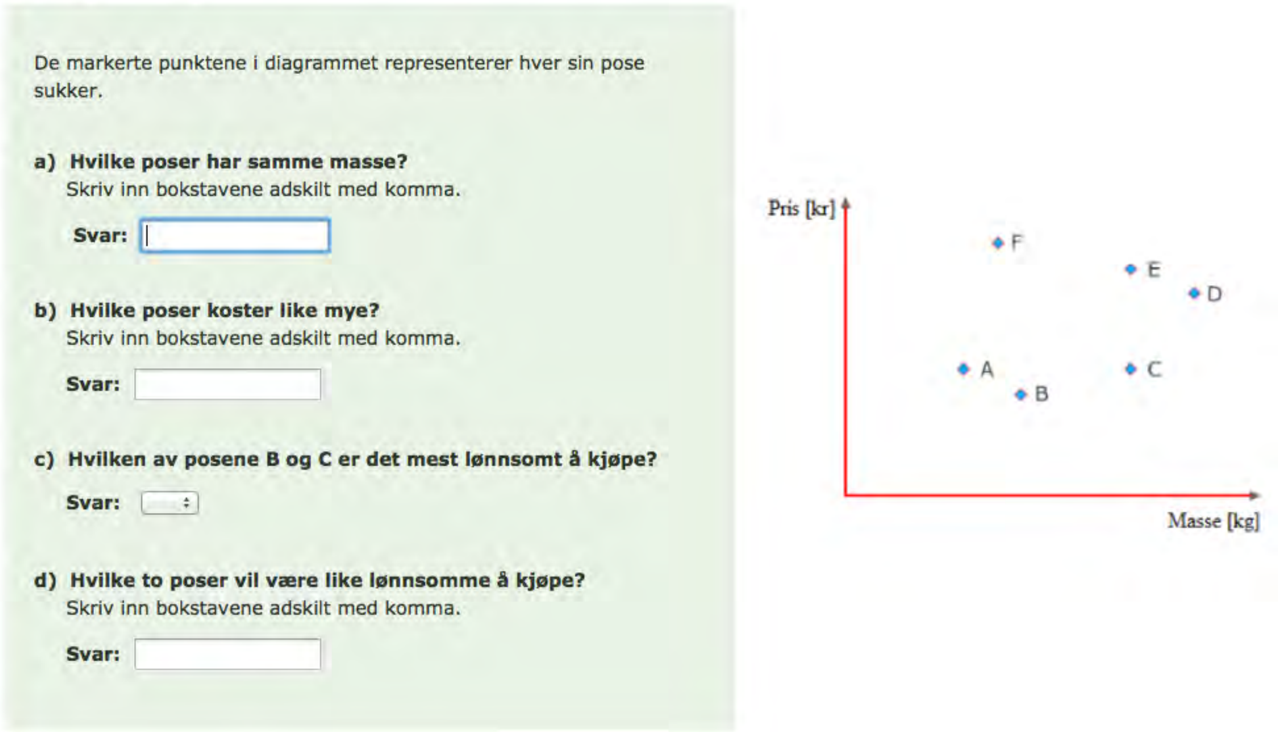
Oppgave 2d Funksjoner 8 – 10 Hans	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	7	3
Hans svarer til punkt 2 **(Riktig svar)**	46	53	68
Hans svarer til punkt 1	26	30	23

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Oppgave 2d Funksjoner 8 – 10

Vi ser her et klart uttrykk for en bildetolkning; høyt opp på grafen betyr stor fysisk høyde.

Oppgaven viser at mange prøver å koble bildeframstillingen til koordinatsystemet, og det er noe som kommer til uttrykk i alle oppgavene. Vi må også peke på at aksene er byttet om i forhold til det vi kan kalle en naturlig framstilling. Alderen på førsteaksen vil uttrykke et tidsløp, mens høyden kan oppfattes som en funksjon av alderen.

Oppgave 6


De markerte punktene i diagrammet representerer hver sin pose sukker.

a) Hvilke poser har samme masse?
Skriv inn bokstavene adskilt med komma.

Svar:

b) Hvilke poser koster like mye?
Skriv inn bokstavene adskilt med komma.

Svar:

c) Hvilken av posene B og C er det mest lønnsomt å kjøpe?

Svar:

d) Hvilke to poser vil være like lønnsomme å kjøpe?
Skriv inn bokstavene adskilt med komma.

Svar:

Oppgaveeksempel 3: Oppgave 6 Funksjoner 8 – 10

De første spørsmålene i oppgave 6 ovenfor gjelder igjen å gjøre vurderinger ut fra to variable størrelser, gitt i et koordinatsystem. Vi kan bemerke at orienteringen på aksene er den naturlige. Framstillingen viser pris som en funksjon av vekt. Selv om det ikke kommer inn et operasjonelt funksjonsbegrep i denne oppgaven, vil elevene rimeligvis føle seg mer hjemme i denne orienteringen av aksene.

Spørsmålene retter seg mot å forstå betydningen av like verdier på koordinataksene.

Oppgave 6a Funksjoner 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	43	54	71
E og C **(Riktig svar)**	42	34	23

Tabell 6: Prosentvis fordeling. Oppgave 6a Funksjoner 8 – 10

Vi ser at svært mange kobler «samme vekt» til at de er like langt fra førsteaksen (vekt).

Oppgave 6b Funksjoner 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
A og C **(Riktig svar)**	57	68	80
C og E	23	18	14

Tabell 7: Prosentvis fordeling. Oppgave 6b Funksjoner 8 – 10

Resultatene i dette spørsmålet er klart bedre enn på spørsmål 6a. Ved sammenligning av svarene i spørsmål 6a og 6b ser vi at de som svarer C og E på spørsmål 6b, også svarer A og C på spørsmål 6a.

I den siste delen av oppgave 6 spørres det om forhold. Lønnsomhet knytter seg til forholdet mellom pris og vekt. I denne delen av oppgave 6 er det også opprinnelig spurt etter begrunnelser. Hensikten med oppgaven er å se om sammenligningene i hovedsak knyttes til en av dimensjonene, for eksempel til andreaksen (Pris).

Oppgave 6c Funksjoner 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	13	9	3
C (**Riktig svar**)	49	65	79
B	37	25	17

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Oppgave 6c Funksjoner 8 – 10

Forklaringen som ble gitt på oppgave 6c, hadde følgende svarfordeling når vi kategoriserer feilsvarene etter om vi tar med to eller en dimensjon i betraktning:

Oppgave 6c Funksjoner 8 - 10 Forklaring	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	18	13	7
Akseptabel begrunnelse	24	45	62
En dimensjon på C	11	14	9
En dimensjon på B	20	15	9

Tabell 9: Prosentvis fordeling. Oppgave 6c Funksjoner 8 – 10. Forklaring.

Vi ser at en stor del av elevene bare sammenligner langs en dimensjon. En velger B "fordi denne er billigst" og C "fordi denne veier mest". Fordelingene er omtrent like på 7. årstrinn og 9. årstrinn, mens forholdsvis langt flere elever på 5. årstrinn sammenlignet etter bare en dimensjon.

Det siste spørsmålet, oppgave 6 d, ble bare gitt på 7. årstrinn og 9. årstrinn. Uttrykket "like lønnsomme" knytter seg til forhold, slik at forholdet mellom pris og vekt skal være det samme for de to posene. I dette spørsmålet er det heller ikke sagt noe om hvilke alternativer som det er aktuelt å trekke inn i sammenligningen.

Oppgave 6d Funksjoner 8 - 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	21	18
B og D (**Riktig svar**)	5	13
A og C	29	17
C og D	18	20
A og B	5	4

Tabell 10: Prosentvis fordeling. Oppgave 6d Funksjoner 8 – 10

I tabell 10 har vi tatt med de alternativene som har fått en høyere svarprosent enn det riktige. To andre svaralternativer for 7. årstrinn (A og C, C og E) hadde også en svarprosent på 5. Resultatene viser en stor spredning.

Skal vi kunne tolke disse svarene, må vi trekke inn flere momenter.

Det er rimelig å tolke svaralternativene A og C som at elevene bare har sett på prisen. De har samme pris, altså er de like lønnsomme. Dette styrker teorien om at elever bare ser på den ene dimensjonen.

Elever som velger C og D, har trolig vurdert både pris og vekt. At C og D blir ført opp som like lønnsomme, kan komme av at differansen målt på førsteaksen er ca. like stor som differansen målt på andreaksen. Prisen øker like mye som vekta. Det er verdt å legge merke til at denne misoppfatningen øker fra 7. årstrinn til 9. årstrinn.

Elevene ble opprinnelig bedt om å begrunne svaret sitt på oppgave 6d. Svært mange unnlot å svare, særlig på 9. årstrinn.

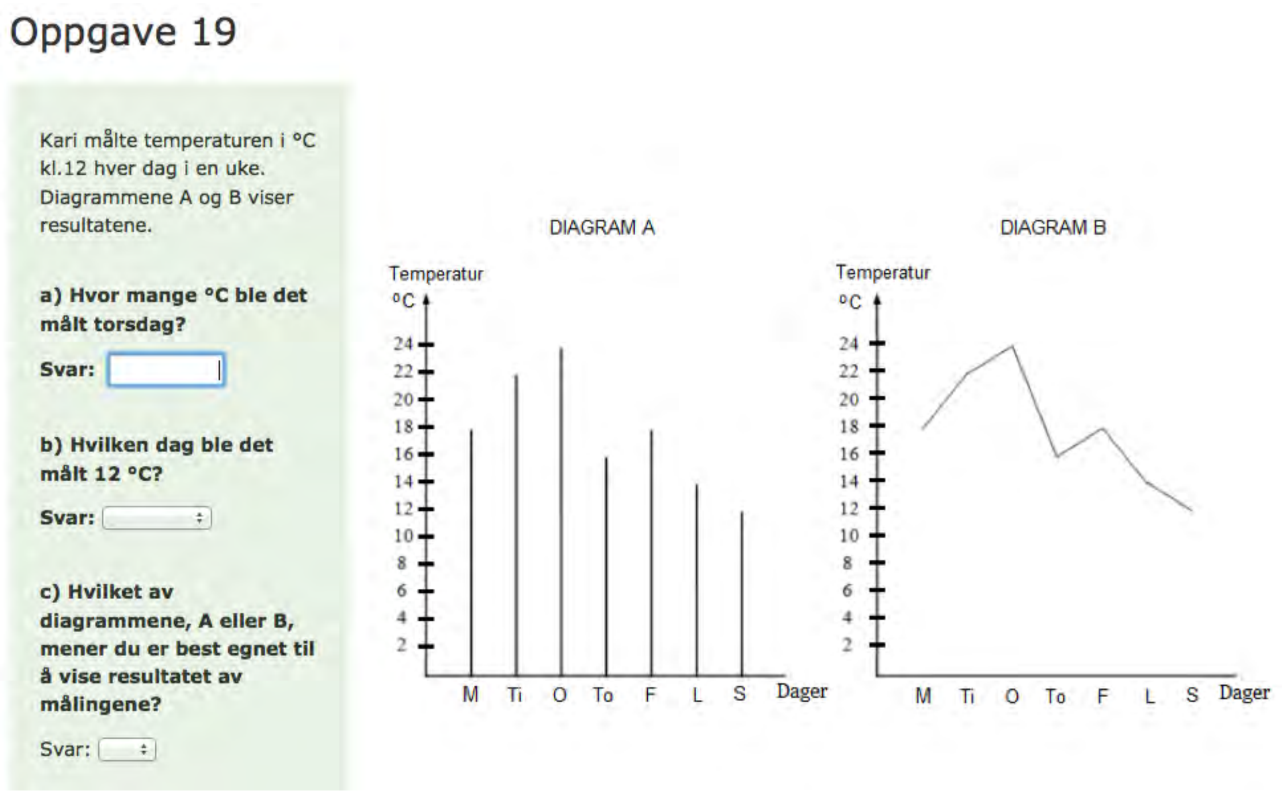
Oppgave 6d Funksjoner 8 - 10 Forklaring	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	27	27
Gyldig begrunnelse	3	10
Proporsjonalitetstenkning *	10	16
Samme pris	12	7

Tabell 11: Prosentvis fordeling. Oppgave 6d Funksjoner 8 – 10. Forklaring.

* Med proporsjonalitetstenkning menes det at det er sett på forholdet mellom pris og vekt. C og D er det vanligste alternativet, men også andre par er tatt med.

Når vi sammenligner 7. årstrinn og 9. årstrinn, ser vi at det er en utvikling. Andelen på 9. årstrinn med gyldig begrunnelse er større, og flere viser også proporsjonalitets-tenkning. Den prosentvise andelen av elever som har tenkt langs en dimensjon (pris), har gått noe tilbake.

En annen oppgave som gjelder koordinatsystemet, er inkludert i den digitale versjonen av de læringsstøttende prøvene innen SSK, og ble opprinnelig gitt til kun 5. årstrinn og 7. årstrinn. Det er det operasjonelle begrepet som blir prøvd i de to første spørsmålene. I de to siste spørsmålene har framstillingen i koordinatsystemet blitt gjort til et objekt som vi skal forholde oss til. Vi sier derfor at spørsmålene prøver de strukturelle sidene ved koordinatsystemet.



Oppgaveeksempel 4: Oppgave B Funksjoner 8 – 10 .Se SSK oppgave 19.

Oppgave Ba Funksjoner 8 - 10 Koordinatsystem - avlesning	5. årstrinn	7. årstrinn
16 (Riktig svar)	89	92

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave Ba Funksjoner 8 – 10.

Oppgave Bb Funksjoner 8 - 10 Koordinatsystem - avlesning	5. årstrinn	7. årstrinn
Søndag (Riktig svar)	93	97

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave Bb Funksjoner 8 – 10.

I spørsmålene c) og d), som bare ble gitt på 7. årstrinn, skal elevene forholde seg til hvilken graf som de synes er best for å vise målingene.

Mot dette kan det innvendes at diagrammene viser to ulike sider ved målingene. Diagram A kan være bedre egnet til å lese av enkeltmålinger, mens diagram B mer tydelig viser en utvikling gjennom uken. Det kan også innvendes at oppgaven ikke redegjør for formålet med målingene.

Oppgave Bc Funksjoner 8 - 10 Koordinatsystem – type diagram	7. årstrinn
Diagram A	80
Diagram B	17

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave Bc Funksjoner 8 – 10.

Når det gjelder forklaring, er det flere ulike varianter, som alle bygger på resonnement omkring diagrammene.

Spørsmålene her er eksempel på at koordinatsystemet (med diagrammene) behandles som objekter. Derfor kaller vi dette strukturelle spørsmål.

Oppgave Bd Funksjoner 8 - 10 Koordinatsystem – type diagram	7. årstrinn
Ubesvart	10
Foretrukket svar *	3
Velger diagram A fordi det er lett å lese	53
Velger diagram A fordi det er tydeligere markering	14
Velger diagram B fordi vi ser utviklingen	11

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave Bd Funksjoner 8 – 10. Forklaring på oppgave B c)

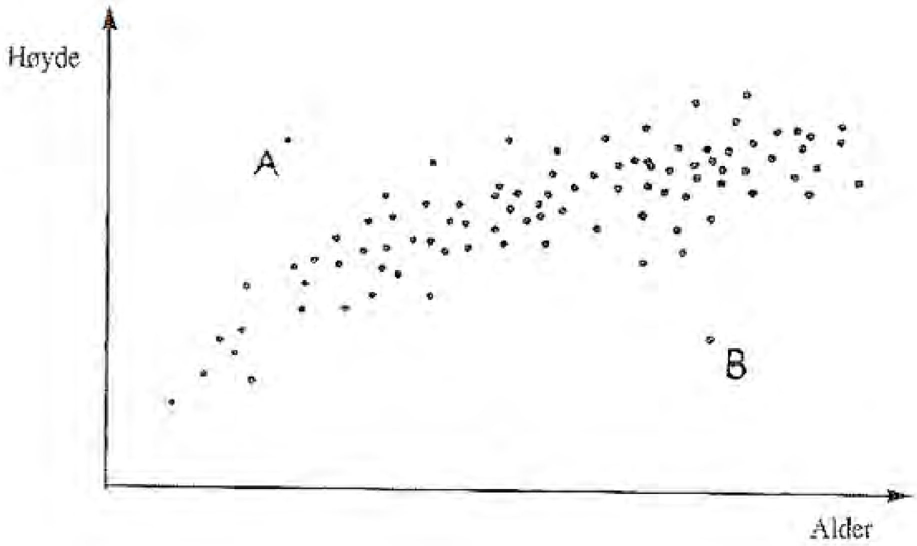
* Som foretrukket svar har vi diagram A, begrunnet med at det bare ble foretatt *en* måling per dag. Det er underforstått at det ikke gir mening å forbinde disse med linje-stykker eller en annen kurve.

Det er likevel grunn til å nevne at de ulike svaralternativene som har A som foretrukket diagram, ikke er helt klart atskilte.
Konklusjonen må likevel være at de fleste argumenter ut fra leseligheten til diagrammet, ikke ut fra hvordan det viste målingene i punkter. Det kan imidlertid være grunn til å peke på uklarheten i spørsmålsformuleringen på dette punktet.

Oppgaven nedenfor knytter seg til også koordinatsystemet.

Oppgave C Funksjoner 8 – 10

I en undersøkelse noterte en vitenskapsmann høyden og alderen på 100 bjørketrær. Han tegnet resultatene inn i et diagram. Hvert tre er illustrert ved én prikk i diagrammet.



To av trærne er her markert med henholdsvis A og B. Hva kan du si om disse trærne?

Oppgaveeksempel 5: Oppgave C Funksjoner 8 – 10 Ikke tatt med i digital versjon.

I denne oppgaven skal elevene forholde seg til objekter i koordinatsystemet. Oppgaven er gitt på alle tre aktuelle årstrinn.

To tilbakemeldinger skal avdekkes ved hjelp av denne oppgaven:

- Gir elevene en billedmessig forklaring, ”står alene”, ”vokser i utkanten av skogen” eller lignende?
- I hvilken grad ser elevene på bare en av aksene eller fester seg ved ett trekk ved hvert tre?

Skjemaet viser hvordan svarene fordelte seg:

Oppgave C Funksjoner 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	17	12	9
Akseptabel forklaring	36	53	63
Bildemessig forklaring	15	13	8
Refererer bare til en av aksene	2	3	2

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave C Funksjoner 8 – 10.

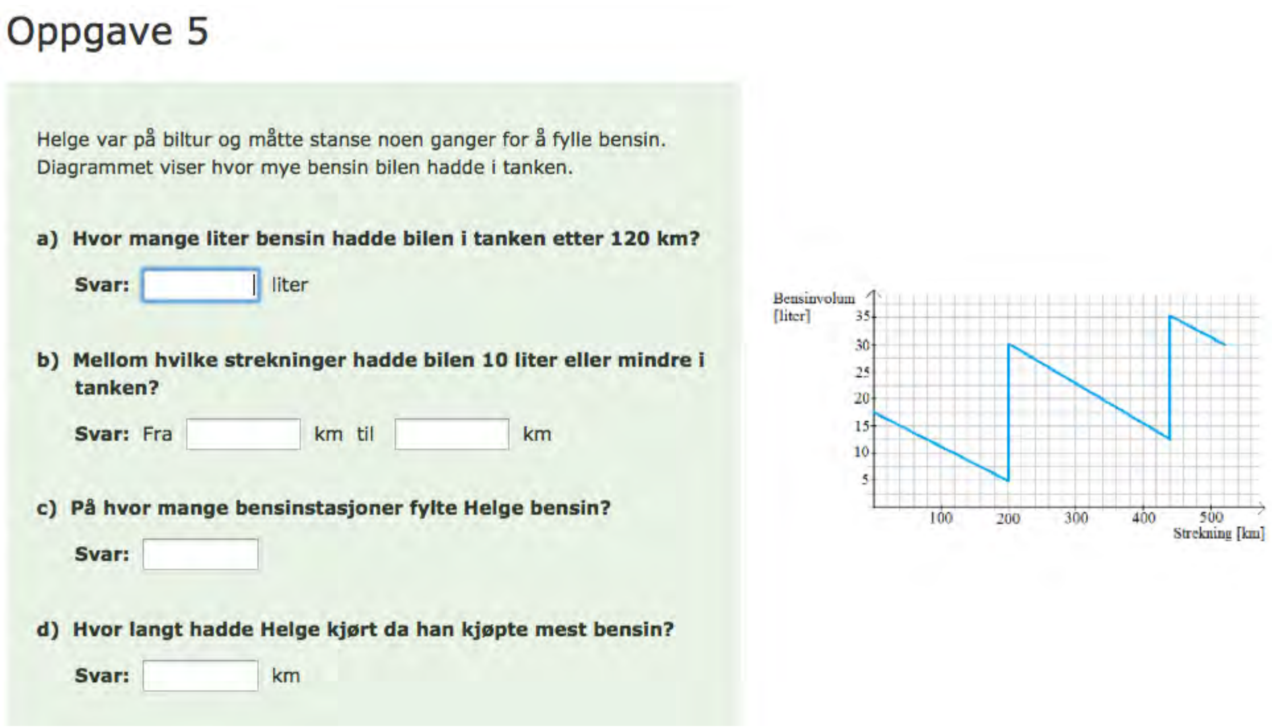
Tabell 16 viser en forventet utvikling. At relativt mange ikke har svart, viser at denne oppgavetypen framstår som uvant for mange elever.

Som en oppsummering for flere av disse oppgavene om koordinatsystemet vil vi si at *det er en utbredt misoppfatning at en grafisk framstilling gir et direkte (eller mer konkret) bilde av en* *situasjon*. Her bør oppmerksomheten rettes mot en del læreverk og framstillinger i mediene, som bevisst bruker diagrammer til å vise bilder som passer med aksene på diagrammet.

1.1.2Fra graf til situasjon, funksjoner

Flere av oppgavene innenfor denne kategorien – fra graf til situasjon – tar for seg grafer til funksjoner. Oppgavene er i hovedsak operasjonelle. Funksjonsgrafen blir ikke behandlet som et objekt elevene skal forholde seg til.

En slik oppgave som gjelder det operasjonell aspektet til funksjoner, er oppgave 5 nedenfor:



Oppgaveeksempel 6: Oppgave 5 Funksjoner 8 – 10

Diagrammet viser at forløp illustrert ved en graf. Vi kan si at det er funksjonsforskrift, at antall liter på tanken er avhengig av avstanden (eller av antall kilometer som er kjørt). Det er imidlertid tegnet inn noen loddrette linjer slik at dette ikke egentlig blir en funksjonsforskrift i matematisk forstand i disse punktene. Oppgavens hensikt er å undersøke elevenes evne til å tolke grafer.

I spørsmål a er det ingen klare alternativer til riktig svar (10 liter). Dette svaret hadde en svarfrekvens på 77 % på 7. årstrinn og 89 % på 9. årstrinn.

Det vanligste feilsvaret er tall mellom 7 og 8,5 som framkommer ved at elevene leser av ved 140 km i stedet for 120 km. Disse elevene teller to streker etter 100.

Oppgave 5b Funksjoner 8 - 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	3
120-200 km (**Riktig svar**)	28	50
200 km	36	20

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 5b Funksjoner 8 – 10.

Tallene i tabellen må bli vurdert med tanke på usikkerheten rundt tolkingen av formuleringene til elevene. Elever som har svart «den første strekningen», kan ha den riktige oppfatningen av hva diagrammet formidler.

Svaret "200 km" kan en forklare ved at den loddrette streken i diagrammet også blir oppfattet som en strekning, det vil si at det blir oppfattet som om alle strekene i diagrammet viser kjørestrekninger.

I oppgave 5c har 10 % unnlatt å svare. En del av elevene svarer at Helga stoppet på tre stasjoner. Her ble det også bedt om at det skulle være en begrunnelse for oppgave 5c. Bakgrunnen for at det opprinnelig ble bedt om en begrunnelse, var at vi ønsket å se hvordan elevene som ga ulike svar, tenkte.

Oppgave 5c Funksjoner 8 - 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	2
2 stasjoner **(Riktig svar)**	58	81
3 stasjoner	17	12

Tabell 18: Prosentvis fordeling. Oppgave 5c Funksjoner 8 – 10.

Svarfrekvensene for begrunnelser er som følger. Akseptabel begrunnelse gjelder for riktig antall stasjoner. Begrunnelse for tre knekkpunkter (eller strekninger) er ofte knyttet til avlesning av tre spesifikke karakteristiske trekk på grafen.

Oppgave 5c Funksjoner 8 - 10 Forklaring	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	26	9
Akseptabel begrunnelse	47	68
Tar bare opp igjen svaret	8	6
Begrunnelse som går på tre spisser eller strekninger	6	5

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Oppgave 5c Funksjoner 8 – 10. Forklaring

Grafen kan gi inntrykk av at Helga stoppet på tre stasjoner, og at den første var ved starten av kjøreturen. Dette passer sammen med begrunnelsen om at det var tre knekkpunkter Det er ellers noe vanskeligere å tolke at de tre skråstrekene gir antallet bensinstasjoner.

Den kategorien som hadde den nest høyeste svarfrekvensen, utenom riktig svar, var begrunnelsen som gjentar svaret. Dette gir grunn til å rette søkelyset mot elevenes oppfatninger av hva vi mener med begrunnelse.

Oppgave 5d prøver om elevene vurderer differanse eller høyeste punkt på kurven. Det var også bedt om en begrunnelse av svaret.

Oppgave 5d Funksjoner 8 - 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	11	3
200 km **(Riktig svar)**	52	74
440 km (Har mest bensin i tanken)	16	15

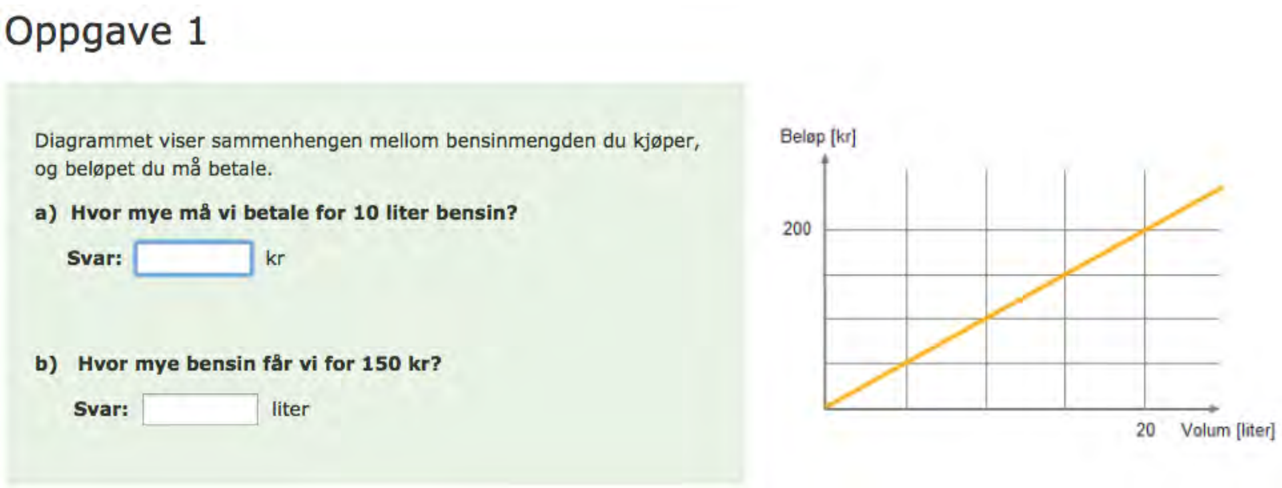
Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 5d Funksjoner 8 – 10.

Vi bemerker her at flere av elevene på 9. årstrinn enn på 7. årstrinn svarer 1440 km. Begrunnelsene viser at mange elever fester seg ved det høyeste punktet på kurven.

Oppgave 5d Funksjoner 8 - 10 Forklaring	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	30	12
Akseptabel begrunnelse	36	57
Refererer til det høyeste punktet	13	12

Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 5d Funksjoner 8 – 10. Forklaring

Innenfor denne kategorien er det også gitt en mer tradisjonell oppgave med en funksjonsgraf, se nedenfor.



Oppgaveeksempel 7: Oppgave 1 Funksjoner 8 – 10

I oppgave 1a prøves elevene i å finne fram på førsteaksen og foreta en avlesning på kurven.

Oppgave 1a Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	11	7
100 kroner **(Riktig svar)**	65	81
150 kroner	6	5
50 kroner	5	3

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave 1a Funksjoner 8 – 10.

Alternativene 150 kroner og 50 kroner var de to med frekvens som kom nærmest frekvensen for riktig svar. Vi kan tolke det slik at elevene leser av etter første eller tredje loddrette linje.

I oppgave 1b tar vi utgangspunkt i andreaksen. Spørsmålet er tilsvarende spørsmålet i 1a.

Oppgave 1b Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	12	8
15 liter **(Riktig svar)**	62	79
10 (10,5) liter	7	6
50 liter	3	0,7
150 liter	0,2	2

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave 1b Funksjoner 8 – 10.

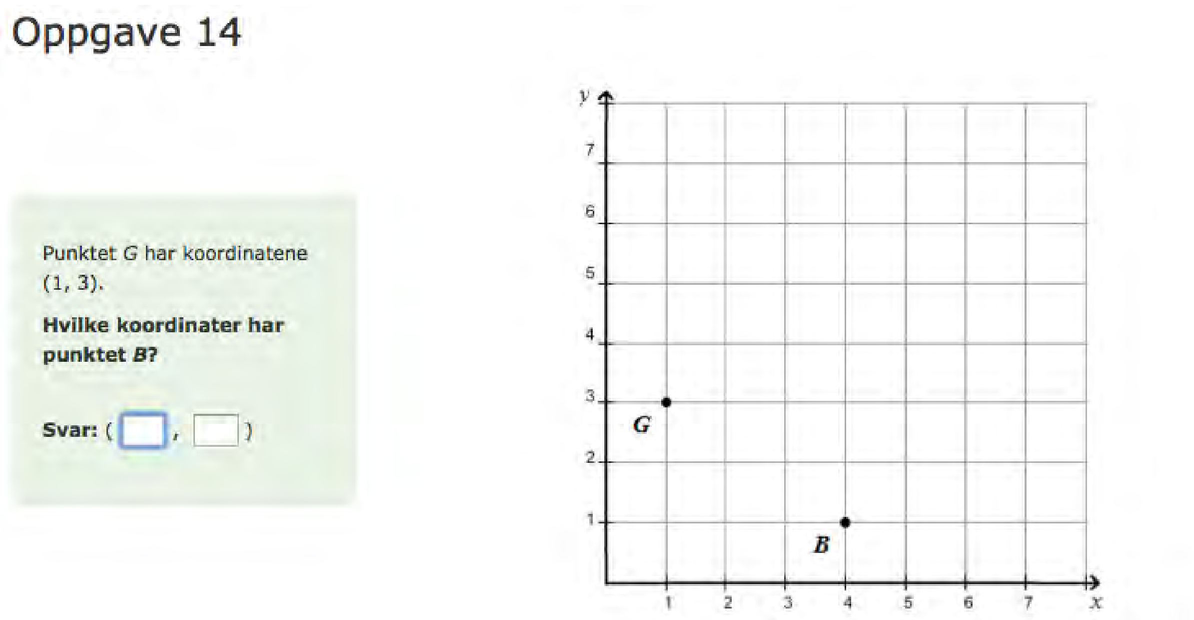
Vi legger merke til at forholdsvis mange ikke svarer på spørsmålet. Utviklingen av frekvensen for riktig svar fra 5. til 7. årstrinn er ventet, ettersom elevene får trening i å arbeide med grafer. At svaret 10 liter var det som kom nærmest riktig svar i svarprosent, er ikke merkelig. Det støtter det synet at elevene har problemer med å orientere seg når ikke alle koordinatene på aksene er avmerket.

Svarene 50 liter og 150 liter viser et interessant trekk som det er vanskelig å gi en god forklaring på. At noen svarer 150 liter, kan komme av at de går tilbake på samme akse. Ellers må vi merke oss at en usikkerhet i svarene kan bli synliggjort her.

1.2 Fra graf til formel

Med formel forstår vi ikke bare et eksplisitt uttrykk, men også de mer formalistiske sidene ved funksjonsbegrepet og koordinatsystemet, for eksempel avmerking av punkter og tegning av bestemte objekter i et koordinatsystem. Vi skriver punkt G som tallparet (1,3).

Skriv punkt B som et tallpar.



Oppgaveeksempel 8: Oppgave 14 Funksjoner 8 – 10

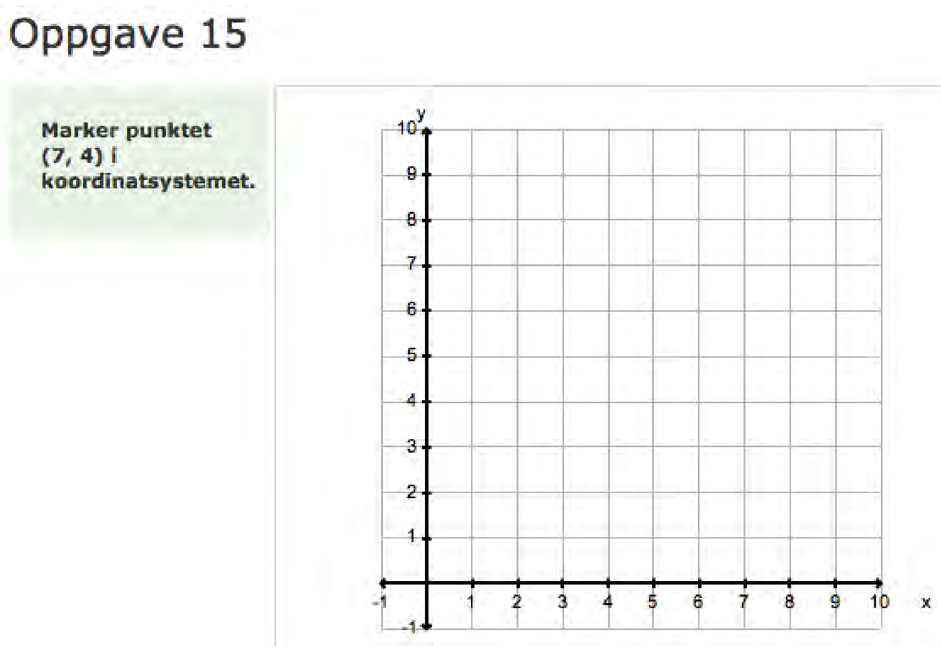
Elevene skal i oppgavene 14, 15 og 16 orientere seg i koordinatsystemet. Hensikten er blant annet å prøve hvordan elevene oppfattet punktangivelser i koordinatsystemet, og å tegne en linje gjennom to oppgitte punkter. Som en hjelp ble punkt G skrevet som et tallpar.

Oppgave 14 Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	9	11
(4, 1) (Riktig svar)	62	75
(1, 4)	21	10

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Funksjoner 8 – 10.

Resultatet viser at elevene ikke er trygge på å vise koordinatene til et punkt. Tallet på de som ikke svarer, øker noe fra 5. til 7. årstrinn.

Oppgave 15 går ut på å avmerke et punkt ut fra oppgitte koordinater. Den samme usikkerheten gjorde seg gjeldende her:



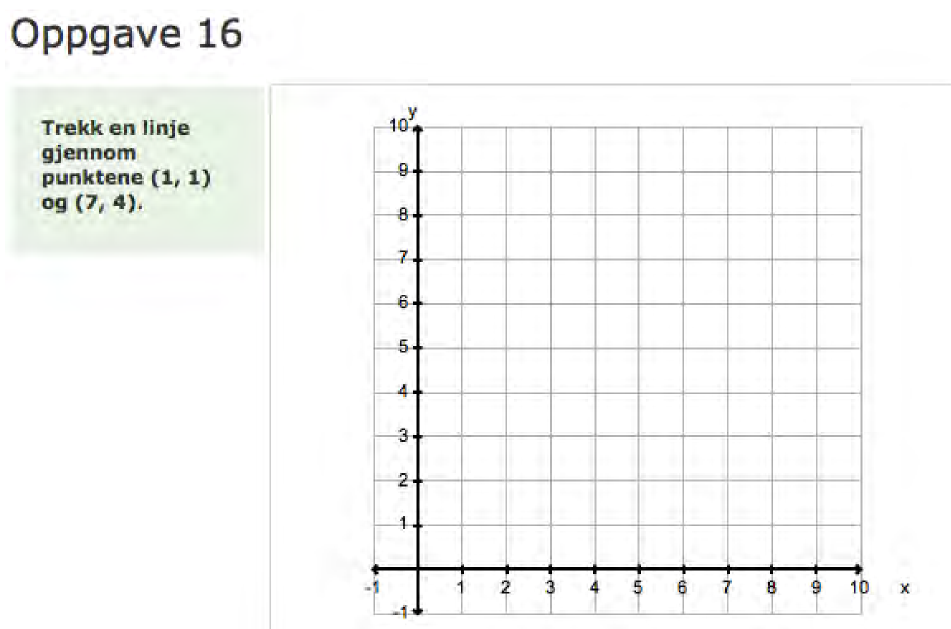
Oppgaveeksempel 9: Oppgave 15 Funksjoner 8 – 10

Oppgave 15 Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	7	7
Korrekt merking	63	77
Merker av ved (4, 7)	21	12

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 Funksjoner 8 – 10.

Vi kan merke oss at svarfrekvensen på oppgave 15 var svært lik svarfrekvensen for oppgave 14.

I oppgave 16 blir elevene bedt om å trekke en linje gjennom to oppgitte punkter:



Oppgaveeksempel 10: Oppgave 16 Funksjoner 8 – 10

Oppgave 16 Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	11	8
Trekker korrekt linje gjennom punktene *	64	76
Trekker linje eller kurve gjennom (4, 7) og origo	5	4
Trekker linjer fra aksene til (4, 7) og/eller (1, 1)	6	3
Trekker ei kurve gjennom (4, 7), (1, 1) og origo	1	1

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Funksjoner 8 – 10.

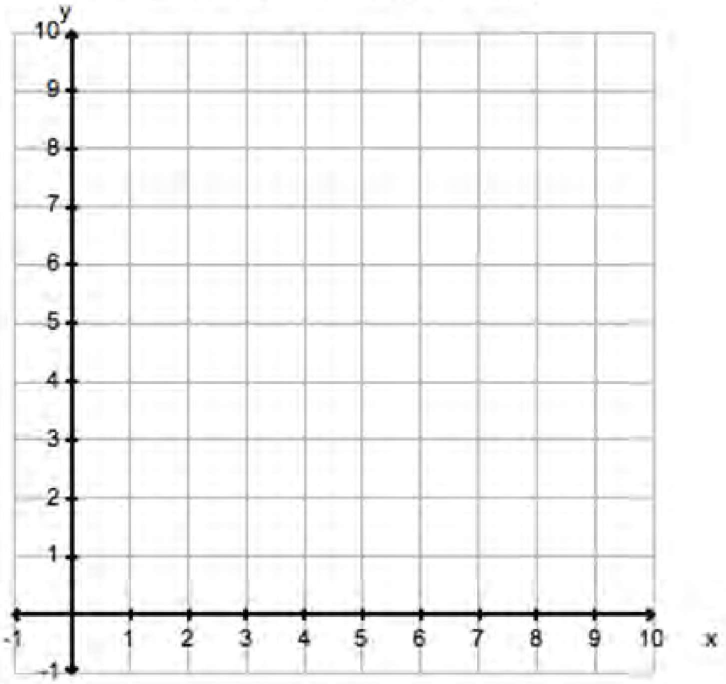
* I denne kategorien er det også tatt med svar der punktet (4, 7) er merket av feil, og det er tegnet en korrekt linje ut i fra den forutsetningen. (Dette blir ikke regnet som korrekt i den digitaliserte oppgaven.)

Vi ser at en del elever mener linjen må gå gjennom origo. En del har tydeligvis også den punkt G skrevet som et tallpar.at *linjer må være parallelle med koordinataksene*.

Oppgave D Funksjoner 8 – 10 (ikke med)

Velg et punkt til som ligger på linjen du har tegnet.

Skriv koordinatene til dette punktet (________________)



Oppgaveeksempel 11: Oppgave D Funksjoner 8 – 10. Ikke tatt med. Skriv dette punktet som et tallpar.

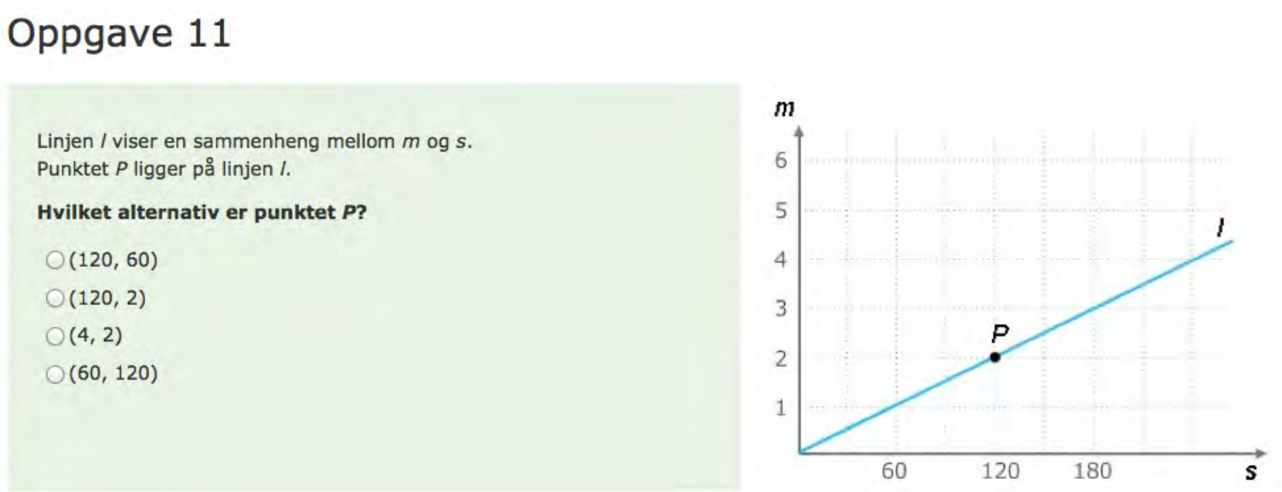
Oppgave D Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn
Ubesvart	14	12
Heltallige koordinater *	47	64
Ikke heltallige koordinater (også riktig svar)	0,2	0,4
Punkt med ombyttede koordinater på linja	12	6
Punkt ikke på linja, bytter om koordinater	13	2
Punkt ikke på linja, korrekte koordinater	1	6

Tabell 27: Prosentvis fordeling. Oppgave D Funksjoner 8 – 10. Ikke med i KIM.

* I denne kategorien er det også tatt med besvarelser hvor linja er tegnet feil og det er angitt et korrekt punkt ut fra den forutsetningen.

Elever på 7. årstrinn har også problemer med å bytte om koordinater. Vi kan tolke de siste linjene i tabellen som at elevene viser et bedre samsvar mellom punkter avmerket i planet og skrevne koordinater.

Den neste oppgaven for 9. årstrinn tar opp disse problemene på en tilsvarende måte.



Oppgaveeksempel 12: Oppgave 11 Funksjoner 8 – 10

Oppgave 11 Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	9
(120, 2) **(Riktig svar)**	85
(60, 120)	4

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 Funksjoner 8 – 10.

Selv om mange ikke har svart, har spørsmålet en rimelig stor del riktige svar. At alternativet (60, 120) var det som fikk høyest svarprosent av de som var feil, kan virke noe underlig. Vi kan likevel trekke fram to aspekter:

- Alternativet var det siste, slik at dersom eleven ikke hadde funnet noe tidligere alternativ, kunne dette vre et bevisst valg.

- De tallene som inngår er 2 og 120, slik at 60 kommer fram som en kombinasjon, og slik at andrekoordinaten er større enn første.

Her vil det være interessant å be om begrunnelse for valg.

Oppgave 12 er et tilsvarende spørsmål, men elevene skal finne ligningen for en linje (gitt som et funksjonsuttrykk – *m* som funksjon av s). Enhetene på koordinataksene kan være uvant for noen elever - med de store tallene på førsteaksen.

Oppgave 12 Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	17
m=s/60 (Riktig svar)	20
m=s/2	13
m = s	10
m=60s	22
4*m*=180s	13

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Oppgave 12 Funksjoner 8 – 10.

Det kan være flere forklaringer på valget av alternativet m = 60s. En mulig forklaring kan være at 1 m svarer til 60 s, altså at m = 60 s. Denne tenkemåte er en velkjent misoppfatning i forbindelse med bruk av bokstaver for å nevne variable størrelser En bruker bokstavene som merkelapper (blir forvekslet med nevning), som for eksempel at 1 minutt (m) = 60 sekunder (s). En annen forklaring kan være at elevene har lite erfaring med funksjoner der koeffisienten er nevner i en brøk (mindre enn 1). Alternativet 4 m = 180 s kan også ha blitt valgt av noen fordi det var det siste alternativet (og ingen av de tidligere alternativene passet for disse elevene). m = s/2 kan også komme av at punktet P er merket av ved (120, 2).

Vi ser at elever i 9. årstrinn er usikre på hva uttrykk betyr, når det gjelder ELLER hva angår koordinatsystem. De blir ofte presenterte for uttrykk i en form som er mer eller mindre standardform. $y = ax$, der *a* som regel er et tall mindre enn 10.

1.3 Fra situasjon til graf

Oppgave 10

Seks elever plukket jordbær. Fem av elevene plukket i to uker. Diagrammene viser hvor mye de plukket hver uke. Ulf plukket bare i den første uken. Han plukket mindre enn Eva og mer enn Ole.

a) Hvilken elev plukket minst i første uke?

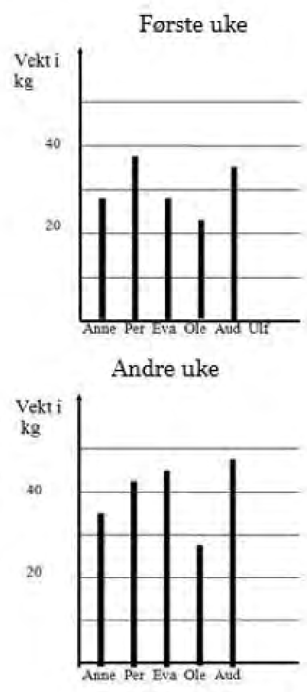
Svar:

b) Hvilken elev økte mest fra første til andre uke?

Svar:

c) Hvordan kan søylen for første uke se ut for Ulf?

Svar:



Oppgaveeksempel 13: Oppgave Aa Funksjoner 8 – 10. Se SSK 10.

Oppgave Aa Funksjoner 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	9	9	7
Riktig svar	81	86	90
Kortere enn Ole	1	2	2
Lengre enn Eva	3	1	1
Likt med Eva eller Ole	1	1	1

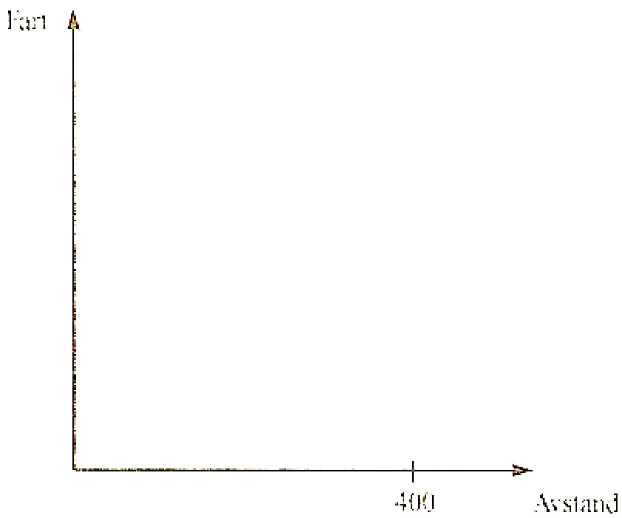
Tabell 30: Prosentvis fordeling. Oppgave A a) Funksjoner 8 – 10.

Spørsmål a) er gjennomgående godt besvart. Svarprosenten øker fra 81 % (5. årstrinn) til 90 % (9. årstrinn). Det bør imidlertid bemerkes at forholdsvis mange ikke svarte på spørsmålet, fra 9 % på 5. årstrinn til 7 % på 9. årstrinn. Siden spørsmålet kommer tidlig i den diagnostiske prøven, ligger rimeligvis årsaken til at spørsmålet er ubesvart, i at dette er en oppgavetype som er mindre kjent blant elevene.

Følgende oppgave har ikke fått plass i den digitale versjonen av prøven på grunn av formatet.

Oppgave E Funksjoner 8 – 10 (ikke med)

Ola løper 400 meter. Han åpner raskt, etter 200 meter blir han sliten og farten blir mindre. Når han nærmer seg mål, spurter han. Tegn en graf som viser hvordan farten varierer under løpet.



Oppgaveeksempel 14: Oppgave E Funksjoner 8 – 10. Ikke med i den elektroniske prøven.

I denne oppgaven er det forholdsvis detaljert beskrevet en situasjon som ikke burde være så ukjent for elevene. Hensikten med oppgaven var å prøve elevene i å framstille i koordinatsystem hvordan farten varierer. Tre forhold ved grafen ble spesielt sett på:

- Starten på grafen, at den starter i origo
- Formen på grafen, etter de opplysningene som er gitt i teksten
- Avslutningen på grafen, at farten avtar etter målpassering

Oppgave E Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	5
Riktig form, avslutter med en synkende graf	3
Riktig form, men noe forskjellige avslutninger *	48
Riktig form, men starter ikke i origo	12
Riktig form, men ikke hastighetsendring på 200 meter	7
Riktig form, men starter ikke i origo og ikke hastighetsendring på 200 meter	5

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave E Funksjoner 8 – 10.

* For eksempel at den slutter brått eller med stigende graf.
Det var ellers en rekke ulike svar på oppgaven.

Nærmere 20 % har ikke start i origo. Vi må gå ut fra at elevene ikke tenker bevisst på det faktum at løperen har hastighet 0 ved start. Svært mange elever får riktig form på grafen Det er endepunktene som er det problematiske – start og avslutning. Det er grunn til å tro at elevene ikke tenker enn til 400 meter og ikke er bevisst på forløpet til grafen etter målpassering.

1.4 Fra situasjon til formel

Oppgaveeksempel 15: Oppgave 4 Funksjoner 8 – 10.

I denne oppgaven presenteres elevene for en situasjon som ikke burde være helt ukjent. Ut fra situasjonen skal de lage et funksjonsuttrykk. Den avhengige variabelen er kalt y, og den uavhengige, som er antall elever, x. Forholdsvis mange har latt være å svare. Se alternativene som fikk høyest svarprosent, er gjengitt i tabellen nedenfor.

Oppgave 4 Funksjoner 8 -10	9. årstrinn
Ubesvart	20
45x + 350 eller liknende **(Riktig svar)**	45
45x	13
Feil uttrykk med x, 45 og/eller 350	11
Tallsvar (riktige eller ikke riktige)	3

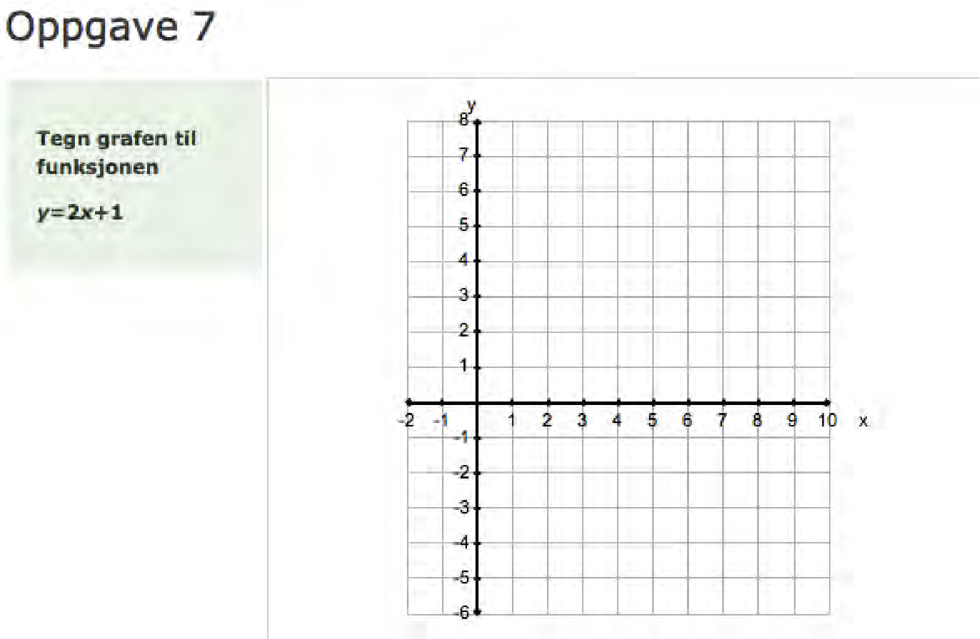
Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave 4 Funksjoner 8 – 10.

En del elever ser bort frå konstantleddet. Det er i kodingen åpnet noe for mulige misforståelser i teksten, for eksempel at en regner med at de 350 kronene kan bli dekt av prisen per elev. I svarene som var feil, var det stor variasjon i de uttrykkene som ble oppgitt. Det betyr at elevene ikke er sikre når det gjelder å omsette fra en konkret situasjon til et funksjonsuttrykk.

Selv om få elever har gitt tallsvar, ser vi at det er noen som fremdeles ikke vil ha variabelen x inn i svaret. Vi kan her merke en misoppfatning som går på at en alltid uttrykker svar med tall.

1.5 Fra formel til graf

I oppgave 7 – 9 Funksjoner 8 – 10 skal elevene ta utgangspunkt i funksjonsuttrykk eller formler og tegne grafer. Det er snakk om tre funksjoner på noe ulik form. Det er underforstått i oppgaven at y er å betrakte som en funksjon av x. Fra et formelt synspunkt kan det innvendes at det siste uttrykket implisitt også gir x som en funksjon av y. Den første oppgaven er den som inneholder den mest vanlige formen for et funksjonsuttrykk:



Oppgaveeksempel 16: Oppgave 7 Funksjoner 8 – 10.

Oppgave 7 Funksjoner 8 -10	9. årstrinn
Ubesvart	14
Tegner grafen korrekt *	30
Merker av punkt, trekker ikke opp linje **	22
Gir punktet (2, 1) som svar	16
Tegner linje gjennom origo	10

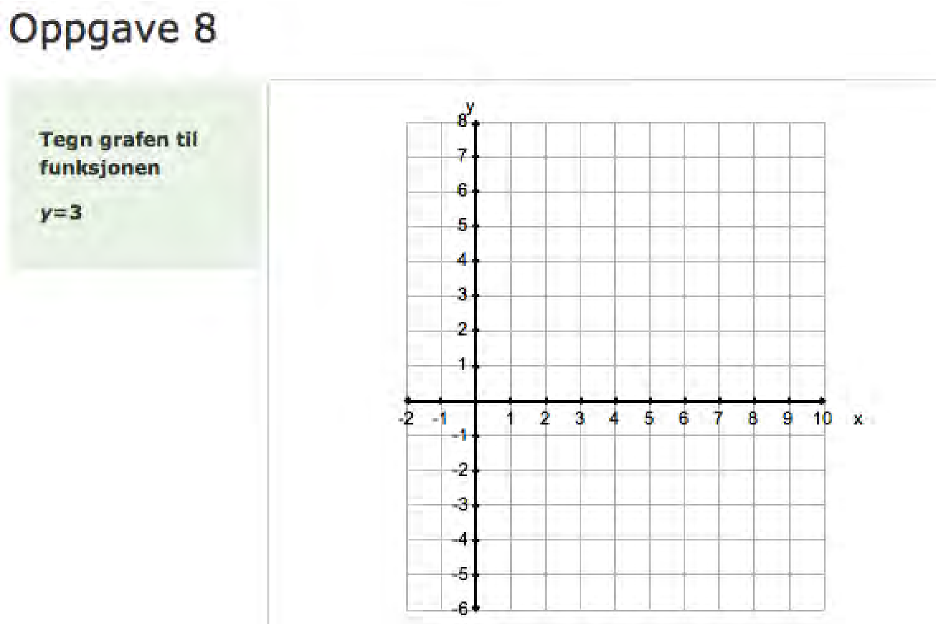
Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 Funksjoner 8 – 10.

* Det er her tatt med både elever som tegner ei rett linje uten å merke av noen punkter på den, og de som tegner ei rett linje der punktene er avmerket.

** Dette omfatter også elever som gir punktet (2, 1). I tillegg er det 3 % som merker av punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Forholdsvis mange har latt være å svare. Svarprosenten av de som tegner inn punkt, tyder på at disse elevene tror at sammenhengen mellom x og y bare gjelder en verdi. Elever som velger (2,1), tolker trolig variablene som merkelapper, “2 x-er og 1 y”.

Den neste oppgaven er av samme kategori men her er et funksjonsuttrykk som elevene har mindre erfaring med.



Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Funksjoner 8 – 10.

Oppgave 8 Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	21
Tegner grafen korrekt *	12
Merker av punkt, trekker ikke opp linje **	5
Velger punktet (0, 3) som svar	31
Tegner linje gjennom origo	12

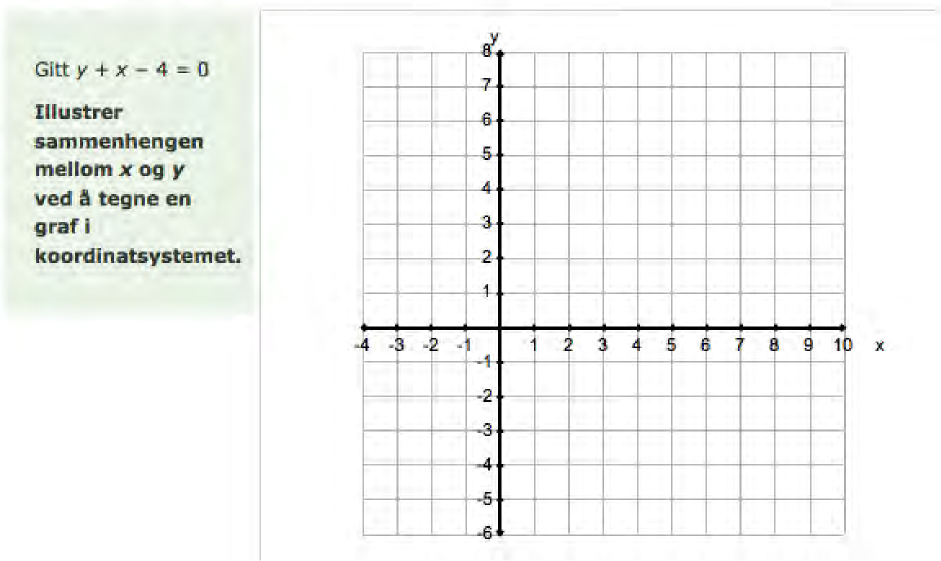
Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Funksjoner 8 – 10.

* Det er her tatt med både elever som tegner ei rett linje uten å merke av noen punkter, og de som tegner ei rett linje der punktene er avmerket.

** Dette omfatter også elever som gir punktet (0, 3). I tillegg er det 3 % som merker av punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Svarene her har mange fellestrekk med svarene i spørsmål 7a. Vi kan si at det er en utbredt misoppfatning at grafen til «funksjonen» y = 3 er et punkt, det vil si at det bare er en x-verdi. Vi legger merke til at svaret (0,3) igjen kommer av at variabelbegrepet ikke er brukt riktig.

Oppgave 9



Oppgaveeksempel 18: Oppgave 9 Funksjoner 8 – 10.

Oppgave 9 Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	47
Tegner grafen korrekt *	12
Merker av punkt, trekker ikke opp linje **	20
Velger punktet (0, 0) som svar	12
Tegner linje gjennom origo	7

Tabell 35: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 Funksjoner 8 – 10.

* Det er her tatt med både elever som tegner ei rett linje uten å merke av noe punkter, og de som tegner ei rett linje der punktene er avmerket.

** Dette omfatter også elever som gir punktet (0, 3). I tillegg er det 3 % som merker av punkter ved å tegne inn linjer parallelt med koordinataksene.

Funksjonsbegrepet er tydeligvis fremmed, og nærmere halvparten av eleven har latt være å svare. Mange tenker punkt som svar, noe som vi vil tolke som at elevene tenker punkt når funksjoner blir oppgitt som ligninger, det vil si at både x og y går inn i et uttrykk. Elevene er vant til å finne en løsning til en ligning.

Et annet aspekt er at en del elever tegner grafen til funksjonene gjennom origo. Det tyder på *en misoppfatning om at alle lineære funksjonsgrafer går gjennom origo*.

Elever har problemer med å tegne grafer til lineære funksjoner. *En misoppfatning er å tegne punkt i stedet for linje*. Det er ikke sikkert i hvilken grad dette kan komme av måten som funksjonene er gitt på i oppgaven.

En annen misoppfatning er at alle lineære funksjonsgrafer går gjennom origo. Bakgrunnen for det kan være hvordan lineære funksjoner først ble innført med grafer som gikk gjennom origo. Elevene har ikke utvidet begrepet lineære funksjoner til også å omfatte konstantleddet.

1.6 Fra formel til situasjon

På grunn av formatet er det ingen oppgaver av denne typen i den digitale versjonen av kartleggingsoppgaven i Funksjoner 8 – 10. Vi tar likevel med en oppgave som ikke fikk plass:

Oppgave F Funksjoner 8 – 10 (ikke med)

Eksempel. Funksjonssammenhengen

$$y = 4x$$

passer til denne fortellingen:

y kroner er det du må betale for x kg poteter som koster 4 kr per kg.

Lag en fortelling som passer til funksjonssammenhengen

$$y = 25x + 20$$

Oppgaveeksempel 19: Oppgave F Funksjoner 8 – 10. Ikke med i den læringsstøttende prøven

Oppgave F Funksjoner 8 – 10 Fortelling	9. årstrinn
Ubesvart	27
Akseptable forklaring	39
Akseptable forklaring med penger som kontekst *	35
Ufullstendig forklaring til riktig uttrykk (stor variasjon)	12
Fortellinger til andre former	5

Tabell 36: Prosentvis fordeling. Oppgave F Funksjoner 8 – 10. Ikke med i elektronisk prøve

* Dette svaralternativet er også tatt med blant kategorien ”Akseptabel forklaring” i linja ovenfor.

Tabellen ovenfor viser at elevene nok har blitt ledet inn på penger som kontekst gjennom eksemplet. Ellers er det vanskelig å finne bestemte mønstre i de svarene som er feil, slik at ingen bestemte misoppfatninger avdekkes.

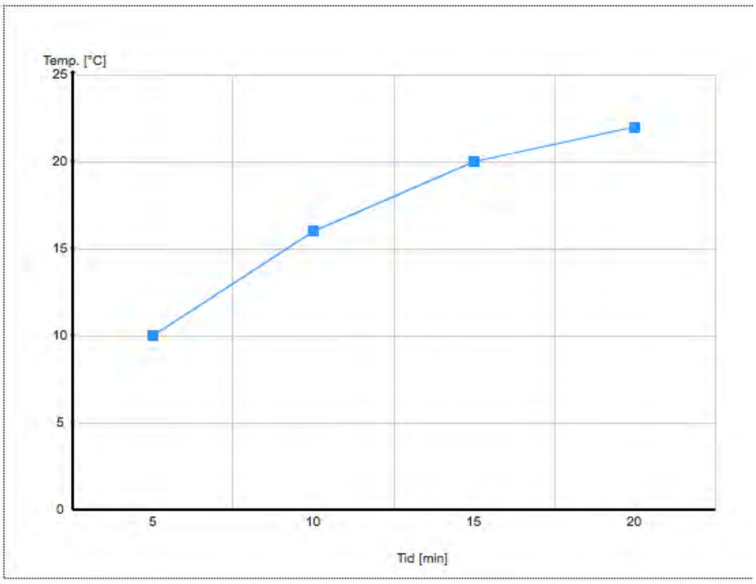
1.7 Fra tabell til graf og fra graf til tabell

Oppgave 17

En vifteovn ble testet. Tabellen viser hvordan temperaturen utviklet seg i rommet.

Tid [min]	5	10	15	20
Temp. [°C]	10	16	20	22

Tegn et linjediagram for å vise hvordan temperaturen i rommet endret seg ifølge tabellen.



Oppgaveeksempel 20: Oppgave 17 Funksjoner 8 – 10.

Hensikten med denne oppgaven er å undersøke hvordan elevene knytter sammen opplysninger gitt i tabell og en graf. I oppgaven er det en opplysning som gir et femte punkt, nemlig at da ovnen var slått på, var temperaturen i rommet 5 grader Celcius. Ut fra formuleringen i oppgaveteksten kan det nok diskuteres om dette punktet bør være med på grafen: "etter at testen startet" kan vise til tidspunkt etter "0", og dette punktet er helle ikke avmerket opprinnelig.

Oppgave 17 Funksjoner 8 – 10	7. årstrinn
Ubesvart	10
Tegner 5 punkter riktig	7
Tegner 4 punkter riktig	64
Avmerker punkter der første- og andrekoordinat er byttet om, for eksempel (10, 5)	4

Tabell 37: Prosentvis fordeling. Oppgave 17 Funksjoner 8 – 10.

Vi ser at noen elever bytter om første – og andrekoordinaten, selv om aksene har benevning og tabellen skulle være tydelig å lese.

Oppgave 13

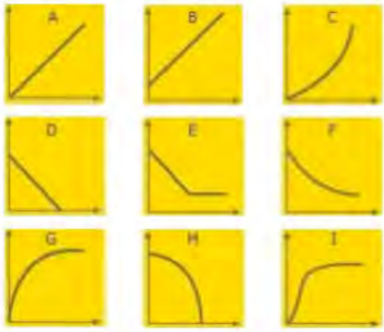
For hver av tabellene I og II skal du velge hvilken graf som passer best.

a) Hvilken graf passer best til avkjøling av kaffe?

Svar:

b) Hvilken graf passer best til antall fugler på en vulkanøy?

Svar:



I. Avkjøling av kaffe

Tid, minutt (x)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatur, grader (y)	90	79	70	62	55	49	44

II. Antall fugler på en vulkanøy

År (x)	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
Antall fugler (y)	0	1	5	17	30	30	30

Oppgaveeksempel 21: Oppgave 13 Funksjoner 8 – 10.

I disse oppgavene er det gitt tabeller, og et visst antall grafer er tegnet opp. Hensikten er å undersøke om elevene kan gjenkjenne grafens form med bakgrunn i opplysning-ene i tabellen.

Grafene som er tegnet, kan kategoriseres i grupper:

- A, B og C er voksende
- D, E, F og H er avtakende
- G og I er voksende, men flater ut, selv om det bare er grafen I som synes å nærme seg en bestemt verdi

Oppgave 13a Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	17
F (Riktig svar)	40
Andre minkende grafer – E, D eller H	18
Voksende grafer – A, B, C, G, eller I	20

Tabell 38: Prosentvis fordeling. Oppgave 13a Funksjoner 8 – 10.

At en del elever tegner en voksende graf som svar, kan komme av at de bytter om aksene på grafen eller leser tabellen, men bytter om argumentene. (En må igjen merke seg at det bare er underforstått at x viser til førsteaksen og y til andreaksen. Selv om det er grunn til å regne med at dette ikke har forvirret elevene, vil det være et moment å merke seg.)

Oppgave 13b Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	18
I (Riktig svar)	52
Andre voksende grafer – A, B, C, eller G*	16
Minkende grafer – D, E eller F	8

Tabell 39: Prosentvis fordeling. Oppgave 13b Funksjoner 8 – 10.
*Vi merker oss at graf c fikk 6 %, mens graf g bare fikk 4 % av svarene.

I denne oppgaven er den flere riktige svar enn på spørsmål 13a. En mulig forklaring kan være at tallene (hvor mange fugler) er mindre, og at årstallene er mer kjente for elevene enn for eksempel avkjøling av kaffe. Ellers er resultatet av å oppgi motsatt (voksende/minkende) graf noe overraskende siden ”avkjøling” betyr lavere temperatur, mens det ikke er gitt noe hint om voksende/minkende i dette spørsmål b.

1.8 Fra tabell til situasjon og fra situasjon til tabell

I oppgave 3 er første spørsmål felles for alle aktuelle årstrinnene, mens 5. årstrinn og 7. årstrinn har spørsmål 3b felles.

Oppgave 3

Tabellen viser når tog går fra forskjellige stasjoner.

a) Når går tog nr. 701 fra Oslo S?

Svar:

Petter skal være på Kongsberg senest kl. 1530.

b) Når kan han senest reise med toget fra Drammen?

Svar:

Tog nr.	71	701	1620	505	73	703
Oslo S	0718	1033	1345		1539	1718
Nationaltheatret	|	|	1347		|	|
Lysaker/Fornebu	0729	1043	1355		1549	1728
Asker	0743	1100	1410		|	1744
Drammen	0757	1114	1425		1620	1759
Mjøndalen	|	|	1438		|	|
Hokksund	|	1131	1445		|	1812
Vestfossen	|	|	1450		|	|
Kongsberg	0829	1157	1508	1515	1653	1838
Hjuksebø	|	|		1551	|	|
Nordagutu	0907	1238			1729	1922

Oppgaveeksempel 23: Oppgave 3 Funksjoner 8 – 10.

Denne oppgaven var lik for elevene på 5. årstrinn og 7. årstrinn. Tabellen som var brukt, var i en form som ville være egnet til å tegne et søylediagram, med poeng på førsteaksen og antallet avsatt som søyle. Hensikten med oppgaven var å se elevenes forståelse av data presentert i en tabell.

Oppgave 3a Funksjoner 8 -10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	1	1
10:33 eller lignende (Riktig svar)	93	96	97
07:18 eller lignende	1	1	1

Tabell 42: Prosentvis fordeling. Oppgave 3a Funksjoner 8 – 10. I

Oppgave 3b Funksjoner 8 -10	9. årstrinn
Ubesvart	3
14:25 eller lignende (Riktig svar)	83

Tabell 43: Prosentvis fordeling. Oppgave 3b Funksjoner 8 – 10.

1.9 Fra tabell til formel og fra formel til tabell

Oppgave 10

Tabellen viser sammenhengen mellom *x* og *y*.

Hvilke eller hvilket uttrykk viser sammenhengen mellom *x* og *y*?

- ☐ $y=x+7$
- ☐ $y=8x$
- ☐ $x-y+7=0$
- ☐ $y=x^2+7$

x	1	4	7	10	13
y	8	11	14	17	20

Oppgaveeksempel 24: Oppgave 10 Funksjoner 8 – 10.

I oppgaven er det gitt en standard funksjonstabell med sammenheng mellom x og y. Ligningene som var gitt som svaralternativer, var slik at alle passet til første verdi for x: x = 1 gir y = 8.

Oppgave 10 Funksjoner 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	19
y = x + 7 og x – y + 7 = 0 **(Riktig svar)**	19
(Bare) y = x + 7	21
(Bare) x – y + 7 = 0	3
y = 8x	6
$y = x^2 + 7$	2
To formler, der én er riktig	16

Tabell 45: Prosentvis fordeling. Oppgave 10 Funksjoner 8 – 10.

Forholdsvis mange svarte ikke på oppgaven.

Første og tredje ligning gir samme resultat. Den tredje ligningen har en noe uvanlig form, og det er rimeligvis grunnen til at forskjellen var såpass stor mellom de som bare svarte denne og de som bare svarte den første. Vi kan heller ikke se bort fra at elevene først prøvde med den første ligningen, og når den passet, så stoppet de.

Det er noe overraskende at såpass mange som 6 % hadde merket av (bare) alternativet 8x. Det er relativt lett å se at x = 4 og y = 11 ikke passer inn her.

DEL 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste *misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av måling og enheter*. Disse vanskene har stått sentralt i første del av dette ressursheftet.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi først ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner. Deretter tar vi for oss en del aktiviteter som er rettet mot problemene og misoppfatningene som er drøftet i første del.

Vanlige misoppfatninger hos elevene innenfor *Funksjoner*:

- En grafisk framstilling gir et direkte (eller mer konkret) bilde av en situasjon.
- Elevene bruker bokstavene som merkelapper (blir forvekslet med nevning)
- Alle lineære funksjonsgrafer går gjennom origo

Kapittel 2 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk,,slik at faget får mening ,må elevene ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981)

Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.

Undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil lærere assosiere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Det å be elever presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og at disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere disse forslagene
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte elev.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere disse. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor blir det pekt på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klasser.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det uforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er riktig eller feil. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist har vist at klasser gjør det klart bedre på prøver når læreren ikke for tidlig prøver å "avslutte" diskusjonene med å peke på riktige svaret eller på den riktige måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det riktige tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som

- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta,
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte en som snakker,
- verdsetter alle meninger og ikke framhever sitt eget syn,
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer,

"Hør hva Anne sier." "Tak Helge! Nå, hva mener du, Marit?" "Hvordan reagerer du på det, Åse?" "Er det andre ideer her?" "Kan du gjenta det du sa, Petter?"

2 Noen ganger være en "utspørrer " eller "provokatør" som

- introduserer en ny ide når diskusjonen er laber,
- følger opp et synspunkt,
- spiller "djevelens advokat",
- fokuserer på et viktig begrep,
- unngår å spørre multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar.

"Hva ville skje dersom ...?" "Hva kan du si om svaret, når du multipliserer to tall?"

3 Ikke være en dommer eller "vurderer" som

- Vurderer hvert svar med "ja", "godt" eller "interessant" eller lignende. Slikt hindrer ofte andre fra å komme fram med alternaive ideer og oppfordrer til en "ytre akseptabel" framførelse i stedet for en utforskende samtale.

En bør unngå uttrykk som "Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene." "Du er nesten framme." "Ja, det er riktig." "Nei, du skulle ha sagt …" "Kan noen se hva som er feil med det Gunnar sier?"

Denne listen er ikke ment å vise at det alltid er upassende å evaluere et elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med "spørsmålsgjetting", der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende samtale, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, forlater elevene timen argumenterende og tenkende.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, så kan disse ta mange former og ha ulike formål. Det vil for eksempel være forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der en skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når en har arbeidet en med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor vil vi peke på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger vil det være spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsninger de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å avdekke misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som:

- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? (En kan så vel sammenligne på tvers av oppgaver som elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

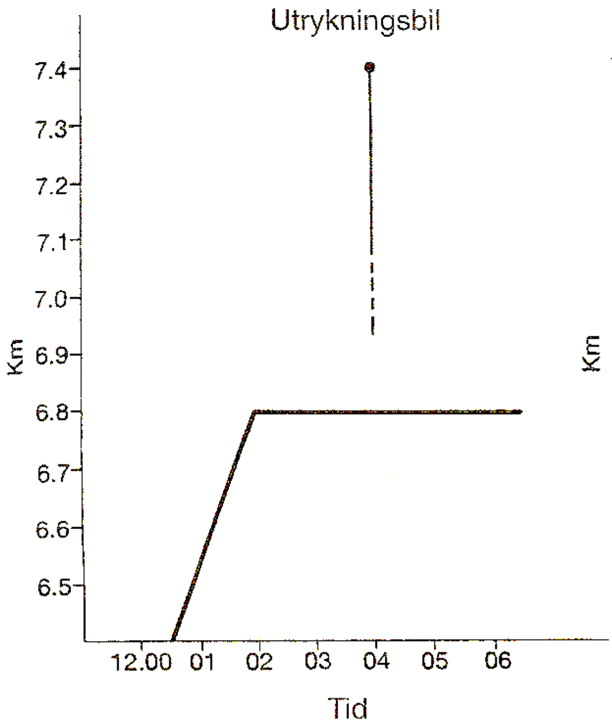
Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor.

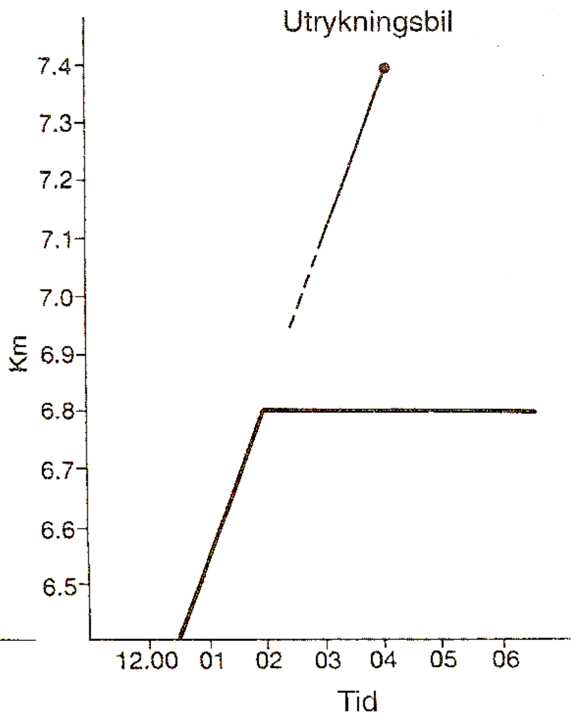
2.1 Aktiviteter som utgangspunkt for diskusjon

Grafer

Grafer som beskriver situasjoner, kan brukes til å få fram kognitive konflikter. Betrakt følgende situasjon: En bil har fått motorstopp på et visst sted på et visst tidspunkt, gitt ved koordinatene 12.02 (klokkeslett) og 6,8 km. En utrykningsbil forlater klokka 12.04 et sted ved koordinatene 7,4 km for å komme fram til bilen. Tegn inn kjøreturen til utrykningsbilen i koordinatsystemet.

På figuren nedenfor er det vist to mulige slike kjøreturer.





Begge disse figurene kan være gode utgangspunkter for diskusjoner, der man spesielt ser på tidsaksen. For eksempel vil man kunne argumentere med at tiden vil stå stille eller gå "baklengs" med utgangspunkt i figurene.

Regneark

Ved å bruke regneark har vi en del muligheter for aktiviteter som utfordrer elevene kreativitet når det gjelder å kommer fram til funksjonsuttrykk. Elevene skal bli kjent med regnearket ifølge kompetansemålene etter 7. årstrinn der elevene skal kunne "beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere enkle berekningar."

"Finn formelen"

Ideen er som følger:

> I en rute kan man skrive inn tallverdier. Avhengig av det tallet som er skrevet inn, vises det en annen (avhengig) verdi, for eksempel et par ruter til høyre. Denne (avhengige) verdien bygger på en formel som er skrevet inn. Elevenes oppgave er å finne formelen som gir den avhengige verdien.

Regnearkoppsett for en slik oppgave kan være meget enkel, eller noe mer komplisert.

Et enkelt regnearkoppsett er vist nedenfor:

	Argument		**Funksjonsverdi**		
	4		8		
	6		12		

Noe tekst, som for eksempel ”Argument”, ”Funksjonsverdi” skrives inn på et passende sted. I en rute til høyre for der vi planlegger å skrive inn argumentverdien, skrives det inn en formel. Den kan skjules, slik at den ikke vises på statuslinja når formelruta er aktiv. Hvordan dette gjøres, vil være avhengig av hvilken type regneark som blir brukt. Elevene kan så prøve seg fram ved å sette inn verdier i ruta for ”Argument”. Ved å se på funksjonsverdiene skal de så forsøke å skrive ned formelen som er brukt.

For å få en bedre oversikt kan de også få sine verdier skrevet inn i en annen rute på arket.

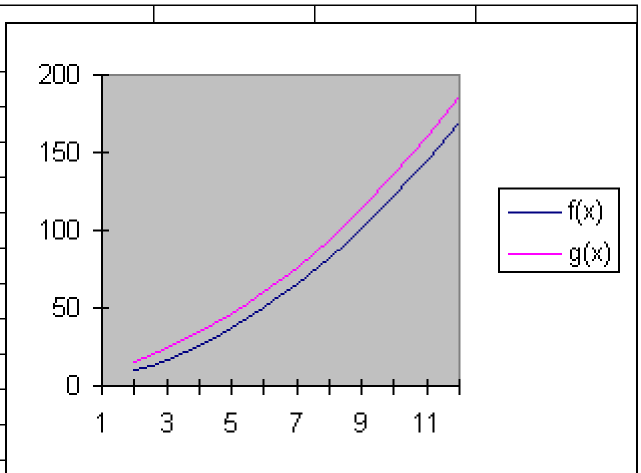
Oppgaven kan varieres på ulike måter, for eksempel ved at elevene får oppgitt en rekke verdier samtidig. Det kan gjøres ved at det lages en tabell med argumentverdier og en tilhørende tabell med funksjonsverdier.

Elevene arbeider i grupper foran skjermen og kan gi hverandre oppgaver. Læreren kan også legge inn formler på forhånd i regneark, som elevene henter fram. Dette siste kan ofte være å foretrekke i alle fall i en startfase, slik at ikke gis helt ”umulige” oppgaver.

Denne oppgaven kan også utvides til å gjelde funksjonsgrafer.

I et regneark har vi muligheten til å vise en funksjonsverdi og tilhørende graf på samme ark (skjerm). Det er videre slik at i noen regneark (for eksempel Excel for Windows) vil grafen forandres når man forandrer tabellen, det vil si funksjonsforskriften, som er grunnlaget for tabellen.

x	**f(x)**	**g(x)**
3	10	16
4	17	24
5	26	34
6	37	46
7	50	60
8	65	76
9	82	94
10	101	114
11	122	136
12	145	160
13	169	186



En utvidelse av oppgaven ovenfor vil være at det legges inn to funksjoner, *f* og *g*, der *f*-funksjonen kan være mer skjult, og hensikten kan være å finne en funksjon *g* som er slik at grafene faller sammen.

Funksjonen *f* kan være skjult på forskjellige måter. Det kan være at formelen ikke er synlig, men at funksjonstabellen ellers er synlig, alternativt kan vi skjule kolonnen der *f* er definert. Oppgaven i dette tilfellet er da mer direkte å tilpasse grafen til funksjonen *f*.

Det bør bemerkes at det ikke er nødvendig i denne sammenhengen å bruke formler som funksjonsforskrifter. En tabell for f kan skrives inn direkte og deretter skjules. Oppgaven for elevene blir å finne verdiene til funksjonen som gir den gitte grafen, eventuelt en formel som gir en god tilpassing.

Kapittel 3 Bruk av kalkulatorer og andre digitale verktøy i arbeidet med funksjoner

Kalkulatorer og andre digitale verktøy spiller en stadig større rolle i samfunnet, og de har kommet inn i matematikkundervisningen på flere årstrinn.

Mens vi i L97 tenkte seg bruk av kalkulator eller "lommeregner" allerede fra 2. årstrinn, nevnes "lommeregner" første gang i kompetansemålene etter 7. årstrinn i Kunnskapsløftet LK06, der elevene skal bruke den til ulike beregninger. Det er vanlig med en enkel kalkulator gjennom hele grunnskolen.

I videregående opplæring brukes det en grafisk kalkulator. Men også mer kraftige digitale verktøy blir brukt, som for eksempel dynamisk programvare.

I Kunnskapsløftet defineres bruk av digitale verktøy som en av dem fem grunnleggende ferdighetene:

> *Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handlar om å bruke slike verktøy til spel, utforsking, visualisering og publisering. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til problemløysing, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med høvelege hjelpemiddel, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat.*

Bruk av datamaskiner med ulik programvare samt kalkulatorer brukes nå i skolen fra mellomtrinnet og videre oppover i videregående opplæring.

Både kalkulatorer og datamaskiner har ulike bruksmåter i skolen. De er et hjelpemiddel for å gjøre matematikk, fra de enkle beregningene til, for eksempel, å løse omfattende og komplekse ligningssystemer. De kan også brukes som et hjelpe-middel til å lære matematikk. Det gjelder særlig datamaskiner med ulike programvare og også ulike kalkulatorer, fra de enkle til de avanserte modellene.

Enkel kalkulator

En vanlig enkel kalkulator har de fire regningsartene, minne og ofte kvadratrot og en prosenttast.

Denne typen kalkulator er et obligatorisk hjelpemiddel på ungdomstrinnet, og vi regner med at alle elever på grunnskolen (fra mellomtrinnet) har en slik kalkulator gjennom hele grunnskolen. De fleste kalkulatorer leveres nå med en såkalt emulator. Emulatoren er en kalkulator som ligger som programvare i en datamaskin. Læreren kan benytte en projektor til å vise emulatoren (kalkulatoren) i klasserommet.
Det finnes videre en rekke avanserte modeller som har mange matematiske funksjoner innbygget. Disse modellene går langt utover grunnskolens matematikk.

Grafiske kalkulatorer
Kalkulatorer med grafisk vindu har vanligvis en rekke avanserte matematiske funksjoner. I denne sammenhengen er det viktig at de kan vise grafiske bilder – funksjonsgrafer og statistiske diagrammer. Videre har grafiske kalkulatorer den fordelen at en serie utregninger kan vises i vinduet. De kan også programmeres. Slike kalkulatorer er ikke så vanlige i grunnskolen, der regneark og eventuelt andre graf-tegningsprogram er mer vanlig.

Datamaskiner med ulike programvare
Et tredje alternativ er datamaskiner med ulike typer av programvare. Den programvaren som er mest aktuell i vår sammenheng er:

- Regneark (obligatorisk hjelpemiddel ved skriftlig eksamen i matematikk etter 10 .årstrinn)
- Matematisk programvare, for eksempel graftegningsprogrammet Geogebra.

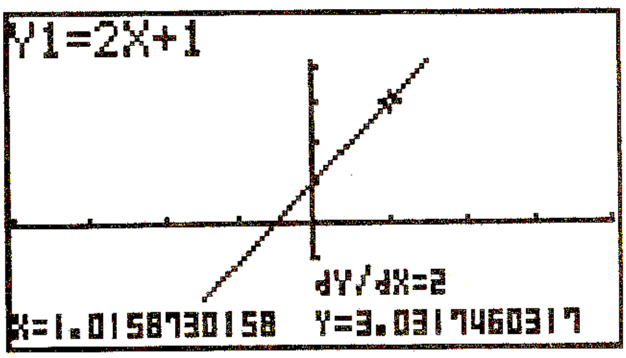
3.1 Hvordan kan teknologien være til hjelp i arbeidet med funksjoner?

Gjennom eksperimentering med kalkulator/datamaskin kan elevene bli fortrolige med flere momenter som gjelder funksjoner.

Grafisk kalkulatorer og datamaskiner kan også brukes direkte til å illustrere overgangene som vi har i Janviers matrise. Med utgangspunkt i denne oppstillingen vil vi kort kommentere noen av mulighetene:

3.1.1Fra graf til tabell

Dersom vi har en graf på skjermen eller i kalkulatorvinduet, kan vi bruke den såkalte trace-funksjonen. Vi får da ut en rekke x- og y-verdier som kan danne grunnlaget for en funksjonstabell. Nedenfor er det vist et typisk vindu til en grafisk kalkulator der trace-funksjonen er slått på:

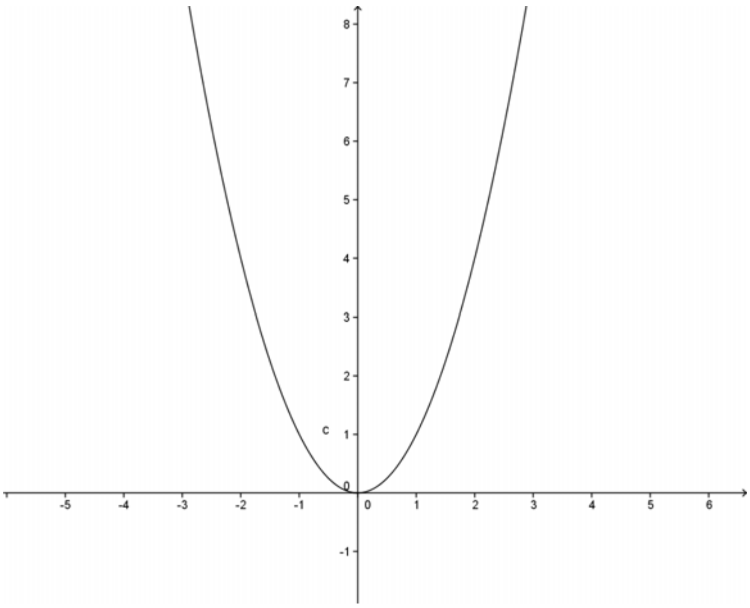


Denne muligheten finnes for grafiske kalkulatorer og for annen matematisk programvare.

De grafiske kalkulatorene har ulemper, for eksempel nøyaktighet (oppløsning på skjermen). Den kan hende at trace-merket ikke treffer heltallige verdier. Dersom læreren er oppmerksom på dette forholdet, kan det danne utgangspunkt for en diskusjon av den grafiske kalkulatorens begrensninger og muligheter.

3.1.2 Fra formel til graf

Med grafiske kalkulatorer, regneark eller annen matematisk programvare er det enkelt å tegne en graf til en funksjon gitt ved en formel. Ved å skrive inn $y = x^2$, kommer raskt følgende graf fram (i Geogebra):



Den samme muligheten er naturligvis til stede for grafiske kalkulatorer.

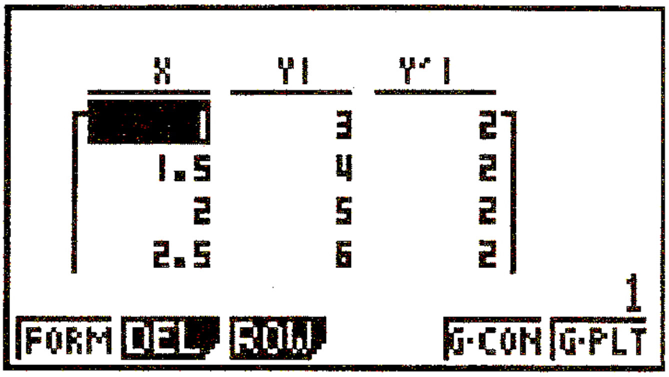
3.1.3 Fra formel til tabell (regneark og kalkulator)

Denne muligheten har man først og fremst i regneark og grafiske kalkulatorer. Tabellen nedenfor er gjort i regnearket Excel:

	x	**y=x^2-2**	
	-3	7	
	-2	2	
	-1	-1	
	0	-2	
	1	-1	
	2	2	
	3	7	

vi regner ut første y-verdi ved hjelp av formelen, kopierer ruten og "drar" ruten ned til siste y-verdi slik at hele tabellen framkommer.

Nedenfor er det laget med tabellfunksjonen på en grafisk kalkulator ut fra funksjonen gitt i det grafiske vinduet ovenfor i kapittel 3.1.1 ($y = 2x + 1$).



3.1. 4 Fra tabell til graf

For å illustrere dette er regneark godt egnet. Nyere regneark har en rekke muligheter til å framstille tabeller som grafer, som punkter eller sammenhengende kurver. Vi viser til kapittel 2.1 for et eksempel.

3.2 Bruk av digitale verktøy for å lære matematikk

Funksjonsmaskiner med enkle kalkulatorer

I kapittel 2 omtalte vi bruk av regneark som en funksjonsmaskin. Vi kan også bruke en enkel kalkulator for å lage en funksjonsmaskin.

Nesten alle kalkulatorer har muligheten til å bruke konstanter i beregninger. Det betyr at de kan settes opp som ”funksjonsmaskiner” – for eksempel en ”en-legg-til-5”-maskin eller en ”multiplisert-med-3”-maskin.

Noen kalkulatorer har en ”K”-tast for å lagre konstanten, men de fleste kalkulatorer har konstanten innbygget, slik at det krever noe eksperimentering for å finne ut hvordan den virker.

Det følgende er eksempel på en slik inntasting når man bruker en enkel kalkulator:

[+][5][=] setter opp ”legg-til-5”: Det vil si at hvis man taster

[4][=] blir svaret 9. Videre gir [8][=] svaret 13.

For maskinen ovenfor vil videre gjentatte tastetrykk på [=] gi en tallfølge (hvilken?).
På denne måten kan man generere en rekke tallfølger. Vår hensikt er imidlertid å vise at selv meget enkle kalkulatorer kan virke som funksjonsmaskiner, det vil si at ved inntasting av et tall og et tegn, for eksempel [=], kommer det et tall til syne.

En elevoppgave kan være å finne regelen som ligger bak tallene.

Grafiske kalkulatorer har mange flere muligheter. De er svært avanserte funksjons-maskiner i utgangspunktet og vil nok være mindre hensiktsmessige på lavere årstrinn.

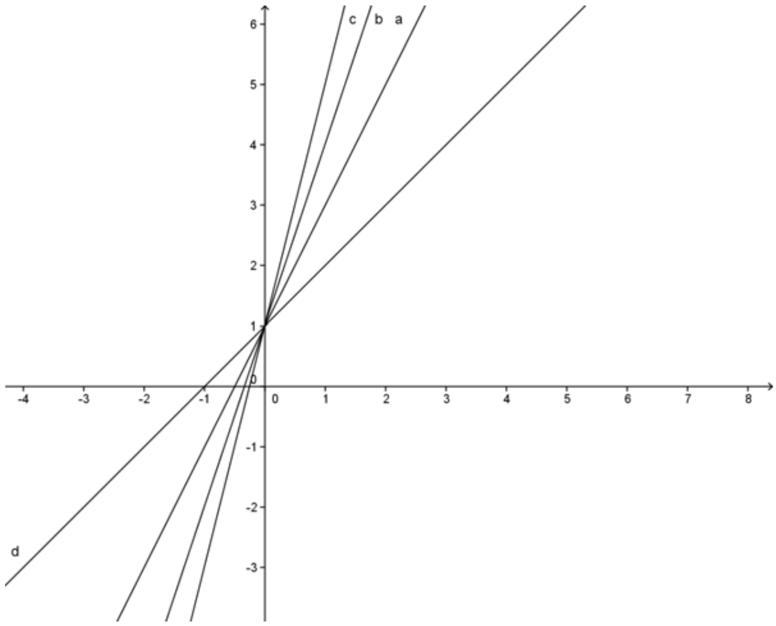
Å eksperimentere med grafer

Ta utgangspunkt i funksjonsuttrykket

$$f(x) = ax + b$$

Hva skjer når vi endrer verdiene av a og b? For å utforske dette kan vi bruke flere ulike verktøy. En grafisk kalkulator er godt egnet, og enkelte- for eksempel Casio CFX-9850G – har et menyvalg for å se virkningen av variasjon av konstanter på funksjonsgrafer.

En annen mulighet er å tegne ulike grafer inn i det samme koordinatsystemet. Vi kan så veksle mellom aktuelle grafer ved å bruke piltastene. I Geogebra kan vi tegne inn mange grafer i samme koordinatsystem.



I denne grafiske framstillingen er disse funksjonene tegnet inn:

$$y = x + 1$$
$$y = 2x + 1$$
$$y = 3x + 1$$
$$y = 4x + 1$$

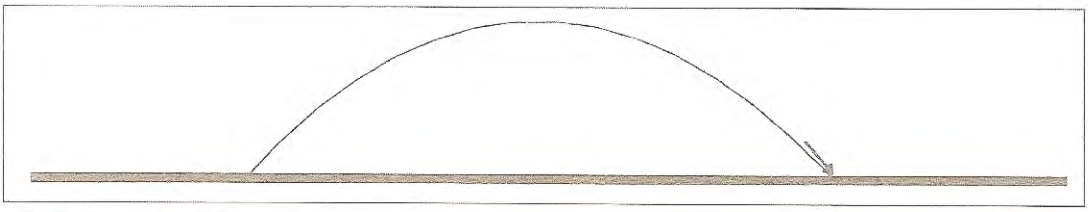
I dette dynamiske geometriprogrammet kan vi ta tak i grafene og flytte grafene slik at de endrer skjæringspunkt med y-aksen mens man beholder stigningstallet.

Kapittel 4 Undervisningsaktiviteter

4.1 Grafer som "bilder" av situasjoner

Noen elever oppfatter en graf slik at den gir et bilde av situasjonen. Et slikt eksempel er at elever vil framstille noe som er "høyt opp" i virkeligheten, som høyt oppe på grafen. Vi så eksempler på dette i analysen av noen kartleggingsoppgaver.

Som aktiviteter for arbeid i grupper kan vi la elevene møte situasjoner hvor det fokuseres på denne misoppfatningen)



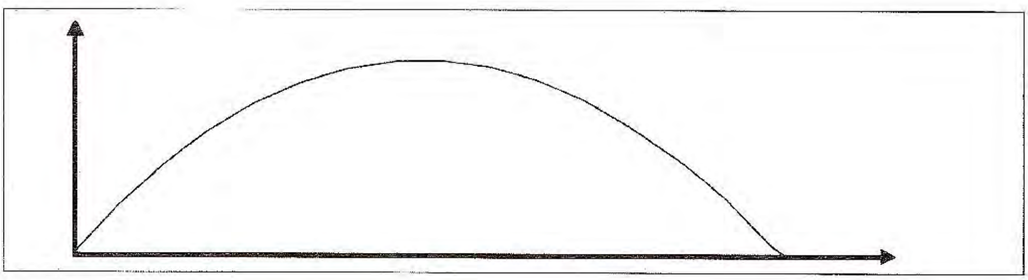
Tegningen ovenfor viser banen til et spyd i en konkurranse. Hvordan forandrer hastigheten til spydet seg når det flyr gjennom lufta (fra det har forlatt spydkasteren til det treffer bakken)?

Kommentarer
Ved å lytte til diskusjonen i gruppene vil læreren kunne danne seg et inntrykk av hvordan elevene oppfatter situasjonen. Enkelte elever vil blande sammen hastigheten til spydet og høyden og vil hevde at spydet øker farten den første tiden etter at det er kastet av spydkasteren.

Etter en viss tid – for eksempel 10 minutter – kan det være nødvendig med en kort diskusjon med hele klassen. Her er ikke poenget å komme med detaljer, men at elevene får en riktig form på grafen. Diskusjonen kan starte med at elever fra to eller tre grupper kan presentere sine grafer på tavla og forklare hvordan de har kommet fram til formen på grafen.

Et annet utgangspunkt vil være å starte med et konkret forslag:

Ole forsøkte å tegne grafen og kom med følgende forslag:



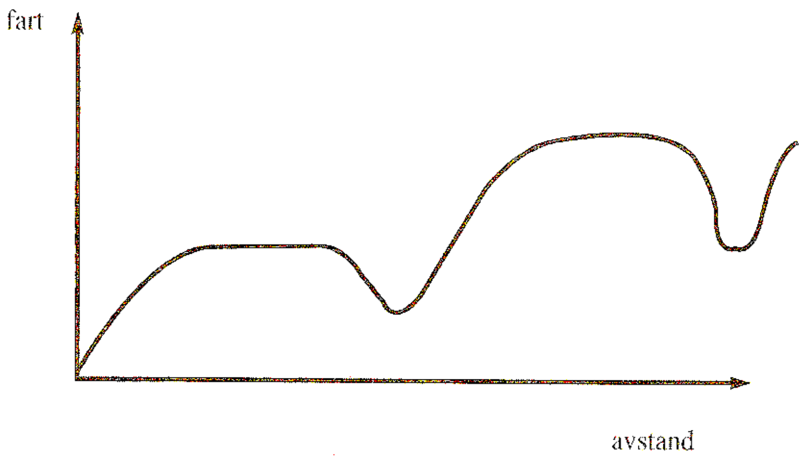
Elevene blir bedt om å kommentere grafen og forklare hvordan Ole kan ha kommet fram til den.

For å avslutte diskusjonen kan det være nyttig å tegne et diagram på tavla som viser spydets bane, sammen med et koordinatsystem der det skal tegnes inn variasjonen i spydets fart:

Læreren kan følge banen til spydet med hånda og be elevene beskrive hva som skjer med farten til spydet. Elevene kan på denne måten følge spydets bevegelse og farten samtidig.

En annen aktivitet som også fokuserer på "grafer som bilder", er at elevene får oppgitt en graf som et bilde og deretter diskuterer hva som kan være situasjonen som beskrives.

Hvilken aktivitet (eller sport) kan være representert ved denne grafen?



Kommentarer
Mange muligheter finnes. For eksempel kan det være en grafisk framstilling av et billøp i en bane hvor føreren må senke hastigheten i svingene. En sving kan for eksempel være krappere enn den andre, slik at hastigheten blir svært lav.

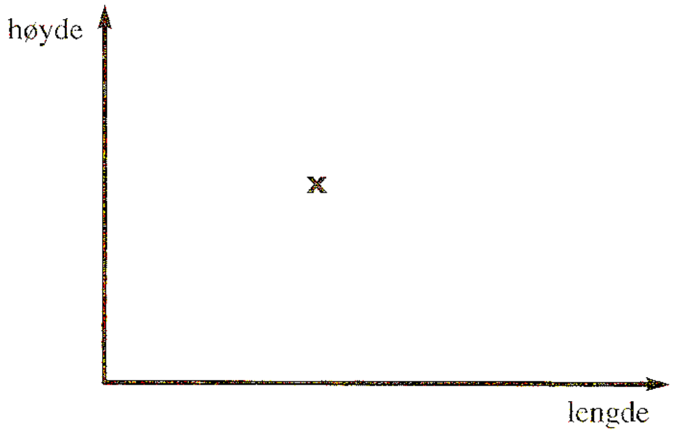
Elevene diskuterer først i grupper, mens læreren går rundt og observerer. Gruppene bør også presentere forslag som hele klassen kan diskutere.

Det er en fordel å gi oppgaver som kan ha mange forslag til løsninger.
Poenget med disse grafene er ikke at det legges vekt på nøyaktige framstillinger, men at elevene får en følelse av grafens form.

4.2 Å tolke punkter i et koordinatsystem

Eksempel 1

Læreren ber hver elev i klassen om å forestille seg et rektangel med areal – for eksempel – 24 arealenheter. Deretter tegner læreren opp et koordinatsystem og plasserer inn et punkt, som han forklarer representerer et slikt rektangel.



Kommentarer

Læreren ber så elevene fortelle hvor de vil plassere sine forslag, som representerer det rektangelet som de tenkte på. En slik diskusjon kan føre til at elevene ser at alle slike punkter som representerer rektangler med 24 arealenheter, vil ligge på en sammenhengende graf.

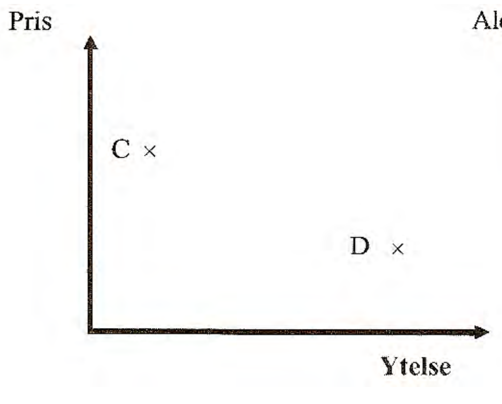
Det er ikke har noe stort poeng at grafen som framkommer, er en hyperbel, men det kan være en diskusjon om hva som skjer med kurven når lengden (eller høyden) blir svært liten.

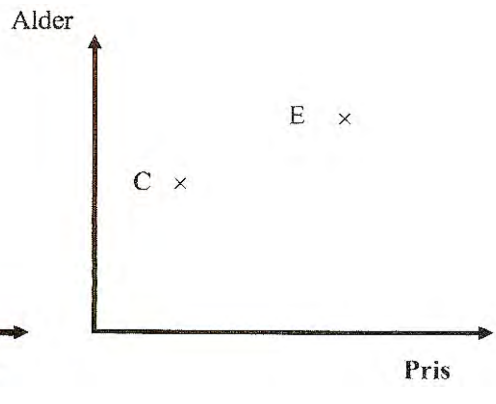
Denne diskusjonen kan utvides til å gjelde andre geometriske figurer eller egenskaper ved dem.

Tilsvarende kan klassen diskutere hva slags graf som framkommer hvis vi holder omkretsen til et rektangel konstant. I dette tilfellet kan klassen være med på en diskusjon om hva som skjer når en nærmer seg aksene. En annen videreføring kan være å knytte det grafiske bildet til ligningen til en rett linje eller et funksjonsuttrykk.

Eksempel 2

I diagrammene nedenfor er det tegnet inn tre datamaskiner som vi har betegnet med bokstavene C, D og E, og disse er plassert to og to inn i koordinatsystemer:





Spørsmål som kan stilles til disse diagrammene:

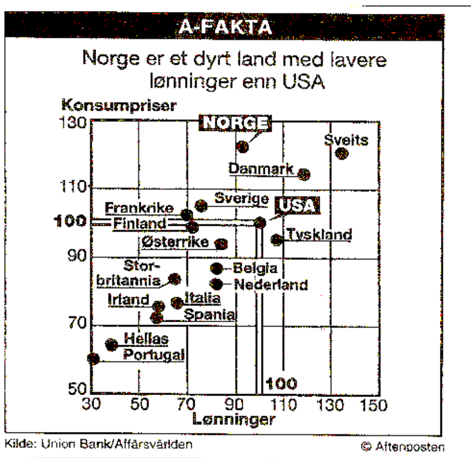
- Det første diagrammet forteller at datamaskin C var dyrere i innkjøp enn datamaskin D. Hva annet kan du lese ut av diagrammet?
- Hvor ville du tegne punktet som representerer datamaskin E, inn i det første diagrammet?
- Hvor ville du tegne punktet som representerer datamaskin D, inn i det andre diagrammet?

Kommentarer

Siden diagrammene ikke har de samme enhetene på aksene, er det mange muligheter for svar. Hensikten er ikke bare å finne en riktig plassering, men også resonnement bak plasseringen. Mange elementer kan trekkes inn, for eksempel at eldre maskiner som regel har lavere ytelse enn nyere. Dette behøver imidlertid ikke å komme inn i begynnelsen av diskusjonen.

Eksempel 3

I diagrammet nedenfor finner du en oppstilling av sammenhengen mellom konsumprisindeks og lønninger:



Vi kan stille opp en rekke spørsmål til dette diagrammet og la elevene diskutere i grupper:

- Hva betyr det å ligge høyt på grafen?
- Hva betyr det å ligge langt til høyre?
- Begrunn hvorfor påstanden i overskriften er riktig.
- Hvis du bare tok hensyn til de opplysningene som du kan lese ut av diagrammet, hvor burde du bo – i Norge eller Sveits?
- eller - er Nederland eller Belgia mest gunstig?

Kommentarer

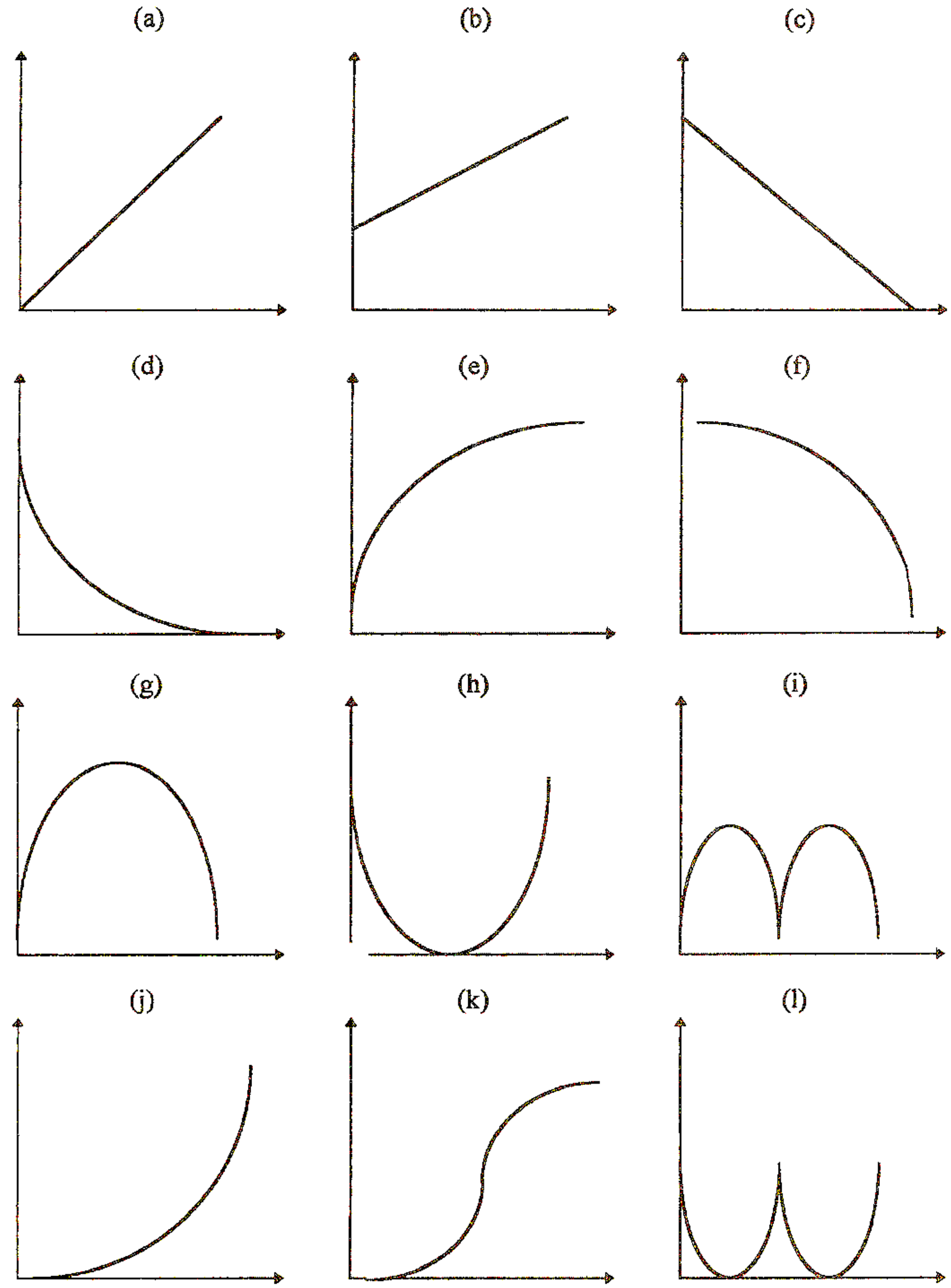
Diagrammet er et eksempel på hvordan punktdiagrammer brukes til å formidle informasjon i mediene. I enkelte aviser presenteres jevnlig grafer for en aktuell utvikling på et felt. Dette er grafer som læreren kan bruke i undervisningen.

Dette problemet vil falle for krevende for de lavere årstrinn, men spesielt på 9. årstrinn (eller 10. årstrinn) vil det være gode muligheter for diskusjon omkring fakta som presenteres i diagrammet. Perspektivet kan videre utvides ved at vi trekker inn flere elementer som er relevante for den sammenligningen som vi finner i diagrammet.

4.3 Å finne en graf ut fra en situasjon beskrevet med ord

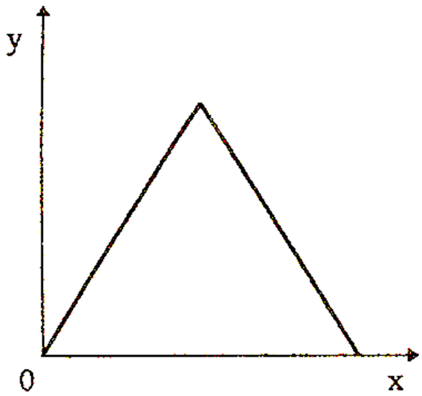
Nedenfor er det gitt noen beskrivelser av situasjoner. Velg den grafen som best beskriver situasjonen. Kopier grafen på et stykke papir, sett enheter på aksene og begrunn dine valg.

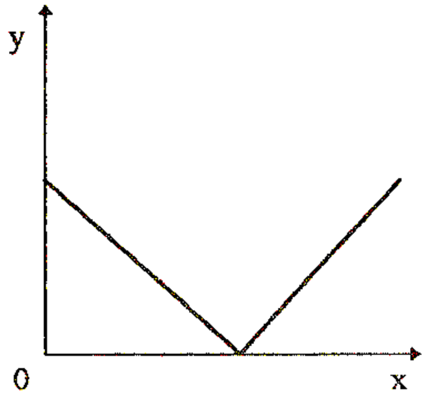
1. Nå stiger prisene langsommere enn de har gjort på lenge
2. Jeg drikker gjerne varm eller kald saft, men lunken saft liker jeg ikke.
3. Jo større hastighet, desto mer bensin bruker bilen.
4. Jo mer du trener, desto raskere løper du 100 meter.
5. Den raske utviklingen må gå langsommere etter hvert.
6. Jo flere som deltar i oppryddingen, desto kortere tid tar det å bli ferdig.
7. Enhver som mottar et brev, sender to brev videre.

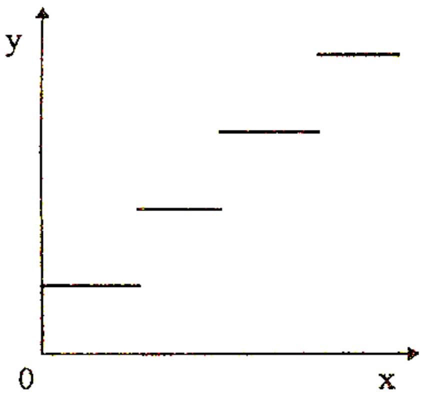


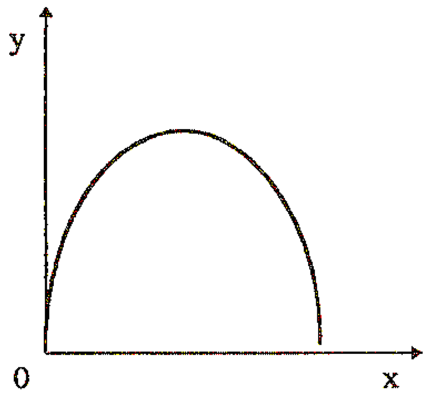
4.4 Å lage en tabell fra en graf

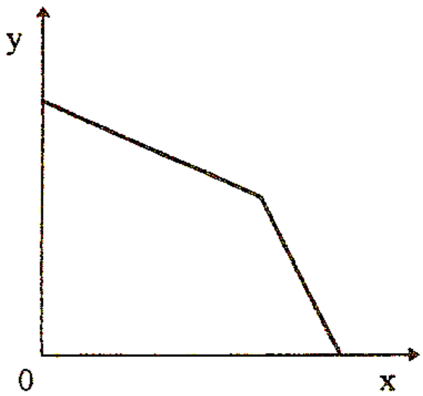
Fro hver av grafene nedenfor skal elevene forsøke å lage en tabell over sammenhengen mellom y og x.

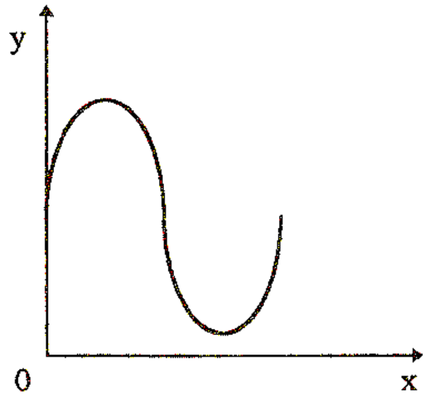












Kommentarer

Elevene kan her arbeide i par. Vi understreker at det er viktig å angi enheter på koordinataksene. Det er for øvrig noe som vi ikke alltid finner på grafiske kalkulatorer. Elevene bør parvis diskutere resultatene de har kommet fram til. De vil kunne oppdage at det er ikke en klar sammenheng mellom graf og tabell. Med ulike enheter på aksene kan tabellene bli svært forskjellige.

En videreføring av denne aktiviteten er også å forsøke å finne situasjoner som blir beskrevet ved hjelp av grafene. Her vil også elevene oppdage hvor viktig det er med nøyaktighet i angivelse av enheter på aksene.

Referanser

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Kerry, T. (1981). Talking: The teacher´s role. I C. Sutton (ed.): Commmunicating in the Classroom. London: Hodder & Stoughton

Pedersen, V. (1996) Fun*ksjoner i ungdomsskolen – et abstrakt begrep eller et konkret objekt?* Hovedfagsoppgave i relafagsdidaktikk. Universitetet i Oslo

Rasch-Halvorsen, A. (1997) *Funksjoner i grunnskolen. Elevenes møte med funksjons-begrepet.* Hovedfagsoppgave i relafagsdidaktikk. Universitetet i Oslo

Shell Centre for Mathematical Education (1985) *The Language of Functions and Graphs*. Manchester: Richard Bates Ltd.

Janvier, C. (1978) T*he Interpretation of Complex Cartesian Graphs – Studies and Teaching Experiments*