Utdanningsdirektoratet

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Geometri

Bokmål

Innhold

INNLEDNING

Dette ressursheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til Læringsstøttende prøver om emnet *Geometri*. Spesielt retter disse oppgavene seg mot begreper i geometri i grunnskolen.

Disse oppgavene er prøvd ut tidligere på 6. årstrinn og 9. årstrinn.

Del 1 i dette ressursheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger basert på utprøvingen av oppgavene.

Oppgavene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved elevens forståelse av forskjellige sider ved geometrien i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisningen, slik at elevene kan utvikle en så solid begrepsforståelse som mulig.

Analysen, som utfyller de veiledningstekster som knyttes til den enkelte oppgave i den digitale prøven, er likevel ikke fullstendig. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begreps-dannelse innenfor tall og tallregning.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer og veiledninger, som retter seg mot de vansker som kartleggingsoppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan kartleggingsoppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg de vanskene som elevene har.

Del 1: Analyse av oppgavene i læringsstøttende prøver

Geometri

I denne delen blir ulike begreper knyttet til geometri analysert og diskutert. Noen av de diagnostiske oppgavene er noe modifisert sammenlignet med de opprinnelige opp-gavene, mens andre en uforandret.

Det deltok 101 klasser på 7. årstrinn og 89 klasser på 10. årstrinn i datainnsamlingen. På disse årstrinnene var det henholdsvis 2167 og 2289 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulik størrelse. Blant de elevene som besvarte prøvene, har vi trukket ut i overkant av 500 elever.

Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen er følgende:

Geometri: 541 på 7. årstrinn og 523 på 10. årstrinn

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved geometri og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett.

I framstillingen i det følgende kommenterer vi noen av svaralternativene for de aktuelle oppgavene. Noen misoppfatninger blir illustrert med autentiske elevsvar.

Kapittel 1 Geometri i skolematematikken

Geometri kommer av de greske ordene *geo* og *metri*, som vi kan oversette som *måling* av *jordstykker*. Opprinnelig omhandlet geometrien romstørrelser, det vil si punkter, linjer, kurver, flater og gjenstander og deres beliggenhet, form og størrelse.

Egypterne og babylonerne/assyrerne i oldtiden hadde inngående kunnskaper om flate- og rommåling. Imidlertid var det spesielt i det gamle Hellas at geometrien utviklet seg. Et logisk system ble bygget opp.

Mest kjent er Euklid (ca. 300 f.Kr.), som samlet og systematiserte geometrien i den greske kulturkretsen. Han presenterte et system for geometrien med postulater og slutningsregler, som også har blitt stående som en modell for all logisk oppbygging av matematikk. I hans *Elementer* ble geometrien presentert. Den geometrien som ble presentert, har dannet grunnlaget for lærebøker i geometri i skolen i mer enn 2000 år. Et av de mest kjente resultatene vi har fra gresk geometri, er Pytagoras´ setning, som har lang tradisjon i skolematematikken. Setningen, som vi kaller Pytagoras setning, har vært kjent i mange kulturer (blant annet hos babylonerne/assyrerne), og den viser oss hvordan matematikken har vokst fram i ulike deler av verden.

Som et annet høydepunkt i gresk geometri kan vi trekke fram beregningene som Arkimedes (287 – 212 f.Kr.) gjorde av volum og overflate til ulike gjenstander . Hvis vi har en kule og en sylinder som er omskrevet kula, vil forholdet mellom overflaten til sylinderen og overflaten til kula være den samme som forholdet mellom volumet til sylinderen og volumet til kula, begge lik 3:2.

Pappos fra Alexandria levde fra ca. 290 til ca. 350 e.Kr., og han leverte også viktige bidrag til geometrien. I denne forbindelsen vil vi trekke fram hans interesse for problemløsning, og det å bruke hjelpetegning ved konstruksjoner kan vi føre tilbake til Pappos.

På 1600-tallet dukket det opp en rekke nye retninger og metoder i geometrien. Dette startet en utvikling som har fortsatt opp til vår tid. Her vil vi spesielt trekke fram innføringen av koordinatsystemet (koordinatgeometri) av Rene Descartes (1596 – 1650). Dette kalles *analytisk* geometri i motsetning til den klassiske geometrien, som betegnes gjerne som *syntetisk*. Med et koordinatsystem kan vi knytte tallregning til geometrien.

Her kan vi også trekke fram en berømt geometrisk konstruksjon, nemlig konstruksjonen av den regulære 17-kanten med passer og linjal. Den ble utført av Carl Friedrich Gauss på slutten av 1700-tallet og har blitt omtalt som det viktigste framskrittet innenfor geometriske konstruksjoner siden gresk matematikk.

Tidlig på 1800-tallet ble nye aksiomsystemer utviklet for geometrien, slik at den tradisjonelle euklidske geometrien ikke lenger ble den eneste geometrien. En annen utvikling har kommet i siste del av 1900-tallet. Datateknologien har gitt oss nye muligheter til å studere geometriske sammenhenger og størrelser. Som et eksempel kan vi nevne fraktalgeometrien.

Geometri er tema i matematikkundervisningen i alle land, og den har hatt en sentral plass i skolens matematikkundervisning i Norge. Den elementære klassiske euklidske geometrien har hatt en sentral rolle på de laveste årstrinn.

I ”moderne matematikk”-perioden – i 1960-årene – fikk skolematematikken en logisk utforming, der geometriske objekter (ofte) ble presentert som punktmengder. Dette ble etter hvert forlatt, og vi gikk tilbake til den klassiske geometrien i skolen.

En eksperimenterende geometri hadde en sterk stilling i L97 der man la vekt på utforskning og eksperimentering med geometriske mønstre og sammenhenger. Dette videreføres i Kunnskapsløftet LK06 der for eksempel elevene etter 10. årstrinn skal kunne

utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement ved hjelp av geometriske idear, og gjere greie for geometri som har særleg mykje å seie i teknologi, kunst og arkitektur.

Dataprogrammer knyttet til klassisk geometri kan være til hjelp i en slik eksperimentering.

Styrken til geometrien som et matematisk tema ligger i at sammen-henger og setninger kan visualiseres. Geometriske objekter som trekanter, sirkler osv. kan avbildes, og en kan utforske sammenhenger. Tradisjonelt har mye arbeid vært knyttet til konstruksjon og tegning i geometri. Denne delen av skolematematikken har blitt tonet noe ned i L97. Konstruksjon er imidlertid kommet tilbake i LK06 hvor eleven etter 10. årstrinn skal kunne

utføre og grunngje geometriske konstruksjonar og avbildingar med passar og linjal og andre hjelpemiddel

Mange andre områder i matematikk er videreføringer av geometriske sammenhenger; derfor er skolens geometriundervisning viktig ut fra et matematisk perspektiv.

1.1 Geometri og IKT i skolematematikken

Den geometrien som vi finner i samfunnet utenfor skolen, bruker i dag IKT som et sentralt verktøy. Konstruksjoner og figurer utføres og visualiseres på dataskjermen.

Datamaskinen åpnet også for nye muligheter i geometriundervisningen. En tidlig slik utvikling var tegneprogrammet (og programmeringsspråket) Logo. Logo hadde en viss innflytelse på spesialundervisning, men fikk liten innflytelse på den regulære geometriundervisningen. Måten å arbeide med geometriske figurer på og beskrivelsen av dem var utradisjonell. Imidlertid har elementer av den konstruktivistiske tankegangen bak Logo fått innflytelse. I Logo skulle dataskjermen være en ”mikroverden” der elevene skulle eksperimentere og selv finne sammenhenger. Vi har nå en rekke andre geometriprogrammer – som Cabri, Geometer´ Sketchpad og ikke minst GeoGebra – som mye tettere knytter seg opp mot klassisk geometri, og hvor dataskjermen er en mikroverden.

Kapittel 2 Tema I: Trekanter, firkanter og sirkler

Når vi arbeider med trekanter, vil vi også komme inn på begreper som lengde, vinkelmål, høyde, areal og omkrets. Slike begreper vil bli behandlet under dette temaet, samtidig som de tas opp igjen senere i forbindelse med diskusjonen av andre temaer.

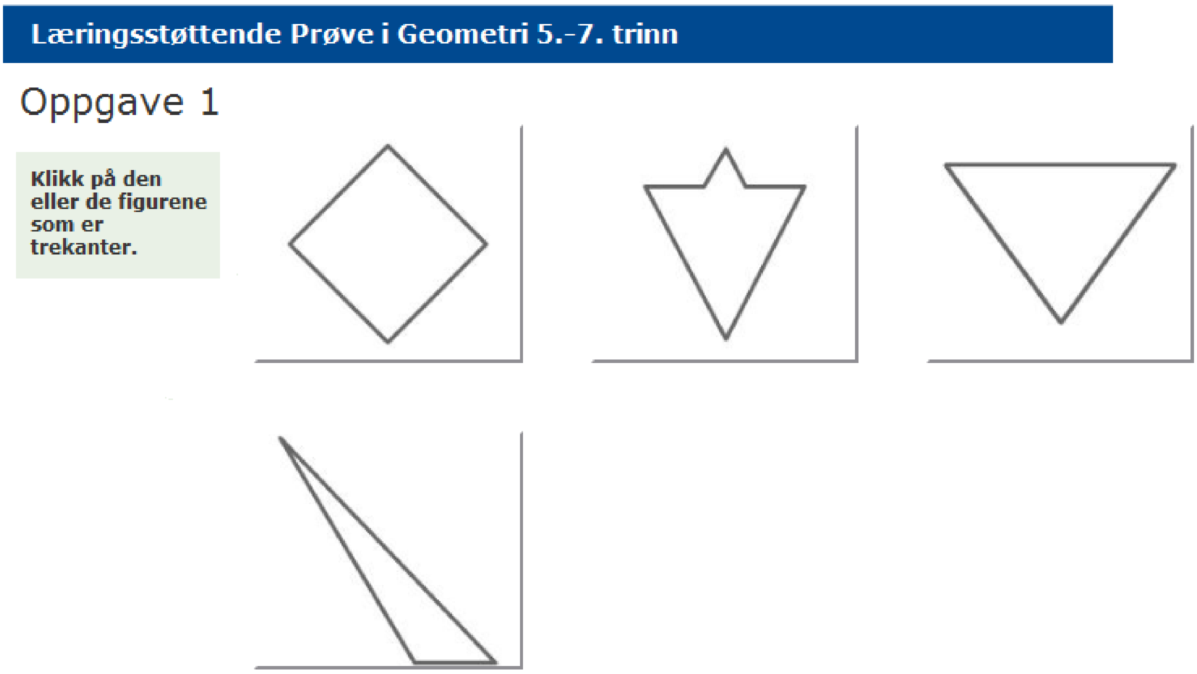
2.1 Trekanter

Oppgavesamlingene inneholder flere oppgaver som vi valgt å samle under overskriften ”trekanter”.

2.1.1Trekanters form

Begge prøvene om Geometri inneholder oppgaver der elevene må bruke sin kunnskap om hva som kjennetegner en trekant, for å ta stilling til en påstand eller løse en oppgave,

Når er en figur en trekant? For mange er det kanskje selvsagt at en trekant skal ha tre sider eller tre kanter. Figurer som tre kanter, men som skiller seg noe fra typiske eksempler på trekanter i lærebøker, kan likevel ikke bli oppfattet som trekanter av alle elever. Oppgave 2 Geometri 8 – 10 er ment å undersøke elevenes forståelse av hvordan trekanter kan se ut.



Oppgaveeksempel 1: Oppgave 1 Geometri 5-7 og Oppgave 2 Geometri 8 – 10. Trekanters form.

Så godt som alle elevene som besvarte denne oppgaven, gjenkjente figur C som en trekant, men enkelte elever har problemer med å se at også figur D er en trekant. Figuren skiller seg noe fra trekanter slik de oftest blir avbildet i lærebøker.

Oppgave 2 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	1	1
Trekantene C og D **(Riktig svar)**	87	92
Trekant C	8	3
Trekantene B og C og D	3	4

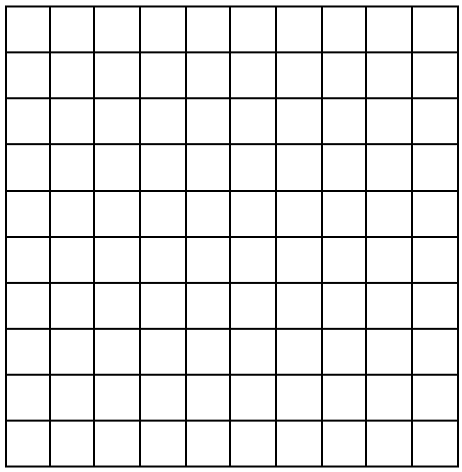
Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave 1 Geometri 5-7 og Oppgave 2 Geometri 8-10.

Det er interessant å merke seg at andelen elever som mener at figur B også er en trekant, øker fra 6. årstrinn til 9. årstrinn, samtidig som andelen elever som mener at bare figur C er en trekant, går ned.

Oppgave A Geometri 8 – 10 i oppgaveeksempel 2 nedenfor er ikke med i den elektroniske prøven. I oppgaveteksten er kravet om at disse figurene skal "dekke" hele det opprinnelige kvadratet, underforstått, det skal verken være åpne rom eller overlapping mellom figurene.

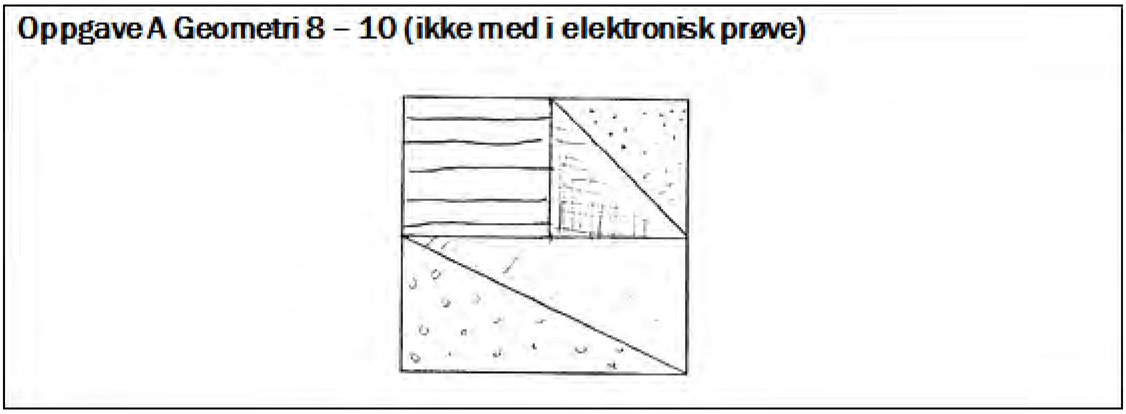
Oppgave A Geometri 8 – 10 (ikke med i elektronisk prøve)

Vis hvordan du kan dele dette kvadratet i et annet kvadrat og fire trekanter.



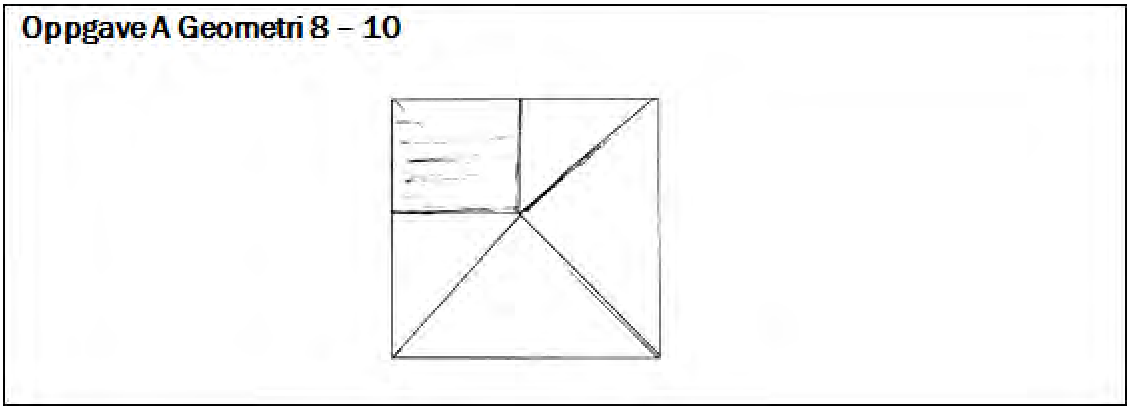
Oppgaveeksempel 2: Oppgave A Geometri 8 – 10. Ikke med i elektronisk prøve.

Blant elevene som har løst denne oppgaven, finnes det (minst) tre ulike strategier for å dele kvadratet på denne måten. 38 % av elevene klarer å dele opp kvadratet korrekt. De tre måtene å dele opp på, har noe ulike karakter. Fra utprøvingen skal vi se på noen eksempler. I elevsvar 1 nedenfor har eleven først delt kvadratet i kvadrater (eventuelt i to kvadrater og ett rektangel) og deretter delt inn i trekanter.



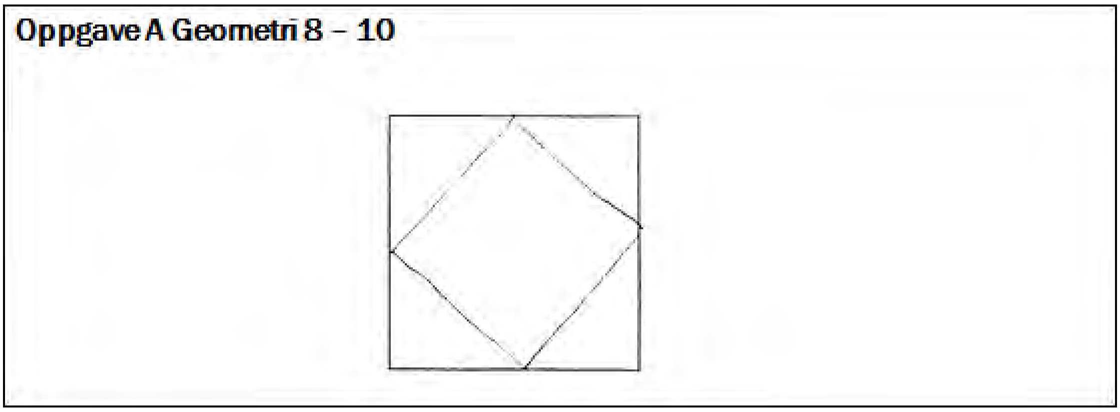
Elevsvar 1: Oppgave A Geometri 8 – 10. Eksempel på korrekt oppdeling. Ikke med i elektronisk prøve.

Elever som har tegnet løsninger som ligner elevsvar 2 nedenfor, har på samme måte som elevsvar 1 først tegnet et kvadrat som er en firedel av det opprinnelige kvadratet, og deretter delt resten av kvadratet i fire trekanter.



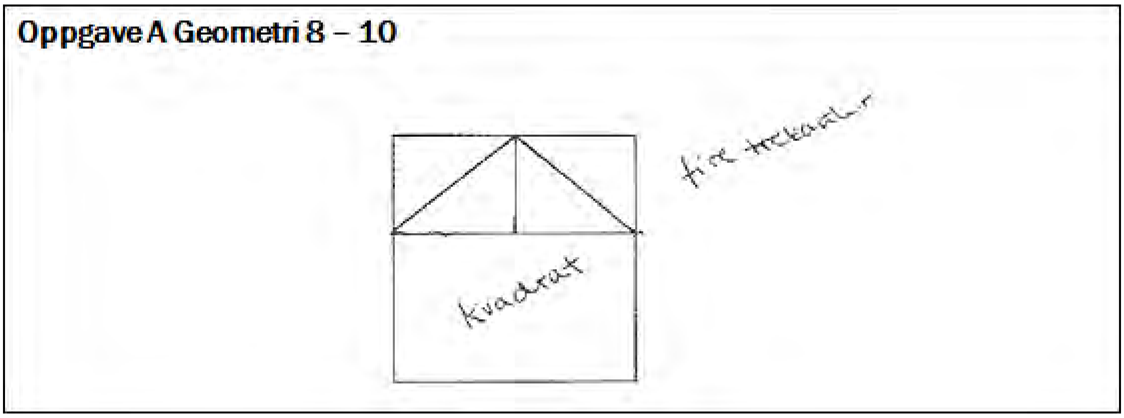
Elevsvar 2: Oppgave A Geometri 8 – 10. Eksempel på korrekt oppdeling. Ikke med i elektronisk prøve.

Det siste eksemplet på en korrekt oppdeling, elevsvar 3 nedenfor, skiller seg ut fra de to foregående eksemplene ved at vi får fire kongruente trekanter ved å ta utgangs-punkt i hjørnene i kvadratet og midtpunktet på sidene. Dette bygger på andre kunnskaper om egenskaper ved kvadratet enn det elevene i de to foregående eksemplene har brukt. Blant annet er dette nå en figur som har beviset av Pytgaoras-setningen som utgangspunkt.



Elevsvar 3: Oppgave A Geometri 8 – 10. Eksempel på korrekt oppdeling. Ikke med i elektronisk prøve.

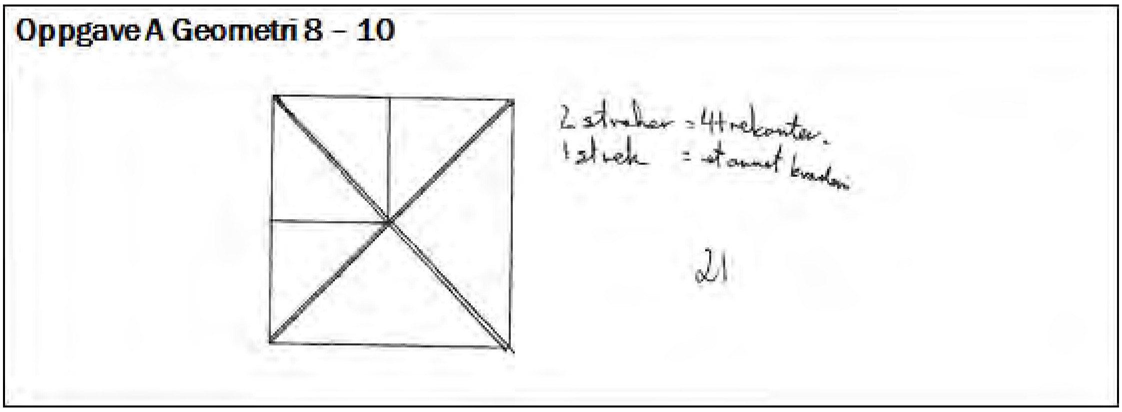
En løsning der elevens strategier ligner på strategiene til elever som løser oppgaven korrekt, er å dele kvadratet i to rektangler først. Siden deles det ene rektanglet opp i fire trekanter. Totalt har 4 % av elevene presentert løsninger av denne typen. En grunn til dette kan være at eleven ikke har innsett at et kvadrat er et spesialtilfelle av et rektangel. I dagligtale sier vi av og til at ”en figur er firkantet enn en annen”, og mener med det at figuren er nær ved å være et kvadrat. Begge ordene ”kvadrat” og ”rektangel” betyr firkant for mange elever.



Elevsvar 4: Oppgave A Geometri 8 – 10. Eksempel på ikke korrekt oppdeling. Ikke med i elektronisk prøve.

I andre løsninger der elevene deler opp i kvadrater eller rektangler, hender det at de tegner flere kvadrater eller trekanter enn oppgaven spør etter. Hos elever som velger andre løsninger, er det enkelte svar som opptrer oftere enn andre. Det er 15 % av elevene som deler kvadratet inn i fire like trekanter. De streker opp diagonalene i kvadratet. Vi vet ikke om disse elevene ser på det opprinnelige kvadratet som en del av løsningen og tenker at de tidligere hadde et kvadrat og nå har både et kvadrat og fire trekanter. Bakgrunnen for denne løsningen framgår ikke av elevbesvarelsene.

En annen løsning som viser at eleven har vansker med å forstå hva det vil si å dele inn noe, er løsninger der figurene overlapper hverandre: 5 % av elevene viser løsninger der de har tegnet kvadratet over trekantene. Sannsynligvis har resonnementet til disse elevene fellestrekk med tenkningen til elever som deler i fire trekanter. I undervisningen blir det viktig å reflektere over hva som forstås med ”å dele inn” noe.



Elevsvar 5: Oppgave A Geometri 8 – 10. Eksempel på ikke korrekt oppdeling. Ikke med i elektronisk prøve

Oppgave A Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	10
Delt i kvadrater og rektangler før disse er delt i trekanter **(Riktig svar)**	14
Delt i et kvadrat før resten av arealet er delt i fire trekanter **(Riktig svar)**	14
Midtpunktet på sidene er brukt for å tegne et kvadrat i kvadratet **(Riktig svar)**	11
Delt i et rektangel og fire trekanter	4
Delt i fire trekanter	15
Overlapping, for eksempel delt i fire trekanter og tegnet et kvadrat over disse	5

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Oppgave A Geometri 8 -10. Ikke med i elektronisk prøve.

2.1.2 Høyder

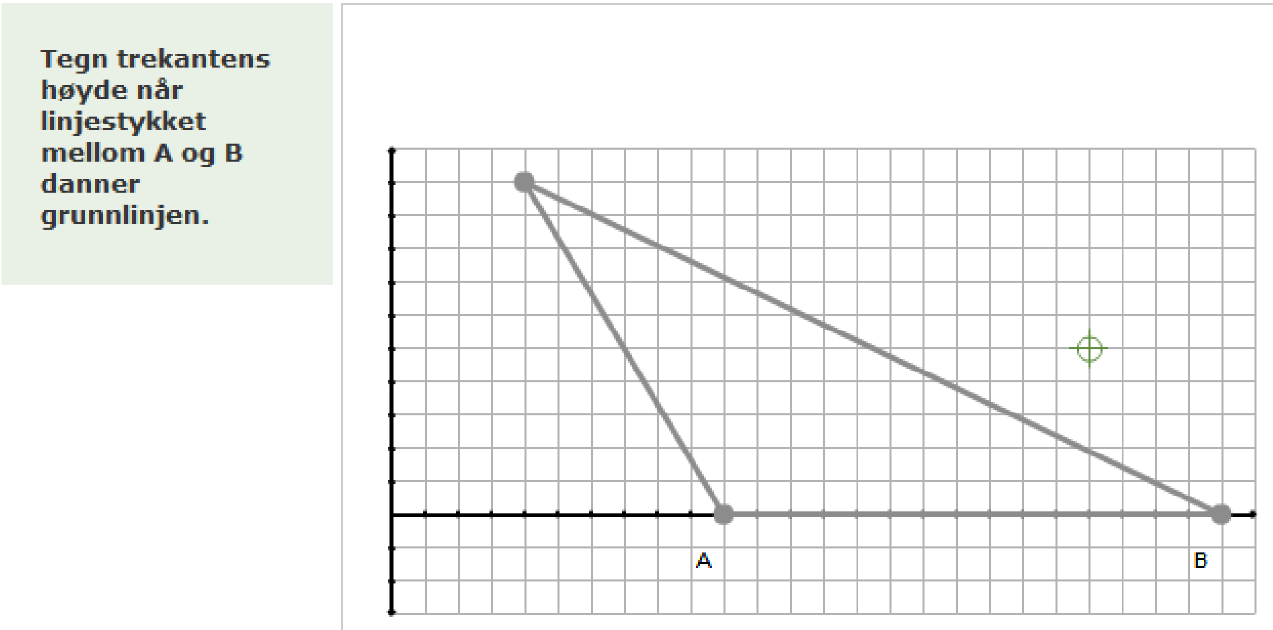
Flere av oppgavene fokuserer på begrepet høyde i en trekant. En del elever mener for eksempel at høyden til en trekant *må* ligge "inne i" trekanten. En annen oppfatning kan være at høyden *må* stå normalt på *en horisontal linje*. BRA!

Illustrasjoner i lærebøker kan være en årsak til slike oppfatninger. Ofte er trekanter i lærebøker tegnet slik at en linje i trekanten er horisontal. Denne linjen refereres til som "grunnlinjen". Når begrepet høyde innføres, blir det ofte gjort ved at det blir en linje som er normal til den horisontale linjen. Elevene kan da få den mis-oppfatningen at alle trekanter har en bestemt høyde, og at denne skal være normal til en horisontal linje, det vil si at høyden oppfattes som en vertikal linje. Dette gjenspeiles i elevsvarene på disse kartleggingsprøvene i geometri.

I tillegg kan trekanten være tegnet slik at den forsterker oppfatningen av at denne høyden ligger inne i trekanten. Når ordene *høyde* og *grunnlinje* blir introdusert for elevene, er vanligvis begge vinklene ved grunnlinjen mindre enn 90°. Det er velkjent at de første erfaringene eleven får med en betegnelse eller et begrep, er særdeles viktige i elevens videreutvikling av disse betegnelsene eller begrepene. Noen elever har således lett for å overgeneralisere. Derfor er det viktig at elever tidlig får erfare at grunnlinjer i figurer ikke trenger å være parallelle med siden i en lærebok eller være horisontale, og på samme måte at høyder ikke trenger å være vertikale. Tradisjonelt har lærebøker i alle land vist få eksempler på figurer med andre orienteringer. Konsekvenser av dette kan være at elever – når de møter trekanter som er "annerledes" ut – forsøker å tilpasse sin forståelse av høyder til den nye trekanten. Vi kan også observere at elever tegner "høyder" som er parallelle med en av sidene i trekanter, i stedet for å tegne en høyde som ligger utenfor trekanten.

I den neste oppgave si skal se på, oppgave 5 Geometri 5 – 7 og oppgave 1 Geometri 8 – 10, skal elevene tegne høyden til en gitt trekant. Grunnlinjen i trekanten er horisontal. Elevenes svar på denne oppgaven kan gi læreren en indikasjon på om de har misoppfatningen om at høyder må ligge inne i trekanten.

Oppgave 5



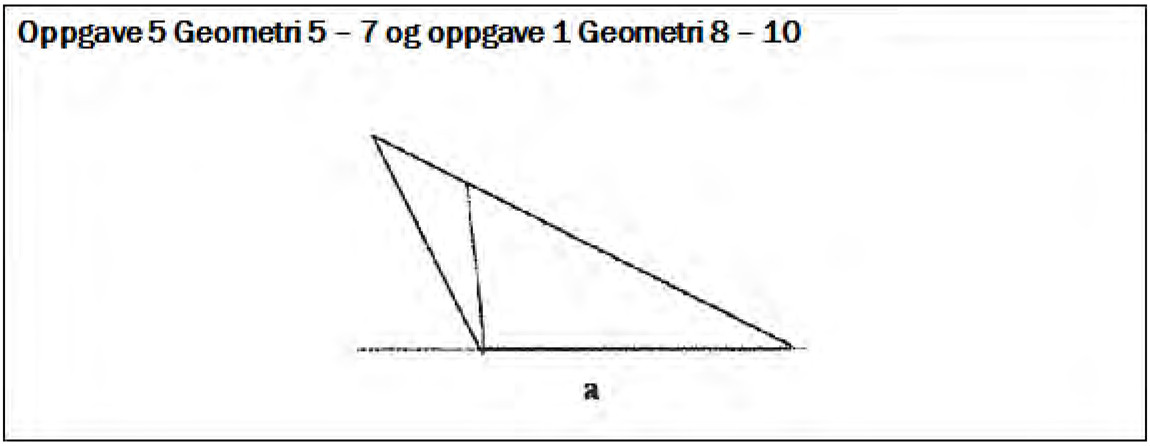
Oppgaveeksempel 3: Oppgave 5 Geometri 5 – 7 og oppgave 1 Geometri 8 – 10. Trekantens høyde

Av tabell 3 nedenfor ser vi at en stor del av elevene kjenner til at en høyde skal stå normalt på grunnlinjen. 30 % av elevene på 6. årstrinn og 65 % av elevene på 9. årstrinn har tegnet en linje som er normal til grunnlinjen a.

Oppgave 5 Geometri 5 – 7 og oppgave 1 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	37	20
Korrekt tegnet høyde	16	47
Andre høyder som godtas	7	3
Normal til a – ikke høyde	7	15
Innvendig linje – ikke høyde	1	4
Parallell med en av sidene	4	1

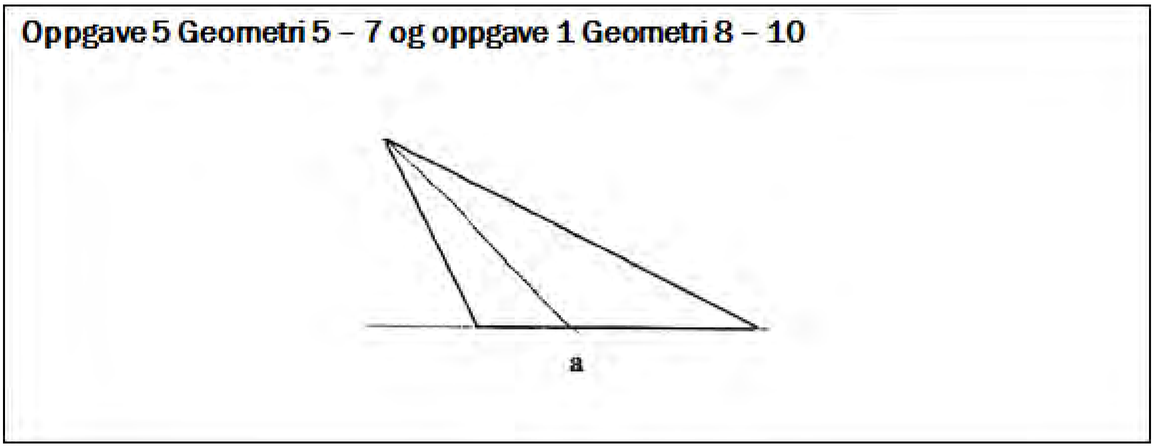
Tabell 3: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Geometri 5 – 7 og oppgave 1 Geometri 8 – 10

Svarene til elevene på 6. årstrinn skiller seg noe fra svarene til elevene på 9. årstrinn. På 9. årstrinn har 15 % av elevene tegnet en normal til a som ikke er høyde i trekanten. Mange elever lar høyden starte i det venstre hjørnet til trekanten (på grunn-linjen). Denne normalen kan enten være for lang eller for kort. Når normalen er for kort, er den ofte tegnet slik at den ikke krysser den motstående siden, som for eksempel i elevsvar 6 nedenfor.



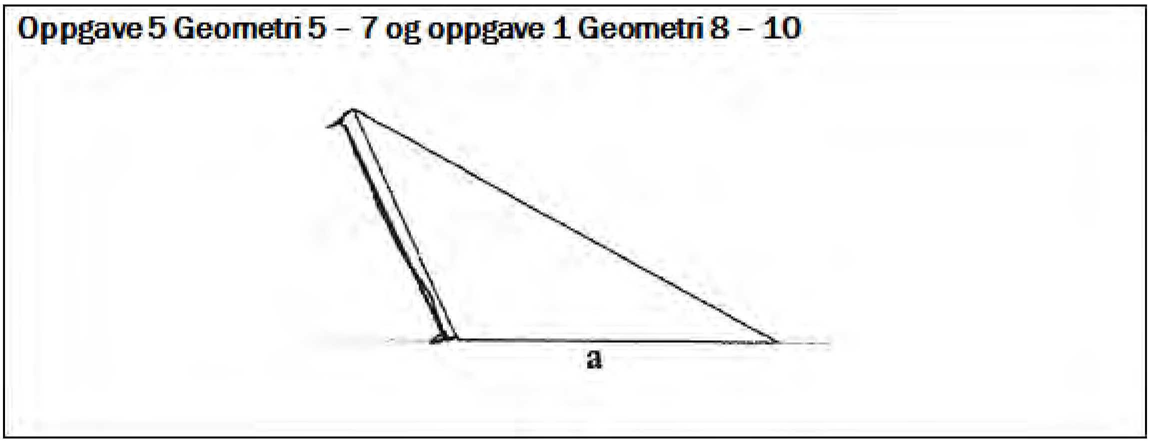
Elevsvar 6: Trekantens høyde. Eksempel på loddrett høyde "inni" trekanten

Det er også en større gruppe av elever på 9. årstrinn enn i på 6. årstrinn som trekker et innvendig linjestykke fra toppunktet som trekker et innvendig linjestykke fra toppunktet, slik at dette linjestykket danner "høyden" i trekanten (elevsvar 7 nedenfor). Disse elevene er mest opptatt av at høyden skal være inne i trekanten, ikke at den skal stå loddrett på grunnlinjen.



Elevsvar 7: Trekantens høyde. Eksempel på høyde "inni" trekanten

Blant elevene på 6. årstrinn er det en gruppe (4 %) som tegner en parallell til en av sidene i trekanten. På 9. årstrinn er det bare 1 % av elevene som gjør dette. Disse elevene forsøker trolig å få forestillingen om at høyden må starte fra grunnlinjen i trekanten og gå til toppunktet, til å stemme med figuren i oppgaven. Den rettvinklede trekanten brukes ofte som eksempel i skolematematikken. Når den rette vinkelen dannes av grunnlinjen og en av sidene, er denne siden samtidig høyden i trekanten. Kanskje er det denne informasjonen eleven forsøker å tilpasse til trekanten i denne oppgaven.



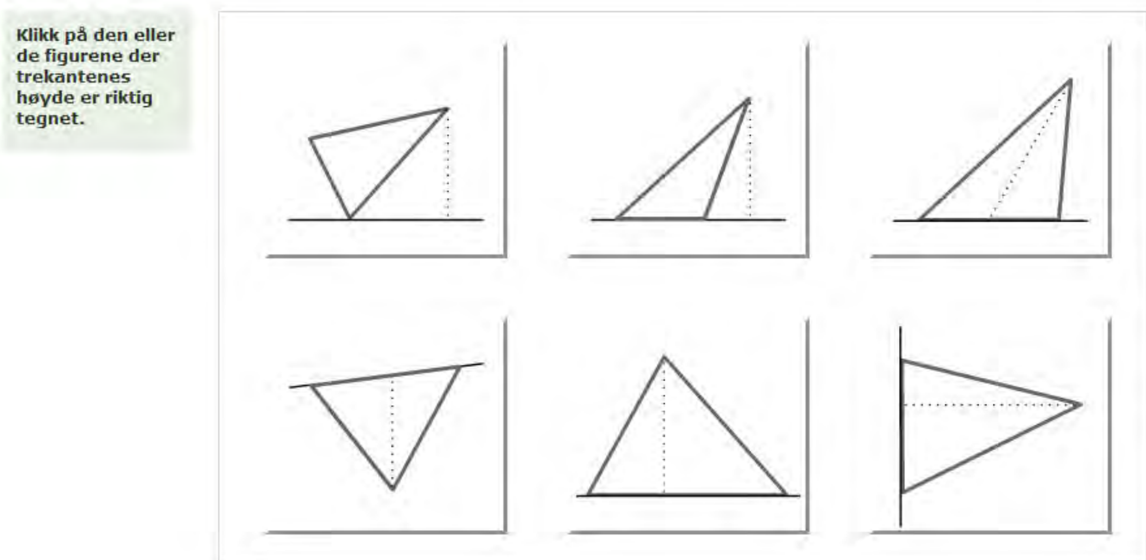
Elevsvar 8: Trekantens høyde. Eksempel på høyde som er parallell med en side i trekanten

Vi har undersøkt hvordan de korrekte svarene på 9. årstrinn fordeler seg mellom jenter og gutter. Det viste seg at 52 % av guttene og 41 % av jentene tegnet en korrekt høyde. Blant elevene på 6. årstrinn er forskjellene mellom kjønnene små.

Når vi på samme måte studerer forskjeller mellom kjønnene innenfor de ulike gruppene av feilsvar, finner vi at mens 21 % av jentene har tegnet en normal fra grunnlinjen som ikke er høyde, er det bare 10 % av guttene som gjør dette. For de andre gruppene av feilsvar er det bare små forskjeller mellom kjønnene.

I oppgave 17 i eksempeloppgave 4 nedenfor, er det for hver av de gitte trekantene tegnet inn et forslag til en høyde. Elevene skal så avgjøre for hvilke trekanter høyden er korrekt tegnet. Som vi ser, er de stiplede linjer høyder i trekantene B, E og F. I to av trekantene, C og D, ligger de stiplede linjene inne i trekanten. I C treffer den stiplede linjen midtpunktet på den horisontale linjen, og i D er den vertikal, mens den i A er tegnet vinkelrett fra det høyeste hjørnet i trekanten til en vannrett linje gjennom det laveste hjørnet.

Oppgave 17



Oppgaveeksempel 4: Oppgave 17 Geometri 8 – 10. Trekantens høyde

Tabell 4 nedenfor viser fordelingen av korrekt markering for trekantene i oppgave 17 Geometri 8 – 10. Vi ser for eksempel at 69 % av elevene *ikke* krysser av for at det er tegnet en riktig høyde i figur A. Det er altså 31 % som mener at den stiplede linjen er en høyde i trekanten. Hovedgrunnen til dette valget er trolig at den stiplede linjen er vertikal.

Oppgave 18 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Trekant A korrekt markert	69
Trekant B korrekt markert	64
Trekant C korrekt markert	86
Trekant D korrekt markert	45
Trekant E korrekt markert	85
Trekant F korrekt markert	66

Tabell 4: Prosentvis fordeling av korrekt markering av høyde for trekantene

Det er 6 % av elevene som ikke krysser av for noen av alternativene i oppgave 17. Vi tolker dette som at disse elevene ikke har besvart oppgaven, og vi konkluderer med at *høyst* 63 % vet at det ikke er tegnet en korrekt høyde for trekant A. Motsatt viser det seg at 2 % krysser av for alle de gitte alternativene. Disse elevene "helgarderer" og vil få riktig svar for figurene B, E og F. Dette betyr at vi må regne med at den prosentvise fordelingen av korrekte svar i tabell 4 er noe for høy. Trekant D skiller seg ut med en lav korrekt markering. Dette kommer trolig av at grunnlinjen i den trekanten nesten er vinkelrett på den stiplede linjen.

Vi drøfter først elevenes svar for de tre figurene B, E og F, der en høyde er korrekt markert. Det er bare 40 elever, eller i underkant av 8 %, som *bare* krysser for disse alternativene. Hvis vi antar at figur D har forvirret en del elever, og ser bort fra svarene på denne, er det fortsatt bare 23 % som har rett markering på alle de fem resterende alternativene. Dette viser at det er stor usikkerhet knyttet til oppfatningen av hva en høyde er.

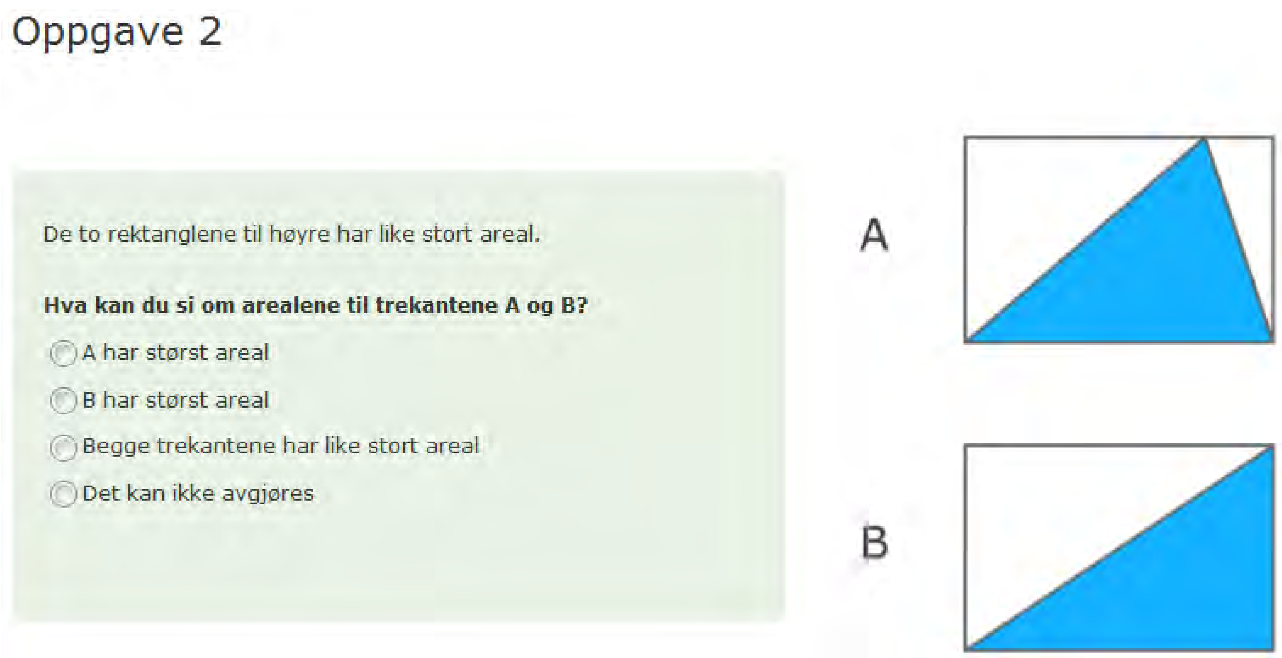
Trekant E representerer standardfiguren av lærebokillustrasjoner. Høyden ligger inne i trekanten, og den er vertikal. Likevel har bare 86 % av elevene svart korrekt. 8 % av elevene som besvarte oppgave 17, har bare krysset av for trekant E.

Blant de elevene som svarer riktig for trekant E, er det henholdsvis 68 % og 74 % som også gir korrekt svar for trekantene B og F. Omvendt er det 91 % av de elevene som svarer rett for trekant B, som også markerer korrekt for trekant E. Tilsvarende er det 95 % av de elevene som svarer rett for trekant F, som også markerer korrekt for trekant E. I trekant B ligger høyden utenfor trekanten. 64 % av elevene har krysset av for at høyden er tegnet riktig for denne trekanten.

Enkelte elever ser ut til å mene at høyden må ligge inne i trekanten. En konsekvens av dette blir at disse elevene tror at høyden noen ganger ikke trenger å være normal på grunnlinjen, som for eksempel i trekant C. Trekantene B og C er nesten identiske. Vi finner at 91 % av de elevene som krysser av for trekant B, også svarer at det ikke er tegnet en korrekt høyde i trekant C. Omvendt finner vi at hele 43 % av de elevene som har markert for at det er tegnet en høyde i trekant C, samtidig tror at høyden også er tegnet korrekt i trekant B.

2.1.3 Trekantens areal

I begge kartleggingsprøvene i *Geometri* er det en oppgave som undersøker elevenes oppfatning av arealbegrepet. Oppgaven som ble brukt på 6. årstrinn, krever at eleven tar i bruk de samme begrepene som i oppgaven for 9. årstrinn, men oppgaven for 6. årstrinn er ikke fullt så omfattende. De to oppgavene omtales her hver for seg.



Oppgaveeksempel 5: Oppgave 2 Geometri 5 – 7. Areal til trekanter

Tabell 5 nedenfor viser at flertallet av elevene på 6. årstrinn mener at de to trekantene ikke har samme areal.

Oppgave 2 Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
Begge trekantene har like stort areal **(Riktig svar)**	44
A har størst areal	11
B har størst areal	34
Det kan ikke avgjøres	5

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Oppgave 2 Geometri 5 – 7

Vi legger merke til at under halvparten av elevene på 6. årstrinn klarer å krysse av for det korrekte svaralternativet. Merk også at mer enn en tredjedel mener at arealet til B er størst, samt at 5 % av elevene tror at de ikke kan sammenligne størrelsene til de to arealene ut fra de opplysningene som er gitt.

For å kunne studere mer utførlig hvordan elevene tenker, ble de bedt om å forklare hvordan de tenkte da de svarte på denne oppgaven. Selv i knappe elevsvar kan vi finne mye informasjon om elevenes tanker om en bestemt problemstilling. Hva slags argumentasjon bruker de? Kan de bruke egenskapene ved figurene, eller bedømmer de situasjonen visuelt? Hva ser de som sentrale egenskaper ved figurene? Fokuserer de på andre egenskaper enn hvilke de må bruke for å kunne gi et korrekt svar?
Mens 2 % av elevene ikke har svart på flervalgsspørsmålet under utprøvingen, er det 12 % som unnlater å skrive forklaring (ekstraspørsmål under utprøvingen). I tillegg skriver 41 % av elevene forklaringer som er av en slik art at vi ikke kan kategorisere disse Forklaringer som er

uklare, eller som er så korte at det ikke umiddelbart framgår hva eleven har tenkt, er ikke plassert i noen bestemt kategori.

Forklaringer på at trekantene har like stort areal

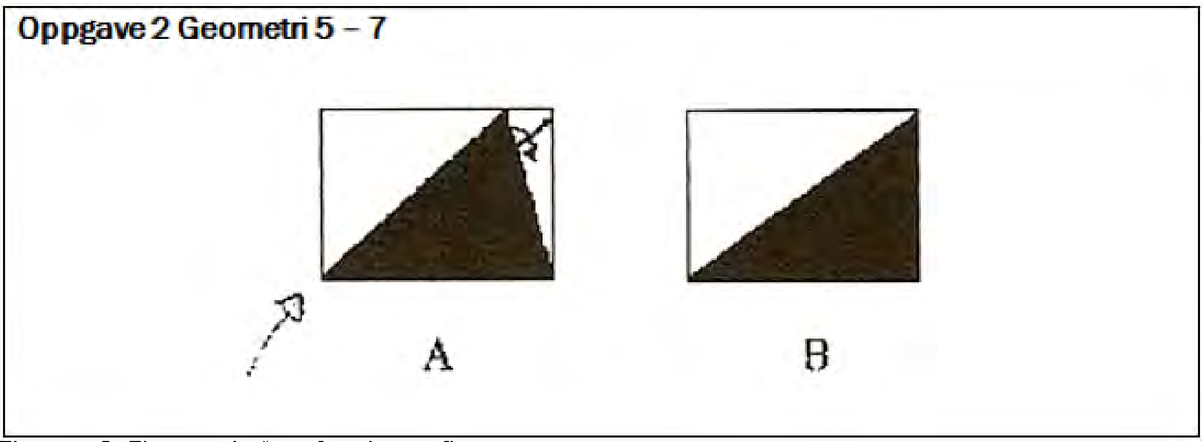
Det er bare 26 % av elevene som skriver tekst som forklarer hvorfor de to trekantene har samme areal. Dette er en liten andel med tanke på at 44 % av elevene har krysset av for dette svaralternativet. En svært liten andel av elevene, bare 3 %, har skrevet tekst der det går fram at de har brukt egenskaper ved rektanglet for å bestemme de to trekantenes areal. Disse elevene bruker rektanglets grunnlinje og høyde som argumenter for sitt svar. Noen ytterst få elever har brukt formelen for å beregne trekantens areal i sitt svar. De resterende tre kategoriene fordeler seg på denne måten:

Forklaringer på like stort areal	6. årstrinn
”En trekant er halvparten av en firkant” ”Samme areal fordi rektanglene har samme areal”	2
Visualiserer en omforming av trekantene	11
”Arealene ser like ut”	10

Tabell 6: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor de to trekantene har samme areal.

Resten av elevene som har skrevet tekst for å forklare at de to trekantene har samme areal, har skrevet tekst med lavere presisjonsnivå. En liten gruppe elever (2 %) skriver for eksempel at trekantene har samme areal fordi rektanglene har samme areal.

Vi kan i hovedsak finne to typiske svar blant forklaringene på hvorfor trekantenes areal er like. En gruppe skrev at det ser ut som om arealene er like store (11 %), uten at dette er nærmere forklart. Sannsynligvis har disse elevene bedømt arealene visuelt. En annen gruppe av elever forklarte at en kan tenke seg at en omformer arealene for å se at de er like store (10 % av elevene). Nedenfor gjengis en illustrasjon en elev har laget, i tillegg til teksten eleven har skrevet:



Elevsvar 9: Eksempel på omforming av figuren

I teksten skrev eleven: ”Jeg tenkte at hvis A skulle bli som B måtte jeg dra trekanten A opp i hjørnet da ble det litt igjen som jeg satt inn.” Av elevens forklaring kan vi se at eleven ser for seg at en manipulerer med trekantene: flytter og legger til.

Blant elevene som skriver tekst av de to siste typene, finner vi en større andel jenter enn gutter. Mens 11 % av jentene påstår at de kan se at trekantene har samme areal, skriver 8 % av guttene dette. Likeledes er det en større andel jenter (14 %) enn gutter (7 %) som forsøker å omforme figurene.

Forklaringer på at trekant A eller B har størst areal

I tabell 7 nedenfor har vi kategorisert noen forklaringer som hevder at B har større areal enn A. 11 % skriver tekst der det framgår at de har målt sider i trekantene og summert eller multiplisert lengdene.

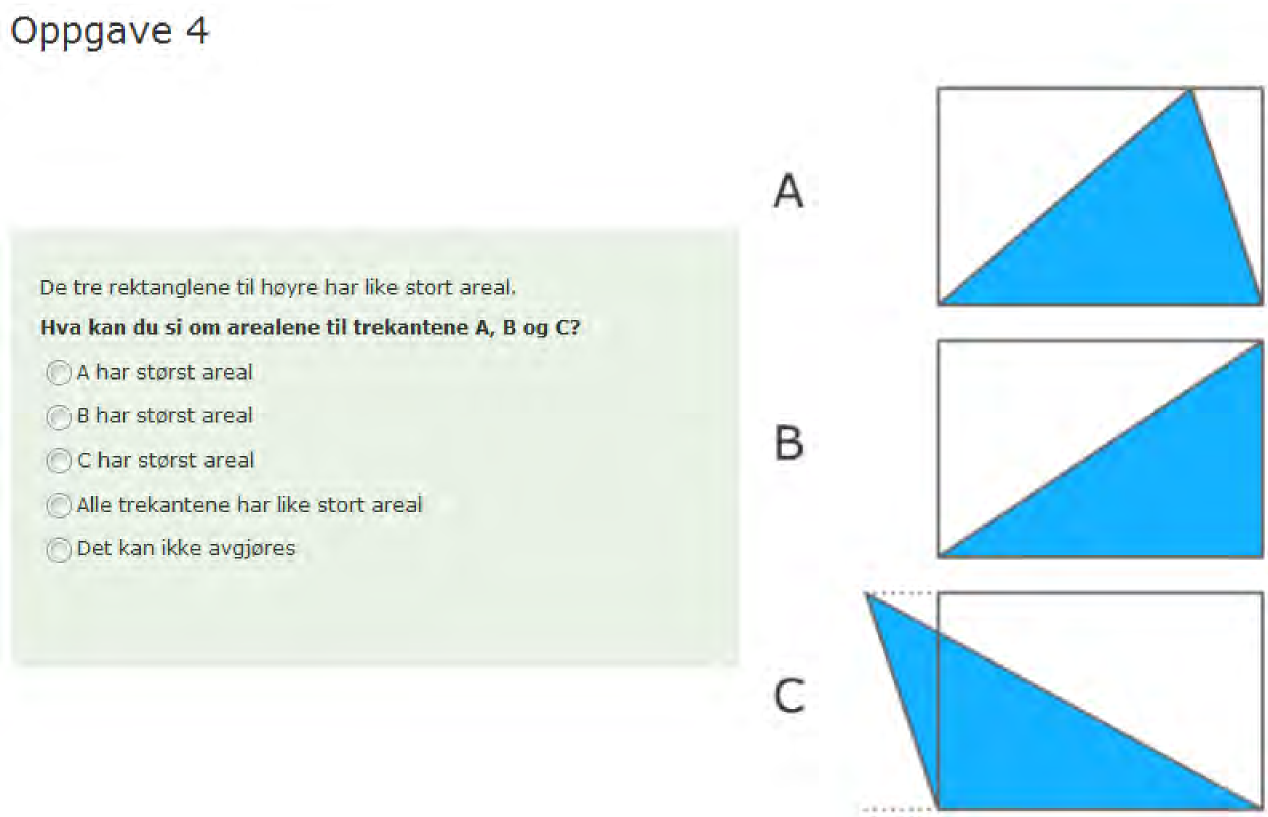
Forklaringer på at trekantene har like stort areal	6. årstrinn
Har målt sider og addert eller multiplisert, eller "ser" at B er større enn A	11
"Det ser slik ut" som forklaring på at B er større enn A	5
Andre forklaringer på at B er større enn A	4

Tabell 7: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på at B har det største arealet

Skal vi finne en omkrets, måler vi og legger sammen. Skal vi finne arealet TIL et rektangel eller kvadrat, måler vi og multipliserer. Det vil si at elevene har en forestilling om utregningsmetoder som benyttes i geometri, men at de ikke kjenner disse reglene godt nok til å avgjøre hvilken det er som passer i en bestemt situasjon. Dette kan komme av at mange elever har lært bestemte ferdigheter uten å forstå hva som ligger til grunn for den bestemte ferdigheten i en gitt situasjon.

Blant elevene som har forklart hvorfor arealet til trekant B er det største, finner vi en gruppe elever som hevder at de kan "se" dette. I denne gruppen finner vi flere gutter enn jenter (7 % gutter mot 2 % jenter). Også disse elevene svarer på grunnlag av en visuell sammenligning av figurene. Vi legger merke til at det er bare en liten gruppe elever (2 %) som har skrevet forklaringer som uttrykker at trekant A har det største arealet.

Som nevnt tidligere finner vi en tilsvarende oppgave for 9. årstrinn (oppgave 4 Geometri 8 – 10). Denne oppgaven skiller seg fra oppgaven ovenfor ved at den har ett svaralternativ til. Det "nye" her er at figur C har sitt toppunkt på utsiden av rektanglet.



Oppgaveeksempel 6: Oppgave 4 Geometri 8 – 10. Areal til trekanter

Tabell 8 nedenfor viser svarfordelingen på denne flervalgsoppgaven. De elevene som garderer seg ved å krysse av for flere svaralternativer, er ikke tatt med i tabellen.

Oppgave 4 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	2
Alle trekantene har like stort areal (**Riktig svar**)	52
A har størst areal	5
B har størst areal	8
C har størst areal	23
Det kan ikke avgjøres	6

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Oppgave 4 Geometri 8 – 10

Sammenligner vi med oppgave 2 Geometri 5 – 7 på 6. årstrinn, ser vi at det er en større andel av elevene på 9. årstrinn som krysser av for det korrekte svaret, selv om det her er et svaralternativ mer enn på 6. årstrinn. Merk også at det mest populære feilaktige svaret er å krysse av for C. På 6. årstrinn hadde figur B denne rollen. Kan dette komme av at den skraverte figuren virker større når bredden til figuren øker?

Forklaringer på at alle trekantene har samme areal

Det var 2 % av elevene på 9. årstrinn som ikke besvarte flervalgsoppgaven. Oppgaven hadde i utprøvingen en b-oppgave der det var 16 % av elevene som ikke ga noen forklaring på hvordan de tenkte. 11 % av de elevene som krysset av for det *korrekte* svaralternativet i a-oppgaven, ga *ingen* forklaring. I tillegg var det 26 % av de elevene som hadde svart *korrekt* på a-oppgaven, som skrev forklaringer som ble kategorisert som *Andre svar*. Dette tyder på at elevene har større problemer med denne oppgaven enn det vi kan få inntrykk av fra fordelingen i tabell 8 ovenfor. I tabell 9 nedenfor er fordelingen av fire "forklaringskategorier".

Oppgave 4 Geometri 8 – 10 Forklaringer. Samme areal.	9. årstrinn
Bruker grunnlinjen og høyden til rektanglet	10
"Trekantene har samme areal fordi rektanglene har samme areal", "En trekant er en halv firkant" og lignende forklaring	10
Visualisering og omforming	7
"Jeg ser det "	7

Tabell 9: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor alle trekantene har samme areal. Oppgave 4 Geometri 8 – 10

Argumentasjonen til elevene på 9. årstrinn ligner de argumentene som elevene på 6. årstrinn brukte. 10 % av elevene skrev akseptable matematiske forklaringer. Disse elevene brukte egenskaper ved rektanglet for å vise at trekantene har samme grunnlinje og høyde. Også svært korte svar er plassert i denne kategorien, som for eksempel: "De er like lange og brede." Noen elever har tatt utgangspunkt i at trekantens areal er halvparten av rektanglets.

En annen gruppe av elever (10 %) gir svar der deler av forklaringen er underforstått. Disse tekstene er knappe og ligner på tekstene elevene på 6. årstrinn skrev. Eksempler på typiske elevtekster er "de er like fordi rektanglene har samme areal" og "en trekant er en halv firkant." Tilsvarende er det også en del elever på 9. årstrinn som ser for seg at en omformer arealene av trekantene slik at de kan sammenlignes. Disse elevene skriver tekst der de viser at en ved å se for seg at en trekker i eller flytter deler av trekantene A og C, vil få figurer som tilsvarer trekant B.

Forklaringene til de elevene som har svart riktig på a-oppgaven, viser at det bare er 35 % som gi matematiske akseptable forklaringer for sin avkrysning. Kan dette komme av at elevene har for liten erfaring med å begrunne sine påstander?

Forklaringer der eleven hevder at trekant C har det største arealet
Når elever oppfatter at trekant C har det største arealet, er det trolig fordi trekant C går ut over rektanglet, eller fordi elevene ser på lengden av sidene i C i stedet for grunnlinjen og høyden. Disse tekstene er knappe, noen elever sier at C "er størst fordi den går utenfor firkanten også", mens en gruppe elever ganske enkelt skriver "Det ser sånn ut" eller "C tar mer plass."

Andre svar viser at elevene måler sider og multipliserer for å finne areal. De hevder at C har størst areal fordi denne trekanten har lengst sider. Noen få elever har målt sider og lagt sammen.

Den første gruppen ser på formen på trekanten og forsøker å bestemme arealet ut fra den. Den andre gruppen ser på lengdene av sidene i stedet for å forholde seg til grunnlinje og høyde i trekanten. De skiller ikke mellom de ulike målene som brukes i ulike situasjoner.

Forklaringer der eleven hevder at trekant B har størst areal
Når elevene tror at trekant B har størst areal, finner vi to ulike påstander i forklaringene – enten: Trekant B er halve arealet av rektanglet, og derfor har trekant B størst areal, eller: "Det ser slik ut."

Oppgave 4 Geometri 8 – 10 Forklaringer. En av trekantene har større areal enn de andre	9. årstrinn
C størst: "Trekanten går ut over rektanglet" Trekantens form og plassering. **C størst:** "Trekanten har lengst sider" Forveksler hvilke mål som er gyldige **C størst:** "Det ser slik ut"	7 5 3
B størst: "B er halve rektanglet" **B størst:** "Det ser sånn ut"	3 2
A størst: "Det ser sånn ut"	2

Tabell 10: Prosentvis fordeling av elevforklaringer på hvorfor en av trekantene har større areal enn de andre. Oppgave 4 Geometri 8 – 10

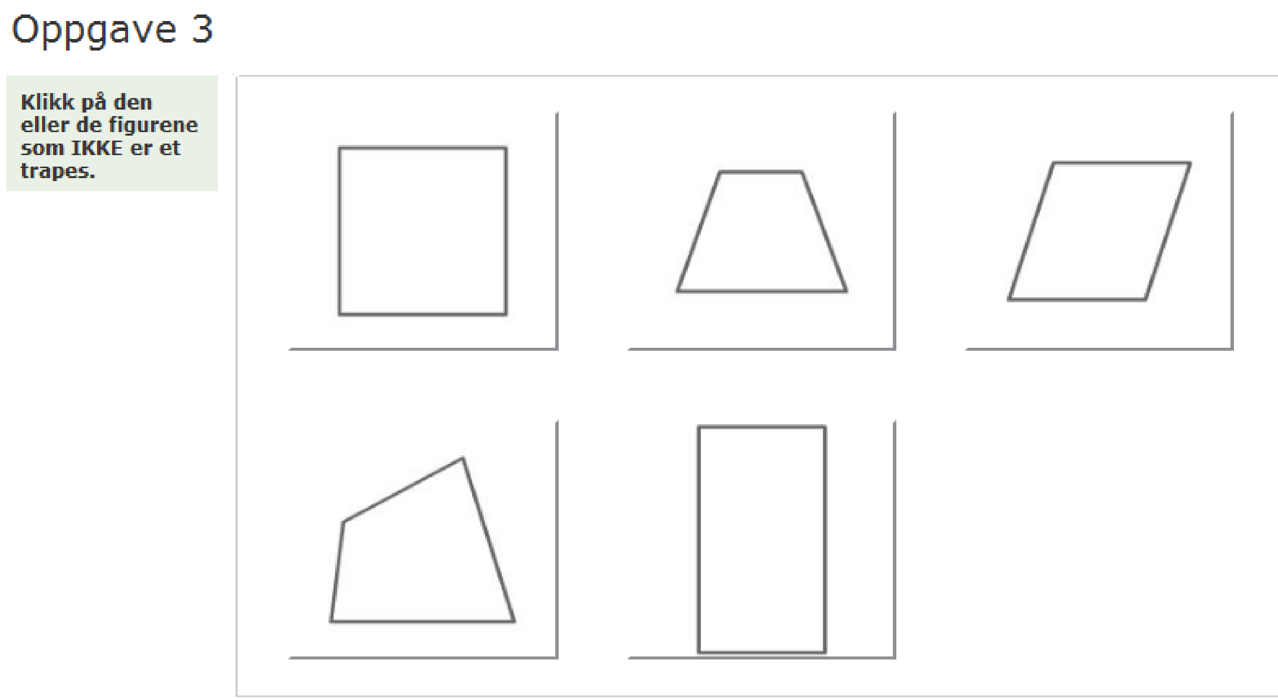
2.2 Firkanter

De læringsstøttende prøvene i Geometri inneholder flere oppgaver under betegnelsen "firkanter." Vi skal ta for oss noen av disse.

2.2.1 Firkanters form

I skolematematikken legges det vekt på å kjenne igjen og å kunne navngi ulike former av regulære figurer. Elever arbeider med kvadrat, rektangel, parallellogram og trapes. Ofte skilles disse for "skarpt" fra hverandre. Det blir lagt En legger stor vekt på forskjellene og mindre vekt på likhetene mellom klasser av regulære figurer. Det legges for eksempel liten vekt på at ethvert kvadrat også er et rektangel, eller et trapes. For at en firkant skal kunne få "betegnelsen" trapes, er det nok at den har to parallelle sider. Motsatt er det minst like viktig å vite hvilke egenskaper som må oppfylles for at trapeset kan kalles et kvadrat, nemlig at alle sidene er like lange og alle vinklene like store.

Oppgave 3 Geometri 8 – 10 kan være et godt utgangspunkt for en diskusjon angående disse egenskapene.



Oppgaveeksempel 7: Oppgave 3 Geometri 8 – 10. Figurer som IKKE er et trapes

Oppgave 3 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	7
Kun figur D er *ikke* et trapes **(Riktig svar)**	2
Figur A, C, D og E er *ikke* et trapes	14
Figur A, C og E er *ikke* et trapes	35
Figur A og E er *ikke* et trapes	22
Figur A, B, D og E er *ikke* et trapes	5

Tabell 11: Prosentvis fordeling. Oppgave 3 Geometri 8 – 10

Vi ser at 95 % av elevene som svarte på denne oppgaven, oppfatter figur B som et trapes, mens de er mer usikre på om de andre figurene er trapeser. Figur B ligner mest på en typisk lærebokillustrasjon av et trapes.

En stor gruppe elever mener at bare figurene B og D er trapeser (35 %). Sannsynligvis leter disse elevene etter figurer som har en form som ligner på den typiske illustrasjonen av et trapes. En annen strategi kan være å holde figurer vi vet har et navn, utenom, for eksempel kvadrat (figur A) og rektangel (E). Det kan også tenkes at noen elever forveksler betegnelsene for trapes og parallellogram.

Den neste oppgaven går ut på å gjenkjenne rektanglets form, samt å identifisere og telle opp alle de rektanglene en kan finne i figuren. Det vil for eksempel se at elevene må gjenkjenne rektangler med ulikt forhold mellom lengde og bredde som samme figur. Det kan være vanskelig for noen elever å innse at rektanglet som kan dannes av to av de små rektanglene i figuren, skal telles på samme måte som hvert av de små. Selv om de har ulik størrelse, er begge et rektangel.

Oppgave 12

Hvor mange rektangler finner du til sammen i figuren?

Svar:

Oppgaveeksempel 8: Oppgave 12 Geometri 5 – 7 og oppgave 19 Geometri 8 – 10. Figurer som IKKE er et trapes

Til sammen finnes det seks rektangler. Det krever at vi også ser at to rektangler plassert ved siden av hverandre danner et nytt rektangel.

Oppgave 12 Geometri 5 – 7 og oppgave 21 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	5	5
6 (Riktig svar)	21	32
4	19	26
3	41	28

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave 21 Geometri 8 – 10

Noe færre elever oppgir at de finner fire rektangler. Disse elevene ser antakelig at de tre rektanglene som til sammen utgjør et fjerde stort rektangel. Den største svar-kategorien blant elevene på 6. årstrinn er tre rektangler.

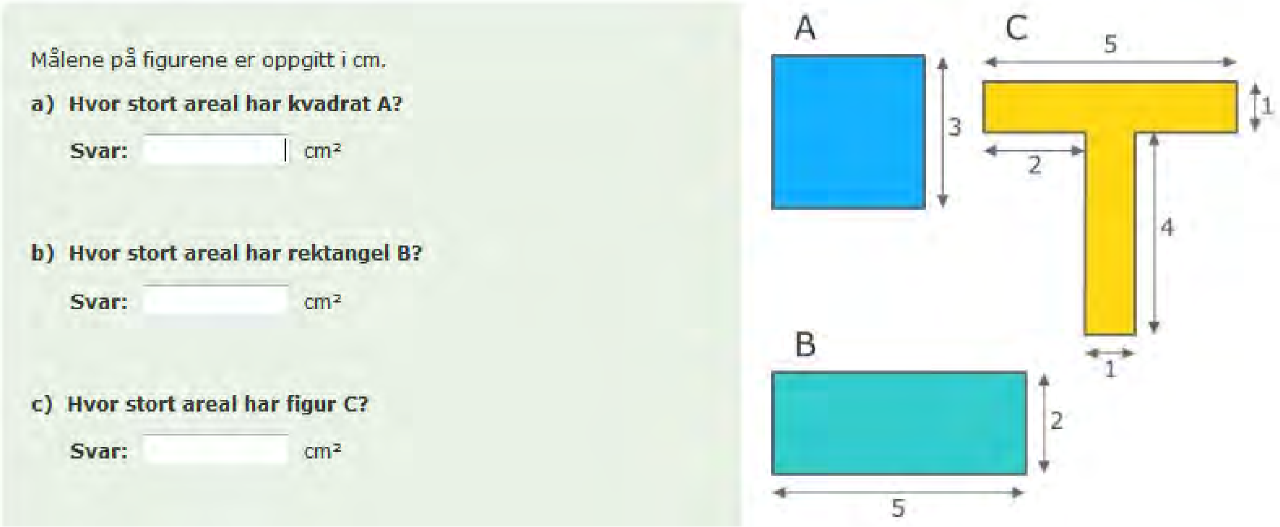
Oppgave A Geometri 8 – 10 på 9. årstrinn er tidligere omtalt under temaet trekanter, se eksempeloppgave 2 side 10. Se også de kommentarene som er gitt i forbindelse med denne oppgaven. På samme måte som i oppgaven om trapesene er det mange elever som strever med å skille mellom kvadrater og rektangler. Kvadratet er en undergruppe av rektanglet men det motsatte er ikke tilfelles. Elever som deler kvadratet i et rektangel og fire trekanter, har derfor behov for å arbeide med egenskapene til de ulike figurene.

2.2.2 Firkanters areal

I de to diagnostiserende prøvene i Geometri er det til sammen mange oppgaver der elevene skal arbeide med areal: sammenligne, telle opp, beregne og tegne. Noen av disse oppgavene omtaler vi her, mens andre blir diskutert under temaet ”Omkrets, areal og volum.”

I oppgave 14 Geometri 5 – 7 skal elevene beregne arealet til tre ulike figurer. Måltall er oppgitt på figurene. Oppgavene er svært tradisjonelle matematikkoppgaver. Denne oppgaven kan brukes til å undersøke om elever forveksler areal og omkrets, om de bruker måltall som er gitt i figuren, eller om de gjør egne målinger.

Oppgave 14



Oppgaveeksempel 9: Oppgave 14 Geometri 5 - 7. Areal av firkanter

Oppgave 14a Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	4
9 (Riktig svar)	34
6	3
12 (Beregner omkretsen)	37
3 eller 2,7 (Lengden av sidekanten)	3
Andre svar	18

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave 14a Geometri 5 – 7.

Vi ser at det er omtrent like mange elever som gir det korrekte svaret 9 som svaret 12. Trolig beregner den siste elevgruppen omkretsen av kvadratet. Svaret 6 kommer trolig av at de adderer lengden av to sidekanter. Elevene er tydeligvis usikre på meningsinnholdet i begrepene *areal* og *omkrets*. En liten gruppe elever oppgir 3 eller 2,7 som svar. Svaret 3 kommer trolig av at dette er det eneste tallet som er oppgitt på figuren. Svaret 2,7 er trolig et resultat av at eleven har målt en sidekant i kvadratet med linjal.
I oppgave 14b er måltallene til sidekantene i rektanglet gitt. Elevene viser tilsvarende misoppfatninger som i oppgave 14a. Dette styrker påstanden om at arealbegrepet er vagt hos elevene på 6. årstrinn.

Oppgave 14b Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	5
10 (Riktig svar)	39
14	40
5	2
7	2
”2 og 5”	1
Andre svar	12

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave 14b Geometri 5 – 7.

Når vi sammenligner hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi at elevene er forbausende konsekvente. Hele 90 % av de elevene som svarer riktig på 14a-spørsmålet, gir også et korrekt svar på 14b-spørsmålet. Og hele 82 % av elevene som adderer lengden av alle sidekantene i oppgave 14a (svarer 12), adderer også lengden av alle sidekantene på 14b-oppgaven (svarer 14). Dette styrker påstanden vår om at nesten halvparten av elevene på 6. årstrinn har problemer med å skille mellom begrepene areal og omkrets.

Den siste figuren har en mer komplisert form. Figuren må deles i to rektangler, og det er også langt flere måltall å forholde seg til.

Oppgave 14c Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	18
9 **(Riktig svar)**	13
20 (Beregner omkrets)	17
13 (Summerer de gitte måltallene)	19
15 (Måler med linjal og beregner omkrets)	4
14 eller 18 (Indikasjon på addisjon av måltall)	7
40 (Multipliserer alle måltallene på figuren)	6
Andre svar	26

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave 14c Geometri 5 – 7.

Som for de to foregående oppgavene er den vanligste feilen å beregne omkrets på en aller annen måte. Det er tre klare indikasjoner på at elevene på ulike måter beregner omkretsen til figuren. Omkretsen av figuren er 20. Dersom en adderer de oppgitte måltallene, får en svaret 13, og dersom en måler omkretsen med linjal, kommer en fram til svaret 15.

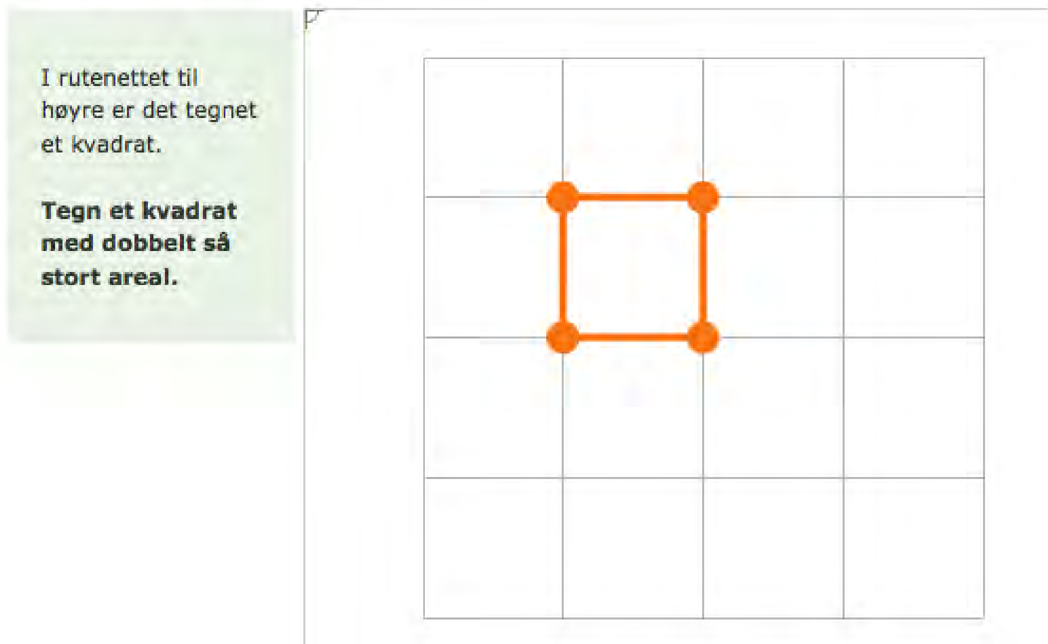
Noen elever svarer 14 eller 18. Når vi studerer hvordan disse elevene svarer på oppgavene 14a og 14b, finner vi at flesteparten av elevene (over 60 %) adderer i disse oppgavene. Vi kan da anta at flesteparten som gir disse svarene, har beregnet dem ved å addere kombinasjoner av de tallene som er angitt på figuren. Den siste gruppen av elever har svart 40. De har ganske enkelt multiplisert alle tallene i oppgaven.

Opprinnelig var det i oppgave 14 oppgitt enhet til måltallene, men svaret inneholdt ikke benevning. Det er færre enn halvparten som gir svaret med måleenhet. Det er flere elever som bruker cm enn cm^2. Se oversikten nedenfor i tabell 16.

Oppgave 14 Geometri 5 – 7 Svar med måleenhet	14a	14b	14c
Ubesvart	52	56	60
cm^2 (Korrekt enhet)	22	21	20
cm	25	22	20

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Geometri 5 – 7. Svar med måleenhet.

Oppgave 8



Oppgaveeksempel 10: Oppgave 8 Geometri 8 – 10

I oppgave 8 Geometri 8 – 10 skal eleven tegne et kvadrat som har dobbelt så stort areal som det gitte kvadratet. En rekke elever forholder seg til bare ett av disse kriteriene. Enten tegner de et nytt kvadrat som ikke har dobbelt så stort areal eller en figur med dobbelt så stort areal, men som ikke er et kvadrat.

Oppgave 8 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	8
Korrekt kvadrat med diagonal i en rute. Sidekant $s = \sqrt{2}$	2
Korrekt kvadrat, sidekanten er ca. 1,4 ganger siden i det opprinnelige kvadratet	4
Kvadrater tegnet over to ganger to ruter (Figur med korrekt form)	52
Rektangel tegnet over ruter (Figur med korrekt areal)	21
Kvadrat tegnet over tre ganger tre ruter	8

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Geometri 8 – 10

I hovedsak har elevene to ulike ikke korrekte løsningsforslag. Enten bruker de diagonalene i rutenettet som sidekanter i et kvadrat, eller de tegner et kvadrat der sidelengden er i underkant av en og en halv rute ($\sqrt{2} \approx 1{,}41$).

Få elever (ca 30 %) har tegnet kvadrater med korrekt areal. Selv blant disse elevene er det få som gir utfyllende informasjon til tegningen. Noen elever har skrevet kommentarer som ”fire halve er to”. Vi har også forklaringer som ”fordi det er dobbelt så stort”. Elev-tekstene forteller ikke noe om elevenes geometriske forståelse eller strategier for å løse oppgaven.

Hos elevene som tegner rektangel eller kvadrat (med større areal enn 2), finner vi to hovedtyper svar:

- Elevene er mest opptatt av form og tegner et kvadrat som oftest går ut over fire eller ni ruter
- Elevene er mest opptatt av størrelsen til arealet og tegner et rektangel

Den største gruppen av de elevene som er mer opptatt av form enn areal: 52 % tegner et kvadrat med areal 4. Mange av forklaringene viser at elevene er opptatt av lengden av sidene.

Oppgave 8 Geometri 8 – 10

Fordi hver side er dobbel så lang.

Elevsvar 10: Forklaring knyttet til lengden av sidene

Det er også en gruppe elever som skriver knappere tekst, men som sannsynligvis også fokuserer på lengden av sidene, og det er elever som skriver tekst som ”du ganger med to”. En interessant type forklaring fra elevene som tegner et kvadrat med areal 4, er tekster som ligner på eksemplet nedenfor:

Oppgave 8 Geometri 8 – 10

Det er et kvadrat der fra før. Hvis jeg skal tegne et som er dobbelt så stort, må jeg ha 4 små ruter. Hvis jeg skulle hatt

to ruter hadde det ikke blitt et kvadrat

Elevsvar 11: Eksempel på dobling av sidelengde

Denne eleven hevder at figuren har rett form, den er et kvadrat. Samtidig har den for stort areal.

21 % tegner et rektangel med areal 2. Tekstene til denne elevgruppen er også knappe, men de viser at elevene er mest opptatt av arealet, ikke av formen. Mange av elevene skriver tekst der det går fram at figuren er korrekt fordi den består av to ruter, fordi arealet er to, eller lignende. Men også i denne elevgruppen kan vi finne eksempler på elever som er usikre på om deres egen løsning er korrekt, fordi den har en ikke riktig form.

En siste gruppe (8 %) er de elevene som tegner et kvadrat på 9. Noen av elevene har tegnet kvadratet rundt kvadratet i illustrasjonen, slik at det opprinnelige kvadratet ligger midt i den nye figuren. Andre har tegnet de to kvadratene ved siden av hverandre. Tekstene disse elevene har skrevet, er så knappe at de forteller lite om deres strategier. Noen av elevene mener deres figur er korrekt fordi lengden av siden er økt ”alle veier”.

2.3 Sirkelen

De læringsstøttende prøvene for 9. årstrinn inneholdt to oppgaver om sirkelen. Dessverre var det opprinnelig en trykkfeil i oppgaven i forbindelse med utprøvingen og datainnsamlingen i oppgave 5 Geometri 8 – 10 nedenfor. Oppgaveteksten var: *Omkretsen til B er større enn omkretsen til A. Hva kan du si om omkretsen til A i forhold til omkretsen til B?* Derfor er det umulig for oss å uttale oss om omkretsen av sirkler da ingen av svaralternativene som ble gitt i oppgaven, passer med det korrekte svaret til denne formuleringen.

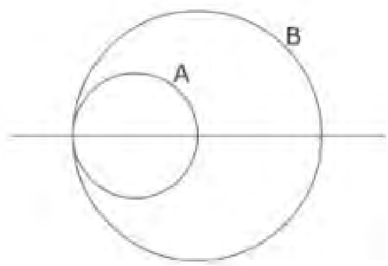
2.3.1 Omkrets

Oppgave 5

Til høyre er det tegnet to sirkler A og B. Diameteren i A er lik radien i B. Omkretsen til B er lengre enn omkretsen til A.

Hva kan du si om omkretsen til B sammenlignet med omkretsen til A?

- Den er dobbelt så lang
- Den er tre ganger så lang
- Den er fire ganger så lang
- Den er lengre, men vi kan ikke bestemme hvor mye lengre



Oppgaveeksempel 11: Oppgave 5 Geometri 8 – 10

Oppgave 5 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	3
Den er dobbelt så lang **(Riktig svar)**	60
Den er tre ganger så lang	6
Den er fire ganger så lang	7
Den er lengre, men vi kan ikke bestemme nøyaktig	10
Vet ikke	12

Tabell 18: Prosentvis fordeling. Oppgave 5 Geometri 8 – 10

Tabell 18 ovenfor viser svarfordelingen. Vi legger merke til at 60 % av elevene likevel krysser av for det korrekte svaret til den korrekte formuleringen. De tolker trolig teksten på bakgrunn av formuleringen i oppgaveeksempel 12. . Svarfordelingen i tabell 18 er trolig misvisende på grunn av trykkfeilen.

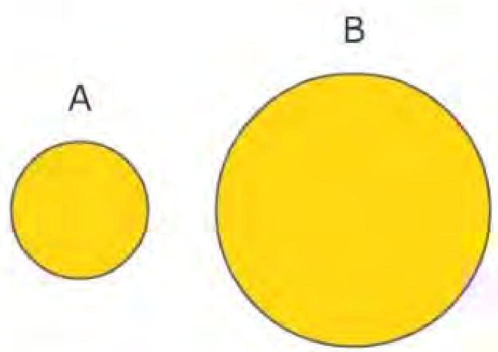
2.3.2 Areal

Oppgave 6

Til høyre er det tegnet to sirkler A og B. Omkretsen til B er dobbelt så lang som omkretsen til A.

Hva kan du si om arealet til B sammenlignet med arealet til A?

- Det er dobbelt så stort
- Det er tre ganger så stort
- Det er fire ganger så stort
- Det er større, men vi kan ikke bestemme hvor mye større



Oppgaveeksempel 12: Oppgave 6 Geometri 8 – 10

Oppgave 6 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	2
Det er fire ganger så stort (**Riktig svar**)	20
Det er dobbelt så stort	41
Det er tre ganger så stort	18
Det er større, men vi kan ikke bestemme nøyaktig hvor mye større	12
Vet ikke	6

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 Geometri 8 – 10

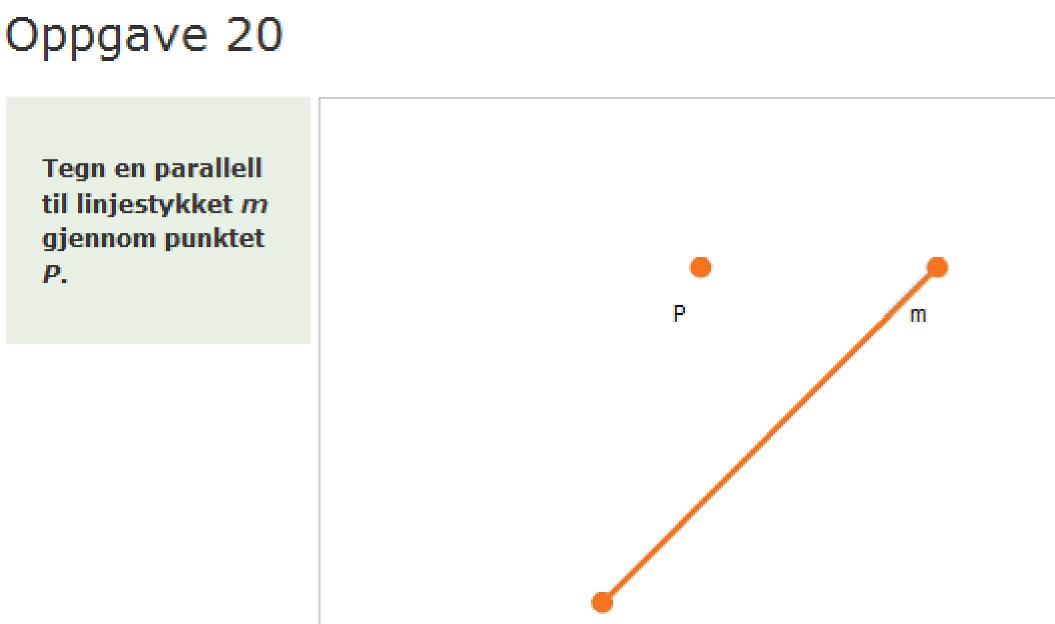
Det vanligste svaret fra elevene er altså at arealet til sirkel B er dobbelt så stort som arealet til sirkel A. De bruker trolig ikke den visuelle støtten som illustrasjonen kan gi. Eller de overser kanskje denne informasjonen fordi den står i misforhold til deres umiddelbare reaksjon. Dessuten er det lite trolig at de har erfaringer med å sammen-ligne forholdet mellom omkrets og areal.

Av de elevene som i oppgave 5 Geometri 8 – 10 svarte at omkretsen av B er dobbelt så lang som omkretsen av A, er det 49 % som også svarer at forholdet mellom arealene er 2. Det er bare 19 % av de elevene som svarte korrekt på oppgave 6, som også gir et korrekt svar på oppgave 6 Geometri 8 – 10. Omvendt er det 72 % av de elevene som krysser av for korrekt svaralternativ i oppgave 6, som også finner det korrekte svaralternativet i oppgave 5. Dette kan indikere at de fleste elevene besvarer oppgave 5 med utgangspunkt i den teksten denne oppgaven *skulle* ha hatt.

Kapittel 3 Tema II: Parallelle linjer og vinkler

3.1 Parallelle linjer

Det er bare én oppgave der det skal tegnes en parallell til en gitt linje.



Oppgaveeksempel 13: Oppgave 20 Geometri 8 – 10

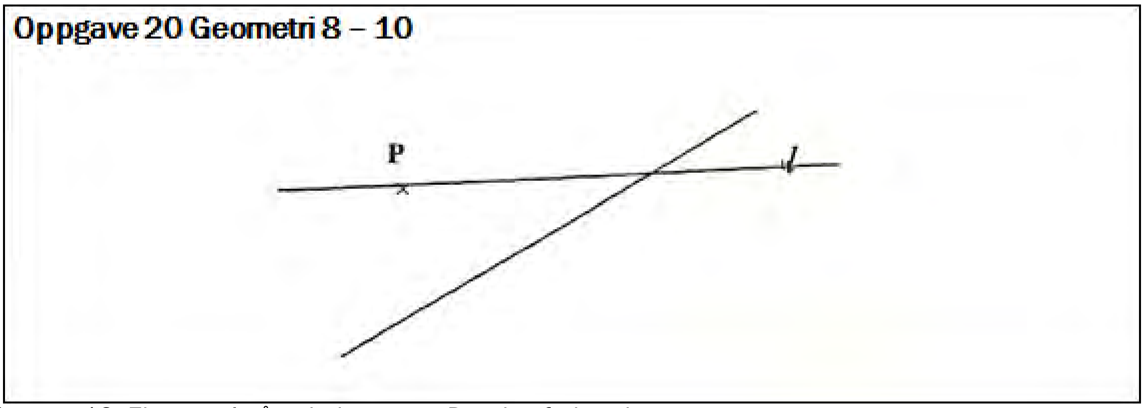
I underkant av halvparten av elevene på 9. årstrinn klarer å tegne en parallell til linjen *m* gjennom punktet *P*.

Oppgave 20 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	17
Korrekt tegnet parallell til linjen *m*	46
Linje fra punktet *P* til bokstaven *m*, parallell med siden av oppgavearket	19
To parallelle linjer fra *P* til *m* (ikke mulig elektronisk)	2
Normal fra (eller gjennom) punktet *P* til *m*	6

Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 20 Geometri 8 – 10

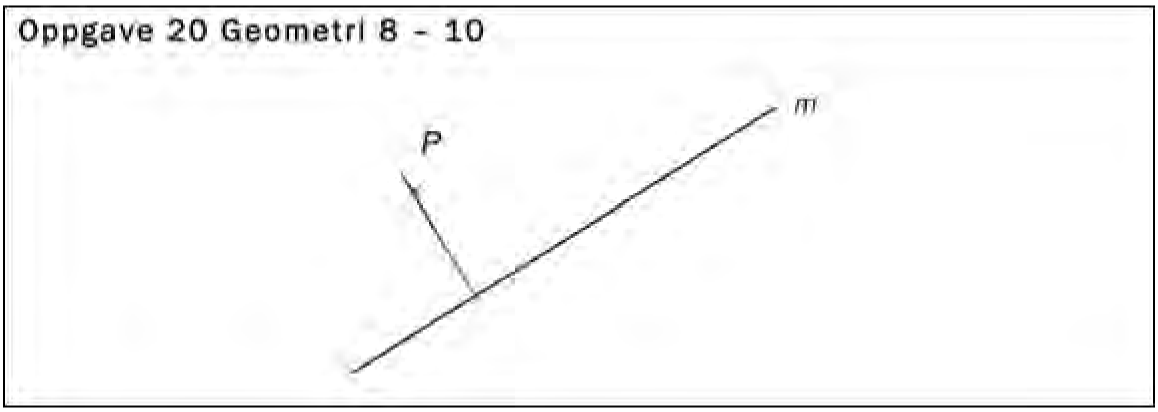
En del av elevene har valgt å konstruere en parallell. Enkelte av disse elevene har gjort formelle feil i konstruksjonen, men der linjen helt tydelig er en parallell med *m*, er svaret likevel godtatt.

Vi ser at det hyppigste feilsvaret er å tegne en linje gjennom punktet *P* og bokstaven *m*. Det er vanskelig å avgjøre om elevene tenker å "forbinde" *P* med bokstaven *m,* eller om de mener at linjen de skal tegne, må være parallell med de vannrette sidene på arket (eller dataskjermen). Elevsvar 12 er et eksempel på denne hyppigste kategorien av feilsvar.



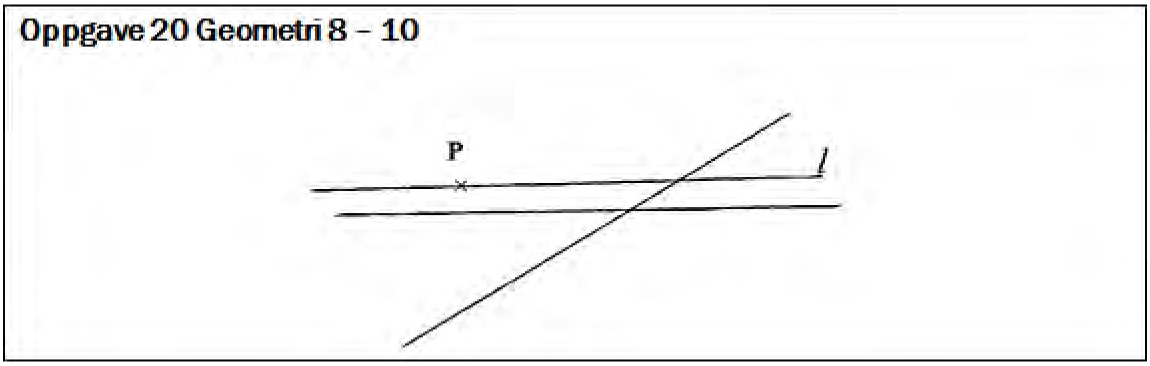
Elevsvar 12: Eksempel på at bokstavene *P* og *l* er forbundet

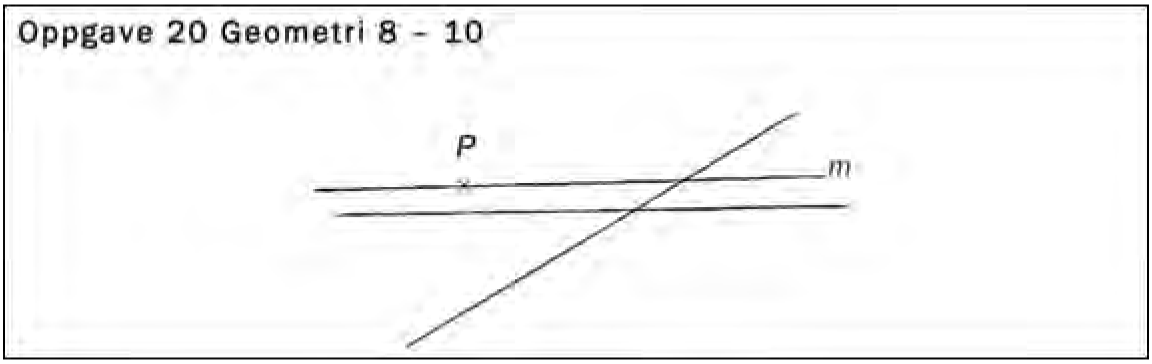
Vi legger merke til at noen elever forveksler parallell og normal. Elevsvar 13 nedenfor er et eksempel på dette:



Elevsvar 13: Eksempel på en normal på *m* fra *P*.

En liten del av elevene tegner to parallelle linjer. Disse elevene har oppfattet at ordet parallell betyr to linjer, det vil si at en skal tegne eller konstruere to linjer. Ettersom de elevene som tegner disse to linjene, tegner disse fra punkt *P* over til bokstaven *m*, ser de ikke at oppgaven har en gitt linje som en skal tegne en parallell til. Elevsvaret nedenfor er et eksempel på dette (ikke mulig elektronisk):





Elevsvar 14: Eksempel på at bokstavene *P* og *m* er

3.2 Vinkler

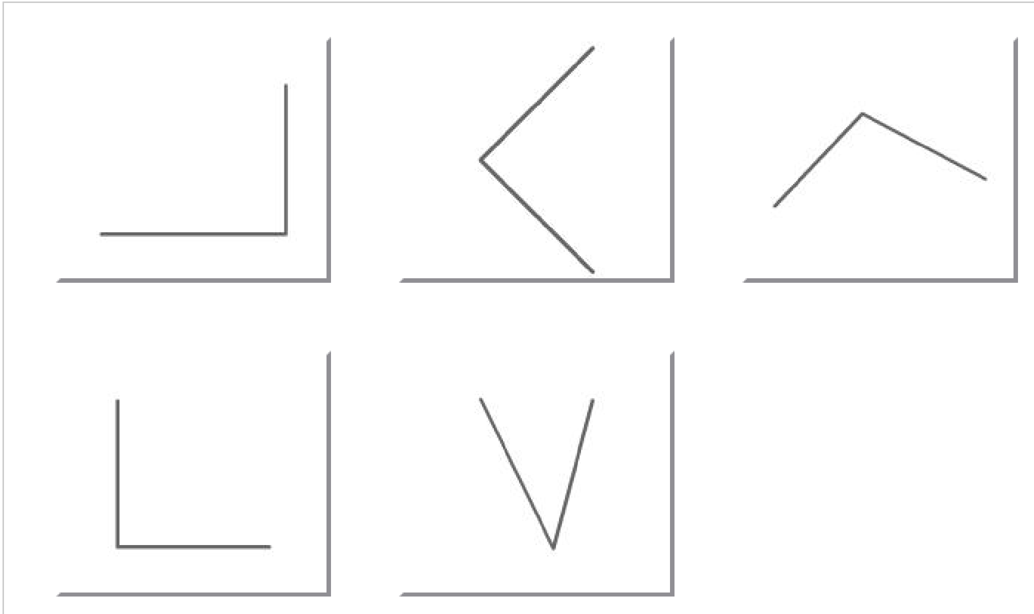
En del elever har oppfatninger om vinkler som er lite funksjonelle. Noen elever mener at vinkler må ha åpning mot høyre, eller at vinklene må være mindre enn $90°$. Slike forestillinger kan komme av en liten variasjon i de eksemplene de møter i lærebøkene og i undervisningen. Det er viktig at elevene møter vinkler med ulike vinkelåpninger, ulike lengder på vinkelbeina, ulike orienteringer i planet og så videre. I tillegg må elevene få erfaring med at stort utvalg av vinkler i ulike kontekster.

Når en vinkel er tegnet på et papir, illustrerer den det vi kaller det *statiske* aspektet ved vinkelbegrepet. Oftest skal slike vinkler måles eller beregnes. Vinkelbegrepet har også et *dynamisk* aspekt. En dør åpnes, dreier seg i en bestemt vinkel, som også kan måles eller beregnes. Det er likevel sjeldnere at vi ønsker å måle i slike sammen-henger. Oftest er vi mer opptatt av bevegelsen.

I oppgave 3 Geometri 5 – 7 for 6. årstrinn er vi opptatt av én side av det statiske aspektet ved vinkelbegrepet. Hensikten er å undersøke i hvilken grad elevene gjen-kjenner rette vinkler når disse er ulikt orientert.

Oppgave 3

Klikk på den eller de vinklene som er 90°.



Oppgaveeksempel 14: Oppgave 3 Geometri 5 – 7

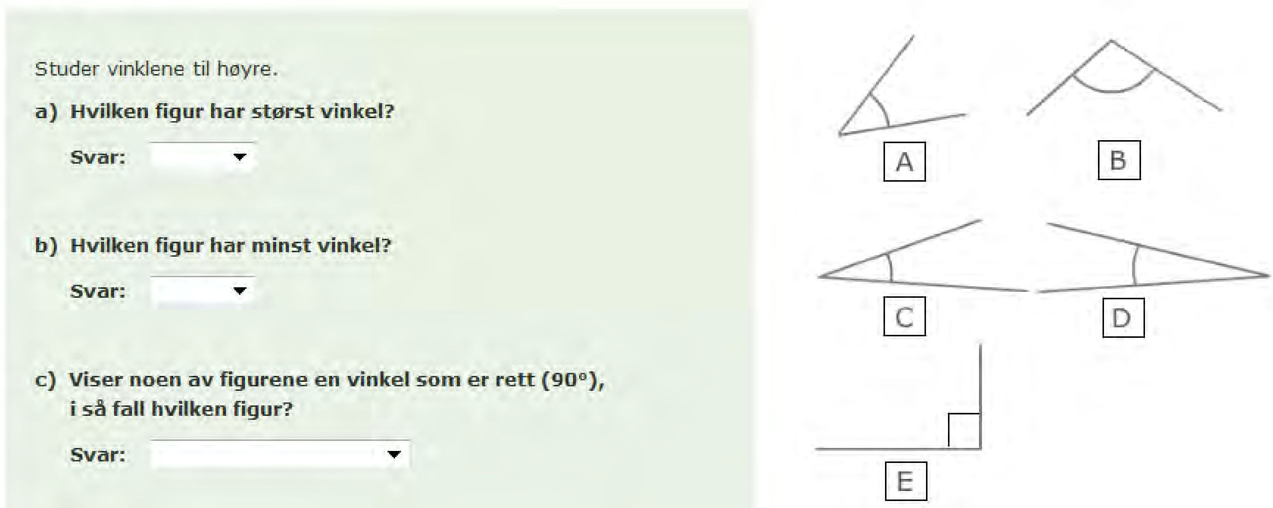
Oppgave 3 Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	1
Alle vinkler er markert: A, B og D	41
Bare vinkel A og D er markert	46
Bare vinkel B og A er markert	0,4
Bare vinkel B og D er markert	2
Bare vinkel B er markert	0,4
Bare vinkel A er markert	1
Bare vinkel D er markert	3

Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 3 Geometri 5 – 7

Vi ser at 93 % av elevene har krysset av for vinkel D *alene* eller sammen med andre av de rette vinklene. Nesten alle elevene gjenkjenner altså den rette vinkelen. Den er lik den vanligste illustrasjonen av en rett vinkel i lærebøkene. Tilsvarende tall for vinkel A er 88 % og for vinkel B 44 %. Det er altså tydelig at det er vanskeligere å gjenkjenne en rett vinkelsom ikke har et horisontalt vinkelbein. 3 % av elevene har krysset av bare for vinkel D. Den "vanskeligste" rette vinkelen å gjenkjenne er altså vinkel B.

I oppgave 9 og oppgave 10 Geometri 5 – 7 for 6. årstrinn skal elevene vurdere størrelsen på fem gitte vinkler. Som kjent refererer ordene stor/størst og liten/minst i denne sammenhengen til vinkelåpningen eller gradtallet. Det er kjent at elever knytter størrelsen av vinkler til lengden av vinkelbeina. De gitte svaralternativene er valgt slik at vi kan undersøke hvilke elever som har denne forestillingen.

Oppgave 9



Oppgaveeksempel 15: Oppgave 9 Geometri 5 – 7

Begrepet vinkel er, faglige sett, et mer vanskelig tilgjengelig begrep i geometri enn det elevene har møtt tidligere. En vinkel kan defineres på flere måter. Den kan bestemmes av et punkt og to *stråler* ut fra dette punktet. Området mellom strålene kaller vi vinkelområdet. Vinkelområdet består av alle punkter i dette området. Tradisjonen fra oldtidens matematikk har bestemt at måltallet for en vinkel defineres ved at en hel omdreining svarer til 360°. Vi snakker om positiv og negativ dreieretning og så videre. Ordet stor refererer i denne sammenhengen til andre egenskaper enn det gjør for eksempel ved lengde, bredde, volum og åpning. Hva som menes med størrelsen av en vinkel, kan være uklart for mange elever.

Oppgave 9a Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
Vinkel B (Riktig svar)	34
Vinkel A	1
Vinkel C	5
Vinkel D	39
Vinkel E	18

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave 9a Geometri 5 – 7

Tabell 22 viser at det er to svaralternativ som spesielt tiltrekker elevenes oppmerk-somhet, det korrekte svaret og vinkel D, som har de lengste vinkelbeina. Vi legger også merke til at den rette vinkelen E er et aktuelt valg for mange elever. Andre studier har pekt på at når vinkelåpningen peker mot venstre, bruker en del elever den utvendige vinkelen. Da blir vinkel E større enn de andre vinklene, bortsett fra vinkel D. Det kan derfor tenkes at også noen av elevene som har krysset for den vinkelen, har gjort dette fordi de har brukt den utvendige vinkelen og ikke lengden på vinkelbeina i sitt resonnement.

Oppgave 9b Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
Vinkel D (Riktig svar)	38
Vinkel A	37
Vinkel B	14
Vinkel C	4
Vinkel E	5

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave 9b Geometri 5 – 7

Det er 30 % av elevene som svarer riktig på både spørsmål 9a og 9b. Når vi analyserer hvordan den enkelte elev svarer på disse to spørsmålene, finner vi at hele 89 % av dem som valgte riktig svaralternativ på 9a-oppgaven, også krysset av for vinkel D i 9b-oppgaven.

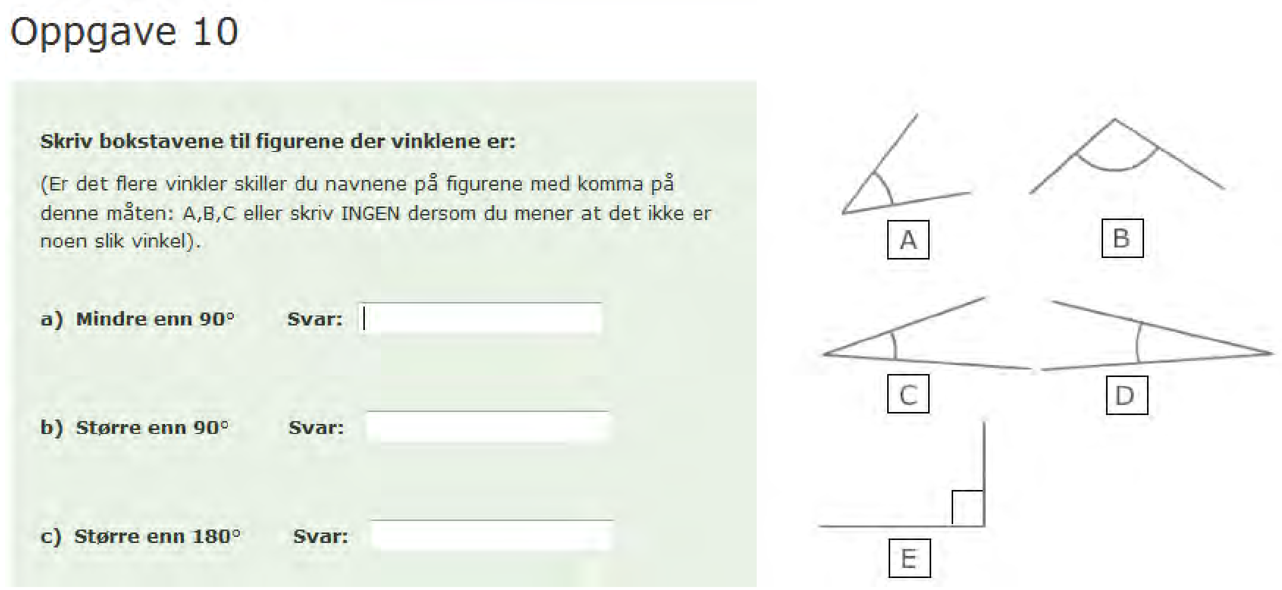
Vi legger merke til at 14 % av elevene mener at vinkel B er minst. Videre analyse av enkeltelevers svar viser at hele 81 % av disse elevene samtidig mener at vinkel D er den største i oppgave 9a. Den utvendige vinkelen til B er minst, og den utvendige vinkelen til D er størst. Dette indikerer at en del elever fokuserer mer på den utvendige vinkelen enn på lengden av vinkelbeina. Vinklene A og B har like lange vinkelbein. Dette kan være grunnen til at så mange velger dette alternativet i denne oppgaven. Tilsvarende er det 62 % av de elevene som mener at vinkel D er størst, som samtidig mener at vinkel A er minst.

Denne analysen viser at mange av disse elevene har gitt sine svar ut fra konsekvente resonnement.

Oppgave 9c Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	4
Vinkel E **(Riktig svar)**	75
Vinkel B	3
Vinkel B og E	2

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 9c Geometri 5 – 7

Tre firedeler av elevene identifiserer den korrekte rette vinkelen i oppgave 9c. Noen elever (5 %) krysser av for vinkel B, eller vinkel B og E. Dette kommer trolig av at denne vinkelen også er nær 90°. Vi finner godt samsvar mellom elevenes svar på denne oppgaven og oppgave 3 Geometri 5 – 7 som er analysert ovenfor.



Oppgaveeksempel 16: Oppgave 10 Geometri 5 – 7

Oppgave 10a Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	12
Vinkel A, C og D (**Riktig svar**)	35
Vinkel A	12
Vinkel B	5
Vinkel C	3
Vinkel D	3
Både vinkel A og B	4
Vinklene A, B, C og D	5
Ingen av vinklene	5

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 10a Geometri 5 – 7

Vi finner mange ulike svarkombinasjoner på denne oppgaven. Noen elever vurderer også her lengden til vinkelbeina. Til sammen er det 9 % av elevene som oppgir vinkel B eller vinkel A og B som svar på oppgaven. Vinkelbeina til begge disse vinklene er kortere enn vinkelbeina til den rette vinkelen. De fleste av elevene som svarer vinkel B eller vinkel A og B, har oppgitt de samme vinklene som svar på oppgave 9b. Disse elevene ser trolig på lengden til vinkelbeina som mål for størrelsen til vinkelen.

Oppgave 10b Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	16
Vinkel B (**Riktig svar**)	37
Vinklene B og E	4
Vinkel E	9
Vinkel D	7
Vinklene C og D	3
Ingen av vinklene er større enn 90°.	9

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 10b Geometri 5 – 7

Det er litt overraskende at 9 % av elevene oppgir at vinkel E er større enn 90°. Kan det være at enkelte av disse elevene har blandet sammen større enn og større enn eller lik? Dette kan også være forklaringen på at 4 % av elevene oppgir både vinkel B og vinkel E som svar. 9 % av elevene svarer at ingen av vinklene er større enn 90°. Disse elevene har trolig oppfattet vinkel B som en rett vinkel.

Ingen av vinklene som er tegnet i oppgave 10c, er større enn 180°. Litt under halvparten av elevene svarer korrekt at det ikke finnes noen slik vinkel blant de vinklene som er gitt. Vi legger merke til at andelen av blanke svar er vesentlig høyere på dette spørsmålet. De vanligste feilsvarene er vinkel D og/eller vinkel E. Vi har tidligere pekt på data som indikerer at en del elever betrakter trolig den utvendige vinkelen i disse tilfellene. Nærmere analyser av hvordan de enkelte elevene svarer på de ulike delspørsmålene, viser at mange av disse elevene trolig bruker tilsvarende resonnement i denne oppgaven.

Oppgave 10c Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	28
Ingen av vinklene er over 180° (**Riktig svar**)	49
Vinklene D	6
Vinkel E	6

Tabell 27: Prosentvis fordeling. Oppgave 10c Geometri 5 – 7

Oppgave 9

Oppgaveeksempel 17: Oppgave 9 Geometri 8 – 10

Hensikten med oppgave 9 og figur A ovenfor var å undersøke om elevene ser både den innvendige og den utvendige vinkelen.

Oppgave 9 Geometri 8 – 10 Figur A	9. årstrinn
Ubesvart	1
To vinkler **(Riktig svar)**	11
En vinkel	85

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 Geometri 8 – 10. Figur A.

Figur B er mer kompleks. I hovedsak kan vi skille mellom tre grupper av elevsvar:

- Elever som oppgir at de ser to vinkler (to innvendige vinkler)
- Elever som oppgir at de ser tre vinkler (to innvendige vinkler som også utgjør en tredje)
- Elever som oppgir at de ser flere enn tre vinkler

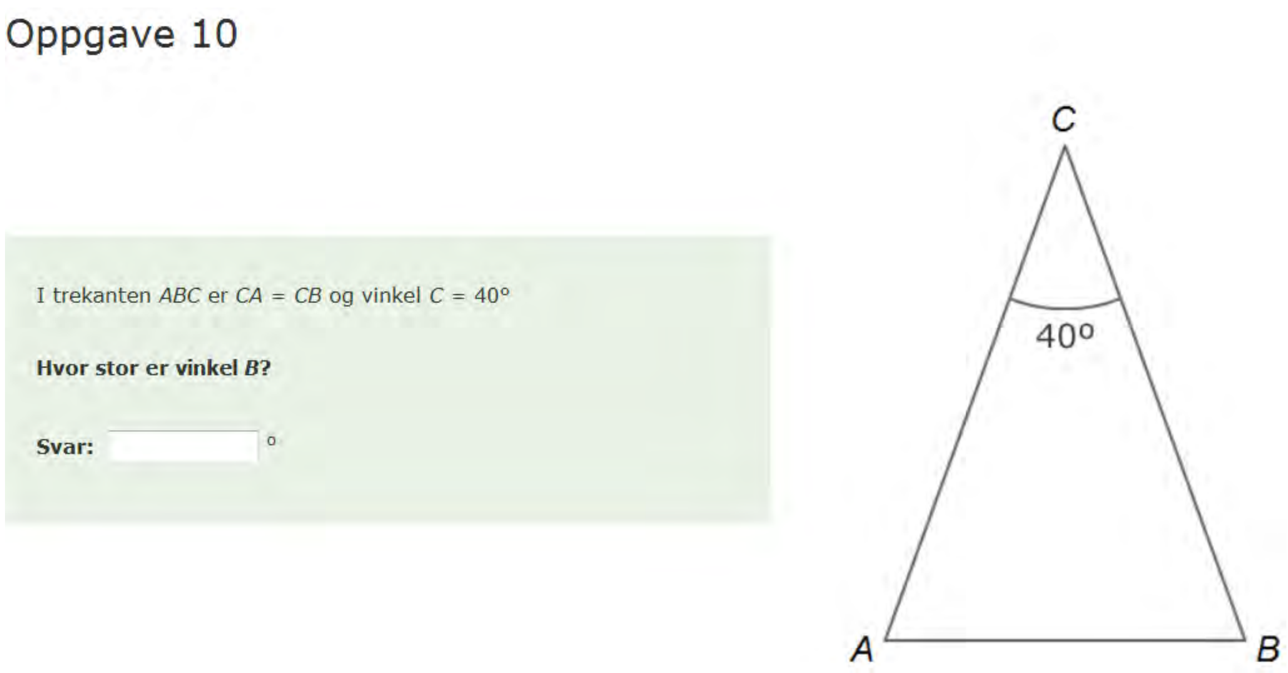
Oppgave 9 Geometri 8 – 10 Figur B	9. årstrinn
Ubesvart	1
Seks vinkler **(Riktig svar)**	1
To vinkler	58
Tre vinkler	32
Fire vinkler	3

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 Geometri 8 – 10. Figur B

Ikke uventet svarer flertallet av elevene at de ser to vinkler. Dette samsvarer med elevenes svar for Figur A; hele 98 % av de elevene som svarte to vinkler for figur B, gav samtidig svaret en vinkel for Figur A. 68 % av de elevene som har svart at de kan se en vinkel i Figur A, har *også* svart at de ser to vinkler i Figur B, og 29 % kan se tre vinkler.

Blant elevene som har svart at de ser to vinkler i figur A, er det mest vanlig å svare at de ser tre vinkler i Figur B. Det er rimelig å tro at disse elevene finner to innvendige vinkler og den utvendige vinkelen til de to "ytterste" vinkelbeina. Noen elever har også markert denne utvendige vinkelen. Svaret fire vinkler kan trolig komme av at elevene finner de tre indre vinklene og i tillegg den utvendige vinkelen til de to "ytterste" vinkelbeina.

For å kunne løse oppgave 10 Geometri 8 – 10 nedenfor må vi vite at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at vinklene A og B er like store ettersom CA og CB er like lange. Dette er en tradisjonell geometrioppgave.



Oppgaveeksempel 18: Oppgave 10 Geometri 8 – 10

Oppgave 10 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	7
70° (Riktig svar)	41
40°	8
60°	17
Svar mellom 65° og 75° (kan ha målt vinkler)	9

Tabell 30: Prosentvis fordeling. Oppgave 10 Geometri 8 – 10.

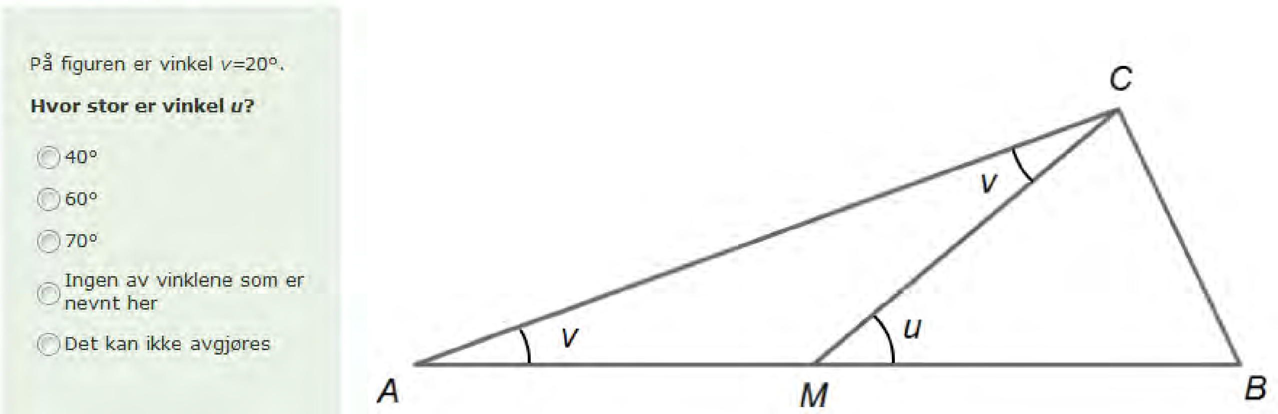
Svaret 40° kan tyde på at disse elevene oppfatter at trekanten er likesidet, eller at de rett og slett bedømmer størrelsen på vinklene visuelt og mener at alle er like store. Svaret 60° kan komme av samme grunn; disse elevene vet at vinklene i en likesidet trekant er 60°.

Trekanten i oppgaven er med vilje ikke konstruert nøyaktig for å avsløre de elevene som måler vinkelen og ikke beregner størrelsen ut fra de gitte opplysningene. Vinkel B er tegnet som 68°.

9 % av elevene måler trolig vinkelen. Disse elevene tar i bruk en metode som tyder på at de ikke har, eller er sikre på, de matematiske kunnskapene som er nødvendige for å kunne beregne størrelsen av vinkel B ut fra de gitte opplysningene.

For å kunne løse oppgave 14 Geometri 8 – 10 nedenfor må elevene kjenne til at vinkelsummen i en trekant er 180°, og at en rett linje danner en vinkel på 180°.

Oppgave 14



Oppgaveeksempel 19: Oppgave 14 Geometri 8 – 10

Oppgave 14 Geometri 8 – 10 Bokmålselever	9. årstrinn
Ubesvart	4
40° **(Riktig svar)**	26
60°	28
70°	13
Ingen av vinklene	20
Det kan vi ikke vite	7

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Geometri 8 – 10.

Legg merke til at det er relativt få elever som unnlater å besvare oppgaven. Vi ville ha trodd at denne problemstillingen var relativt vanskelig, og derfor kunne vi forvente mange blanke svar. Når det likevel er så få blanke svar, kan det komme av at oppgaven har gitte svaralternativer. Bortsett fra det siste svaralternativet, *Det kan vi ikke vite*, fordeler svarene seg nokså jevnt mellom de andre alternativene. Når elever svarer at vinkelen er 60°, kan det være fordi vinkelen *ligner* på en 60° vinkel. En annen grunn kan være at mange av de trekantene som elevene arbeider med i skolematematikken, er likesidet.

I tabell 32 nedenfor har vi kategorisert noen av forklaringstypene til bokmålselevene. Legg merke til at omtrent en tredel av elevene gir forklaringer som ikke passer inn i noen av de kategoriene som er tatt med i tabellen.

Oppgave 14 Geometri 8 – 10 Forklaring. Bokmålselever	9. årstrinn
Ubesvart	20
Korrekt forklaring	6
Vinkel u er dobbelt så stor som vinkel v – uten begrunnelse	9
”Fordi den ser liten ut” eller lignende begrunnelser – visuell sammenligning	2
Feilaktige forklaringer på at vinkel v er 40°	4
Forklaringer basert på visuell bedømming av trekant MBC som likesidet (Svar 60°)	5
Vinkel u er 70° fordi 90 – 20 = 70	3
Vinkel u *ser ut som om* den er 70°	2
Har målt vinkel u	7
Forklaringer på at vinkel u er 140°	4
Eleven mener at det er for få opplysninger	4

Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Geometri 8 – 10.

Elevene som svarer at vinkel u er 40°, har i hovedsak to framstillinger av hvorfor det er slik. 6 % av elevene skriver en forklaring til hvorfor vinkel u er 40°, der de tar utgangspunkt i å finne nabovinkelen til u og så beregne u ved hjelp av denne vinkelen. Noen elever skriver dette formelt matematisk, mens andre har en mer tekstlig forklaring. Elevsvar 15 nedenfor er et eksempel på en slik forklaring.

Oppgave 14 Geometri 8 – 10

Jeg plusset $\angle v + \angle v = 40°$ Så trakk jeg 40° ifra 180° (jeg manglet en vinkel i AMC). Da fikk jeg 140°. På andre sie av MC er det en annen trekant. Den er rett ved siden av den vinkelen jeg manglet i AMC. u og den ukjente vinkelen (Den var 140°) skal til sammen bli 180°, og trekker du 140° fra 180° får du 40° : $\underline{u = 40°}$

Elevsvar 15: Eksempel på en korrekt begrunnelse for at vinkelen er 40°

En større gruppe, 9 %, skriver ganske enkelt av vinkel u er dobbelt så stor som vinkel v, uten at dette begrunnes nærmere. På bakgrunn av forklaringen kan vi derfor ikke avgjøre om eleven ser at dette er riktig, eller om dette svaret er gitt fordi det passer med svaralternativene.

Det er interessant å legge merke til at noen elever gjør greie for deler av argumentet, man klarer ikke å fullføre det. Dette er elever som kan bruke setningen om vinkelsum, men som bruker setningen om nabovinkler:

Oppgave 14 Geometri 8 – 10

I en trekant er det 180°

$20° + 20° = 40°$ $180° - 40° = 140°$

Elevsvar 16: Eksempel på bruk av trekantens vinkelsum

Andre elever, 4 %, skriver at det er for få opplysninger til å regne ut hvor stor vinkel u er. Vikan renke oss at også disse elevene kjenner til setningen om vinkelsummen i en trekant, men ikke ser hvordan den kan brukes i dette tilfellet. Vi finner også svar som fokuserer på den høyre delen av trekanten. Elevene kan for eksempel skrive at vinkel v er i den andre trekanten.

Oppgave 14 Geometri 8 – 10

For vi må vite 2 av vinklene for å finne ut av det, hvis det ikke er en likebeinet trekant.

Elevsvar 17: Forklaring knyttet til likebeinte trekanter

Noen elever har som sin hovedstrategi å måle vinkelen. De vil finne at vinkelen er omtrent 50°, og følgelig passer ingen av svaralternativene. Noen av elevene har skrevet at de målte, mens andre ganske enkelt oppgir at vinkelen er 50°.

Oppgave 14 Geometri 8 – 10

Jeg tenkte at vinkel v = 20 men den var egentlig 27.
u var 52 men jeg plusset med 7.

Elevsvar 18: Eksempel på elevsvar som indikerer vinkelmåling

Andre elever som har målt, har forsøkt å gjøre som denne eleven: tilpasse sitt eget svar (måling) til alternativene som er oppgitt i oppgaveteksten. De sju gradene som var tegnet "feil" i oppgaveillustrasjonen, har eleven lagt til målet han fikk da han målte vinkel u. At dette ikke blir 60°, som eleven har krysset av for, er ikke kommentert i elevteksten. Av bokmålselevene har 8 % skrevet tekst for å forklare at vinkel u er 60°. I hovedsak legger elevene i disse tekstene vekt på at trekanten MBC ser ut til å være likesidet.

3 % av elevene hevder at vinkel C er 90°, og mener at da kan en finne u gjennom beregningen 90 – 20 = 70. Sannsynligvis har også disse elevene produsert en utregning som gir et av valgalternativene. Siden tekstene er svært knappe, er det ikke noe i det som er skrevet, som tyder på at elevene ser at de har regnet ut størrelsen til en annen vinkel enn den det er spurt etter.

Noen elever tar utgangspunkt i setningen om vinkelsum og bruker denne mer eller mindre korrekt, men glemmer at vinkel u ikke ligger i samme trekant som vinkel v. Disse elevene mener at vinkel u er 140° eller 160°.

Oppgave 18 Geometri 8 – 10 nedenfor handler om å finne gradtallet for en vinkel i en firkant når tre av vinklene er oppgitt.

Oppgaveeksempel 20: Oppgave 18 Geometri 8 – 10

Oppgave 18 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	10
120° **(Riktig svar)**	48
Indikasjon på at vinkelen er målt	2
90°	3
60°	7
100°	3
90°	4
90°	4
Andre svar	19

Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave 18 Geometri 8 – 10.

I underkant av halvparten av elevene har besvart oppgaven korrekt. Noen få elever har forsøkt å måle vinkel A i oppgaveillustrasjonen. Dette er en vanlig strategi som elever bruker når de ikke klarer å beregne en gitt vinkel.

Vi finner en lang rekke tallsvar til denne oppgaven, 60° er det hyppigste av disse. Kan dette svaret komme av at 60° er det eneste *tallet* som er gitt i oppgaven? Blant elevsvarene finner vi en rekke forslag til vinkler som ikke uten videre lar seg forklare. Trolig kan vi bare få innblikk i tankegangen til disse elevene ved å samtale med dem om hvordan de tenkte i løsningsprosessen.

Kapittel 4 Tema III: Omkrets, areal og volum

Det er velkjent at mange elever har problemer med å holde disse begrepene fra hverandre. Noen av de vanskene elevene møter, kan avdekkes ved bruk av oppgavene som omtales nedenfor. Andre vansker kan avdekkes ved hjelp av de oppgavene som en finner i veiledningen *Måling*.

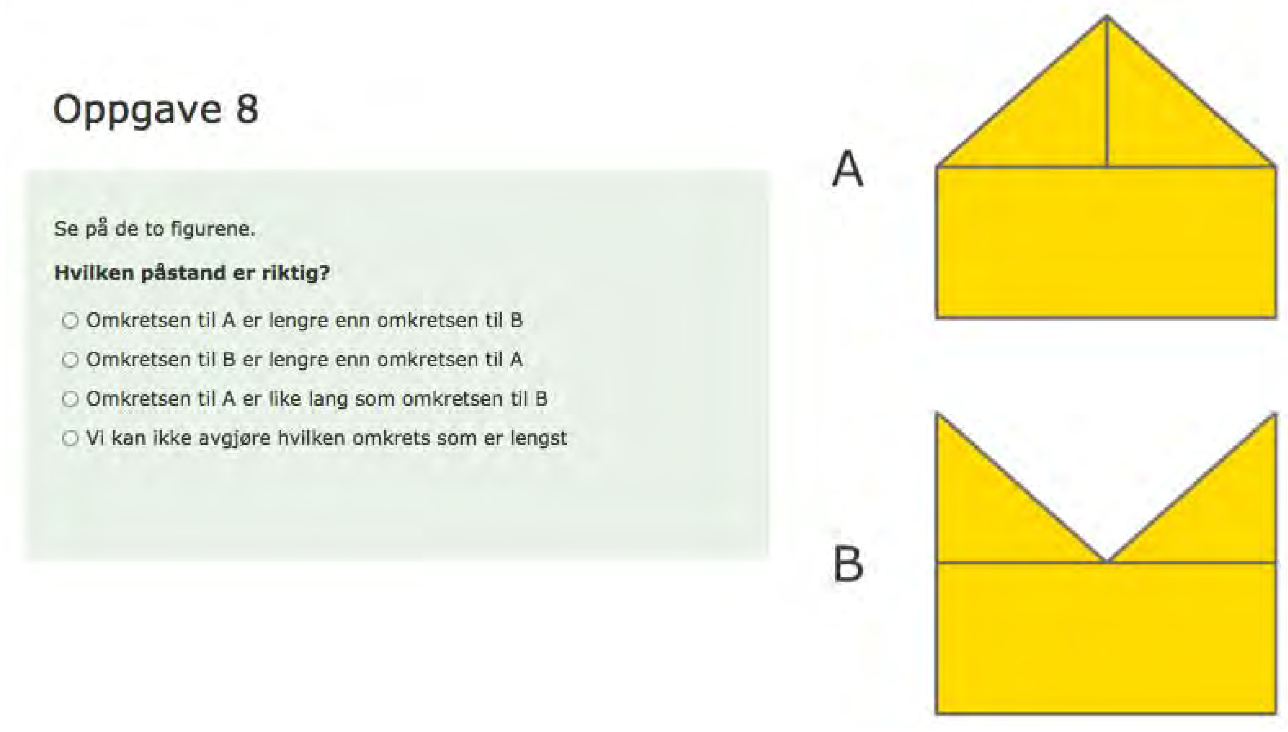
4.1 Omkrets og areal

Noen elever tror *omkretsen bestemmer arealet* til figuren. I mange tilfeller vil dette være rett, men det er også lett å illustrere at to figurer med samme omkrets kan ha ulikt areal.

I tillegg er det en del elever som forveksler begrepene omkrets og areal. Dette er en språklig usikkerhet som kan ha sammenheng med at elevene er usikre på innholdet i begrepene, eller at de ikke kjenner de korrekte termene. Det er viktig at den undervisningen elevene møter, kan gjøre dem kjent med et matematisk vokabular og gi dem mulighet til å bruke det matematiske språket.

I de læringsstøttende prøvene i Geometri finnes det flere oppgaver der ulike sider ved areal-begrepet blir undersøkt. Disse oppgavene handler om: opptelling av enheter, tegning av en figur med et bestemt areal, vurdering og sammenligning av areal, og beregning av areal. I noen av oppgavene får elevene spørsmål om både areal og omkrets.

I oppgave 8 Geometri 5 – 7 og oppgave 15 Geometri 8 – 10 ønsker en å undersøke om elevene ser omkrets atskilt fra areal.



Oppgaveeksempel 21: Oppgave 8 Geometri 5 – 7 og oppgave 15 Geometri 8 – 10

Oppgave 8 Geometri 5 – 7 Oppgave 15 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	2
Omkretsen til B er lengre enn omkretsen til A (Riktig svar)	60	55
Omkretsen til A er lengre enn omkretsen til B	5	3
Omkretsen til A er like lang som omkretsen til B	31	38
Vi kan ikke avgjøre hvilken omkrets som er lengst	1	1

Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 Geometri 8 – 10.

Vi legger merke til at fordelingen på de ulike svaralternativene er omtrent den samme for begge årstrinnene, og at det er en høyere prosentandel på 6. årstrinn enn på 9. årstrinn som svarer korrekt på dette spørsmålet. Det er vanskelig å finne en rimelig forklaring på dette. I tillegg ble elevene i utprøvingen bedt om å skrive en tekst der de forklarte valget sitt.

Oppgave 8 Geometri 5 – 7 Oppgave 15 Geometri 8 – 10 Forklaring	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	8	14
B > A: Fokuserer på antall sider, lengder av sider og lignende (Riktig)	8	14
B > A: Omgir at de har målt (Riktig)	24	12
B > A: ”fordi B er vridd rundt” eller ”B går oppover” og lignende (Riktig)	2	12
B > A: fordi det ser slik ut	9	7
A = B: Det blir like langt hvis man snur om på trekantene	15	17
A = B: Figurene har samme areal	2	2
A = B: Det ser slik ut	4	5
Andre svar	25	18

Tabell 35: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 Geometri 8 – 10. Forklaringstyper.

Det er færre elever på 9. årstrinn enn på 6. årstrinn som skriver forklaring. Forklaringene som gis av elevene på de to årstrinnene, er nokså like. Det er flere elever på 6. årstrinn som skriver tekster som er så knappe eller uklare at vi ikke kan kategorisere dem.

To forklaringer skiller seg ut som de vanligste. En del elever skriver forklaringer der de fokuserer på antall sider. De trekker fram at i figur B er det flere av trekantens sider som må regnes med når vi beregner omkrets. Noen elever påpeker også at det de kaller ”høyder” (vertikale sider), er lengre i figur B. Den største gruppen er de som forklarer at de har målt sidene på de to figurene og lagt sammen. I 6. årstrinn er dette nesten en firedel av elevene. Noen elever bedømmer trolig de to omkretsene visuelt. De gir korte svar som ”det ser slik ut”.

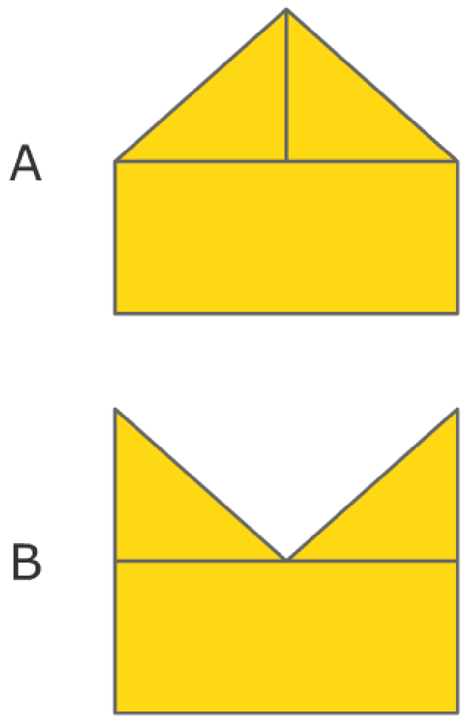
Både figur A og figur B er satt sammen av de samme grunnfigurene. Noen hevder for eksempel at i figur B er figurene snudd rundt, vridd eller dreid. Ofte forklares det ikke hvordan dette har sammenheng med omkretsen av figurene. Andre elever ser figurene for seg som bakketopper. De skriver for eksempel at figur B ”*har en hump*”, eller at figurene går ”*opp og ned*”.
Den vanligste forklaringen til de elevene som hevder at omkretsene til de to figurene er like, er at om en ”snur rundt” trekantene i en av figurene, så blir omkretsen den samme. Dette er riktig for de enkelte delene av A og B, trekantene har samme omkrets hvordan vi enn snur dem, men i figur B er det flere av sidekantene i trekantene som utgjør omkretsen enn i figur A. Noen få elever skriver at figurene har samme omkrets fordi de har samme areal (2 % på begge trinn). Andre elever mener de kan se at det er like langt rundt figurene.

Oppgave 16

Se på de to figurene.

Hvilken påstand er riktig?

- A har større areal enn B
- B har større areal enn A
- A og B har like stort areal
- Vi kan ikke avgjøre hvilken figur som har størst areal



Oppgaveeksempel 22: Oppgave 16 Geometri 8 – 10

Tabell 36 viser at oppgave 16 er betydelig enklere enn oppgave 15.

Oppgave 16 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	5
A og B har like stort areal **(Riktig svar)**	71
A har større areal enn B	6
B har større areal enn A	15
Vi kan ikke avgjøre hvilken figur som har størst areal	2

Tabell 36: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Geometri 8 – 10.

Når vi undersøker hvordan den enkelte elev i 9. årstrinn besvarer spørsmålene 15 og 16, finner vi at 39 % (205 elever) har svart korrekt på begge spørsmålene. Av de elevene som krysset av for korrekt alternativ på spørsmål 15, er det 72 % som *også* svarer at arealene av A og B er like store i spørsmål 16. 18 % av dem som svarte at omkretsen til B er større enn omkretsen til A, svarer *også* at arealet til B er større enn arealet til A. Motsatt er det 55 % av dem som svarer at de to arealene er like store, som *også* svarer at omkretsen av B er større enn omkretsen av A. Det er hele 47 % av elevene som krysser av rett svar på oppgave 16, som mener at omkretsene til A og B er like store.

Oppgave 16 Geometri 8 – 10 Forklaring	9. årstrinn
Ubesvart	22
Korrekt forklaring eller beregning	8
Trekantene har ikke endret areal ved flytting, eller "har samme areal" **(Riktig svar)**	11
Påstander som "De er like store"	9
Arealene er like fordi omkretsene er like	3
Andre forklaringer som ikke er faglig korrekte	21
B > A. B har større areal siden omkretsen er lengre	3
Andre ikke-kategoriserte forklaringer	18

Tabell 37: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Geometri 8 – 10. Forklaringstyper.

Vi legger merke til at omtrent en femdel av elevene ikke har forklart hvordan de har tenkt. Det er også stor variasjon i hvordan elevene har forklart sine resonnementer. En stor gruppe har gitt forklaringer som vi ut fra faglige kriterier har valgt å ikke kategorisere. Noen elever har forsøkt å beregne arealet til de to figurene for å vise at de har samme areal, eller de har skrevet forklaringer som begrunner hvorfor disse arealene er like store. Argumentasjonen går for eksempel på at trekantene har samme grunnlinje og høyde.

Den vanligste formen for korrekt argumentasjon finner vi hos elever som tar utgangspunkt i at det er bare plasseringen av de to trekantene som er endret. Disse elevene skriver at trekantene ikke forandrer areal ved at de blir flyttet på. Vi finner også i denne gruppen elever som ser for seg at en snur på trekantene i en av figurene og dermed får to like figurer.

Oppgave 16 Geometri 8 – 10

Arealet er likt for det er bare trekantene oppå som er snudd en annen veg. Men arealet forsvinner ikke før, vi fjerner noe fra figuren.

Elevsvar 19: Eksempel på forklaringer som er basert på å "snu på" trekantene

Noen elever skriver at trekantenes arealer er like store. Disse tekstene er knappe, og store deler av argumentasjonen er underforstått. Disse elevene har likevel forstått noe vesentlig når det gjelder å sammenligne størrelser til gitte figurer, det kan være deres språklige framstillingsevne – deres evne til å føre et matematisk resonnement – som kommer til kort. Det samme kan vi hevde om forklaringer som ”*Det ser sånn ut*” og ”*De er like store*”. 9 % av elevene gir forklaringer av denne typen.

Noen elever hevder at de to figurene har samme areal fordi de har samme omkrets. Dette er elever som i oppgave 16 har oppgitt at det er like langt rundt de to figurene. Det er under halvparten av de elevene som har krysset av for at arealene av figur A og B er like, som gir en akseptabel forklaring for dette valget. Elever som mener at figur B har størst areal, argumenterer med at den har lengre sider, eller trekker fram at den har større omkrets.

Oppgave 16 Geometri 8 – 10

Det er lengre rundt B og derfor er det større areal enn A.

Elevsvar 20: Eksempel på forklaringer som argumenterer med at arealet er størst for lengst omkrets

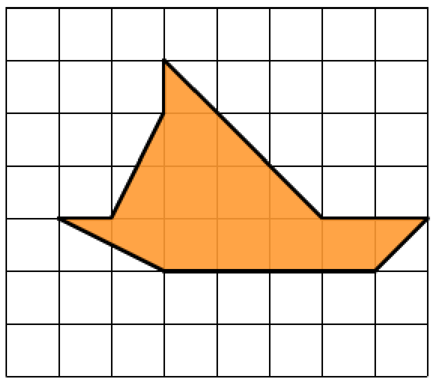
Oppgavene 11 og 12 i Geometri 8 – 10 nedenfor er de samme som oppgavene 6 og 7 i Geometri 5 – 7.

Oppgave 6

Hver rute i rutenettet er 1 cm^2.

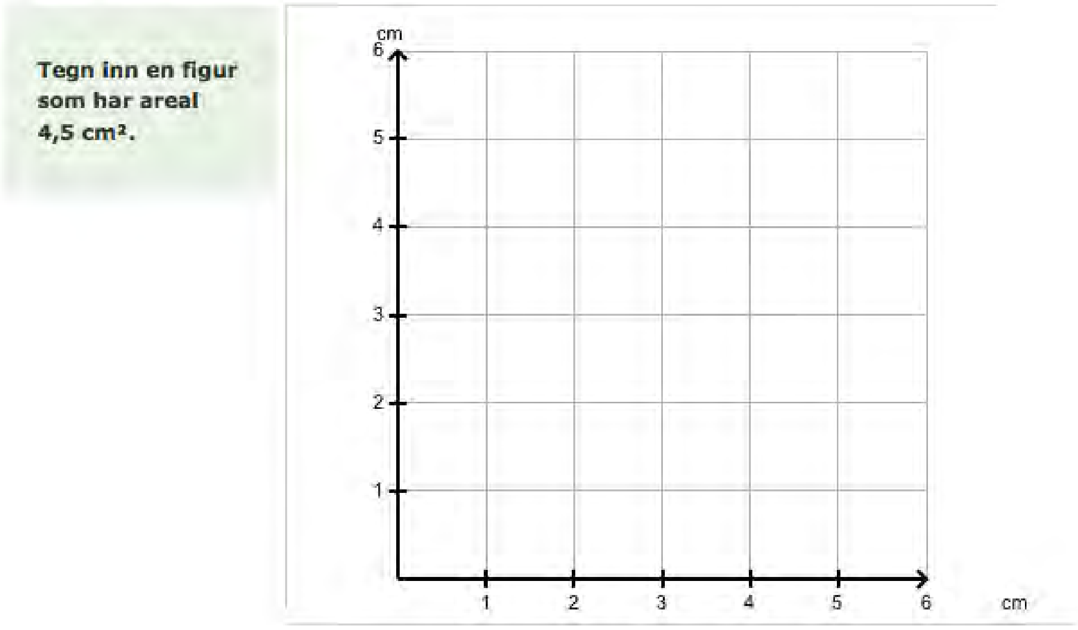
Hvor stort areal har figuren?

Svar: ______ cm²



Oppgaveeksempel 23: Oppgave 6 i Geometri 5 – 7 og oppgave 11 Geometri 8 – 10

Oppgave 7



Oppgaveeksempel 24: Oppgave 7 Geometri 5 – 7 og oppgave 12 Geometri 8 – 10

I oppgave 11 ovenfor må eleven telle ruter for å bestemme arealet til figuren. Vi ser på denne typen aktiviteter som svært viktig i oppbygging av arealbegrepet – areal-beregning er sammenligning av flater ved hjelp av en enhet. I utgangspunktet er det å finne arealet det samme som å telle antallet enheter vi trenger for å dekke figuren. Kvadratiske ruter er oftest praktiske enheter for dette formålet. Figuren er tegnet slik at det er mulig å telle halvparter av en eller to ruter.

Oppgave 6 Geometri 5 – 7 Oppgave 11 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	13	13
11 cm^2 med eller uten benevning	32	40
10 eller 10,5 eller 11,5 eller 12	16	18
16	7	3
15	3	1
Tall mellom 16,9 og 18,5	5	3
28	1	1

Tabell 38: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 Geometri 5 – 7 og oppgave 11 Geometri 8 – 10.

De fire første svaralternativene i tabell 38 indikerer at disse elevene bruker rutene på en eller annen måte for å finne løsningen på oppgaven. Svar som 10; 10,5; 11,5 og 12 tyder på at de fleste av disse elevene forsøker å telle hele og halve ruter med en eller annen tellefeil.

Svaret 16 kommer trolig fram ved at til teller alle ruter som omkretsen av figuren går gjennom. Disse elevene bruker altså en form for lengdemåling. Tallet 15 er trolig et resultat av en lignende strategi. Noen elever svarer med desimaltall mellom 16,9 og 18,5. Disse svarene er også en indikasjon på at elevene har målt omkretsen til figuren. Enkelte elever skriver målene på oppgavearket, slik at det er enkelt å se at de faktisk har målt. Noen få elever svarer 28. Bredden til figuren er sju ruter, og høyden er fire ruter. De elevene som har fått svaret 28, kan ha multiplisert disse tallene for å finne arealet til figuren.

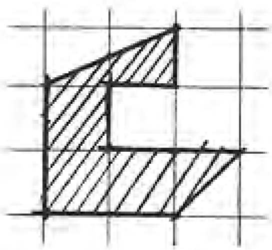
Oppgave 12 Geometri 8 – 10 vil gi oss tilsvarende informasjon som oppgave 11. Kan elevene lage figurer som har det gitte arealet, ved å *telle* ruter?

Oppgave 7 Geometri 5 – 7 Oppgave 12 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	11
Korrekt tegnet figur med areal 4,5 cm^2	45	62
Figur hvor areal ligger i nærheten av 4,5 cm^2	7	5
En lukket eller åpen figur som har omkrets 4,5 cm eller går over 4,5 ruter	10	5
En figur som kopierer figuren i oppgave 6	3	1

Tabell 39: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 Geometri 5 – 7 og oppgave 12 Geometri 8 – 10.

Å tegne en figur med et bestemt areal krever hvordan formen til denne figuren kan være. Det er flere elever som har besvart dette spørsmålet enn oppgave 11. Av elevbesvarelsene ser vi at mange har gjort seg stor flid når de har tegnet. Noen har fargelagt figuren sin, andre har lagt vekt på å lage en figur med spennende form.

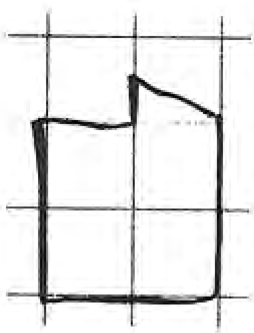
Oppgave 12 Geometri 8 – 10



Elevsvar 21: Eksempel på en kreativ og korrekt løsning

Vi finner mange ulike løsninger på dette spørsmålet. Noen elever har hatt problemer med å tegne en halv rute, og de har tegnet fire eller fem hele ruter, eller de har delt opp en rute som tydelig ikke er lik en halv rute.

Oppgave 12 Geometri 8 – 10

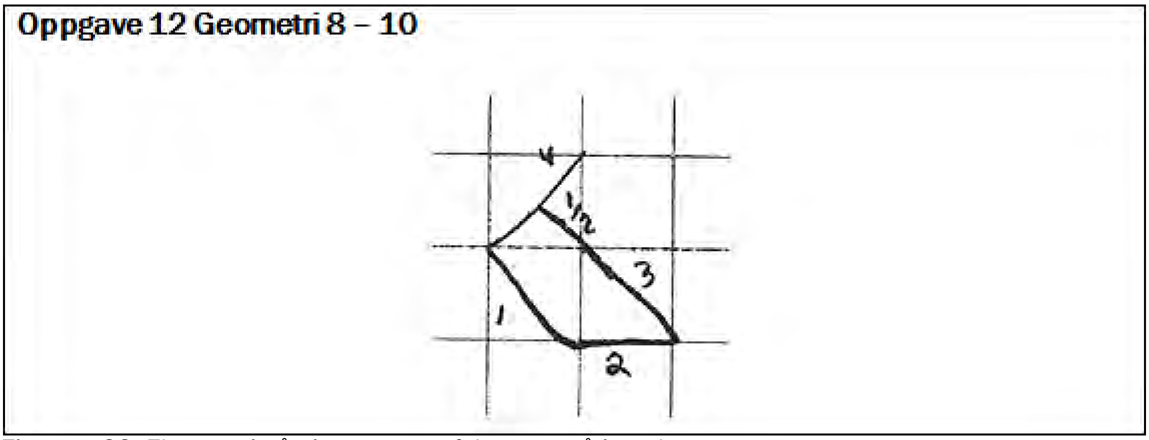


Elevsvar 22: Eksempel på vansker med å tegne en halv rute

Generelt finner vi to hovedtyper av feil i elevsvarene:

- svar som betrakter lengde i stedet for areal
- svar som fokuserer på form

Elever som fokuserer på lengde, tegner en lukket eller åpen figur som de forsøker å få til å bli 4,5 cm eller 4,5 ruter lang.



Elevsvar 23: Eksempel på elevsvar som fokuserer på lengde

I enkelte av besvarelsene kan vi se spor av at elevene har forsøkt flere ganger, det er vanskelig å tegne en lukket figur som har en bestemt omkrets. Enkelte elever har løst dette ved å tegne en figur med areal 1,5 ruter (cm^2). Andre elever har gitt opp å følge rutenettet og har prøvd seg fram til de har funnet en figur som er noenlunde ”riktig” etter deres forståelse.

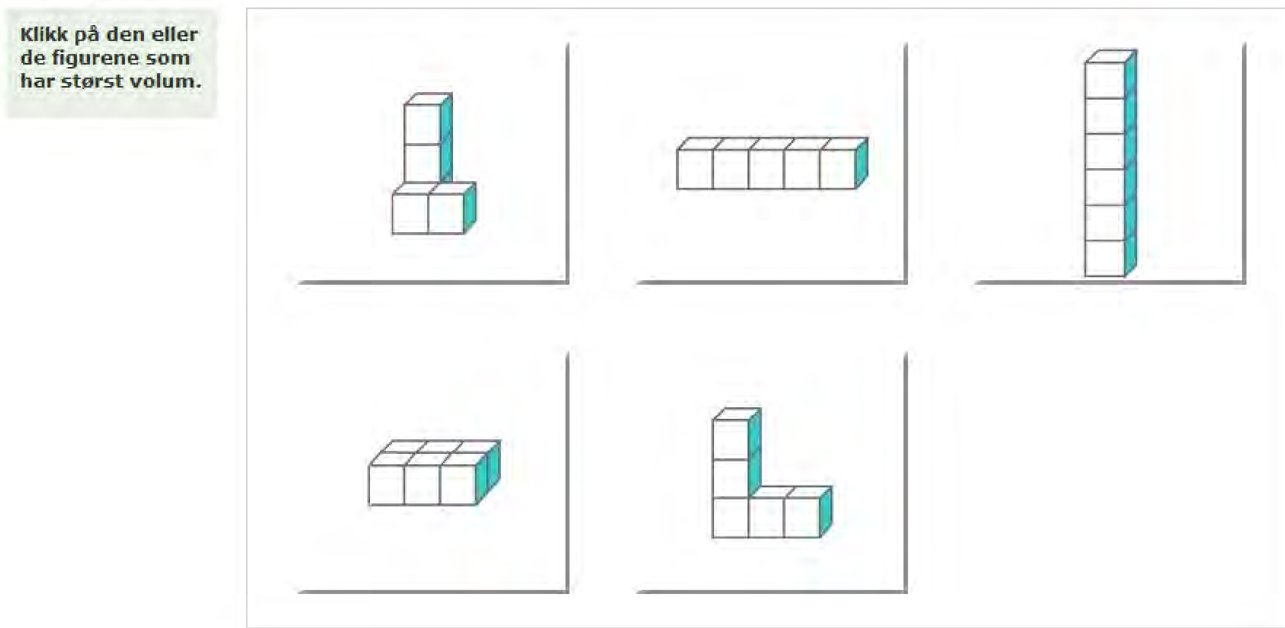
Noen elever har tegnet en åpen figur, en linje som de har gitt riktig lengde. Vi finner også elever som med stor flid har forsøkt å kopiere formen på figuren i oppgave 11. Noen av elevene løser dette ved å forminske figuren, mens andre tegner den like stor.

4.2 Volum

Det er bare en oppgave i de læringsstøttende prøvene for *Geometri* som undersøker elevenes oppfatning volumbegrepet. I tillegg til oppgavene innenfor *Geometri* henvises det til oppgavene med tilhørende veiledning for *Måling*.

Oppgave 11 Geometri 5 – 7 nedenfor er en enkel oppgave, der vi ønsker å se om elevene teller antall terninger i tårnene, eller om de ser terningsider, bredden på tårnet eller bruker andre kriterier som ikke forteller hvor stort volum figuren har. Ordet volum er brukt i oppgaveteksten. I den digitaliserte versjonen av denne oppgaven skal eleven bare klikke på den eller de figurene som har størst volum uten at de er merket med bokstaver.

Oppgave 11



Oppgaveeksempel 25: Oppgave 11 Geometri 5 – 7

Oppgave 11 Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	5
Krysset av for både figur C od D **(Riktig svar)**	59
Krysset av for bare figur C	17
Krysset av for bare figur D	6
Krysset av for figur B og C	2
Krysset av for B, C og D	1

Tabell 40: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 Geometri 5 – 7.

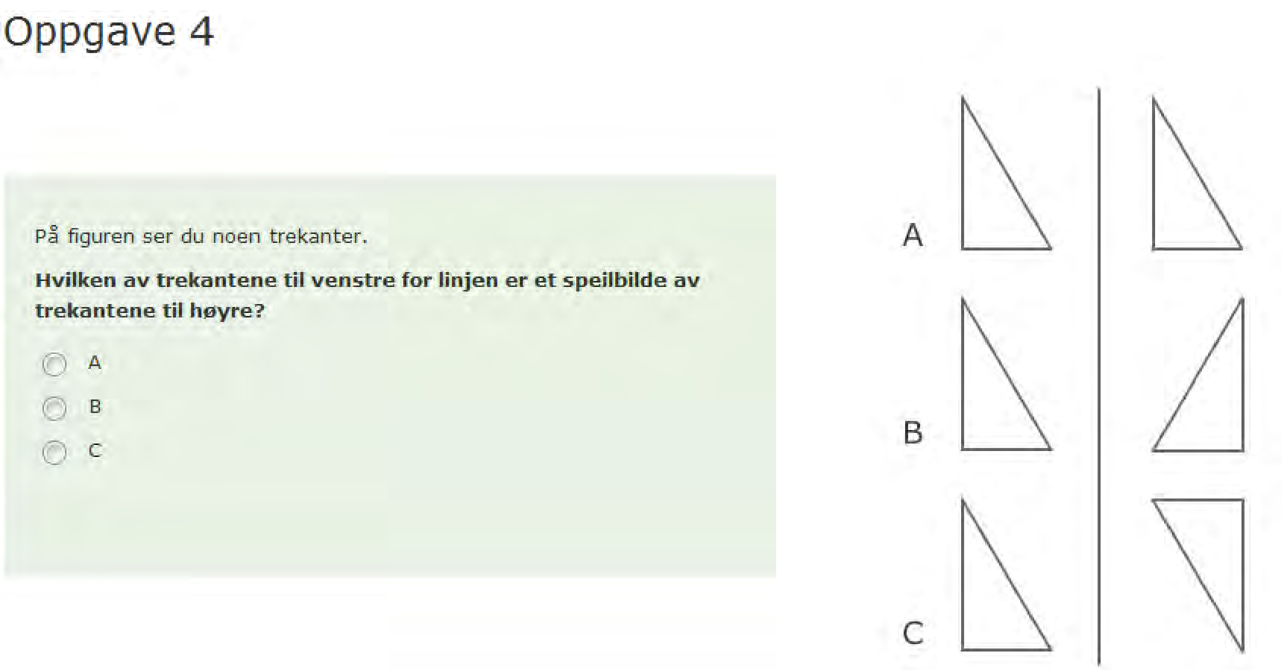
To av "tårnene" har samme volum, seks klosser, mens de tre andre har volumet 5.
59 % av elevene har krysset av for begge figurene med volum 6. Blant dem som krysser av for bare en av disse, er det et klart flertall for figur C.

Kapittel 5 Tema IV: Speiling, symmetri, rotasjon og mønstre

I dette kapitlet vil vi diskutere elevenes forståelse av speiling, symmetri og rotasjon. Videre vil vi drøfte mønstre i noen grad. Når det gjelder å arbeide med mønstre, henviser vi til kapitlet om undervisningsaktiviteter. Koordinatsystemet blir tatt opp i forbindelse med at vi omtaler rotasjon om et punkt.

5.1 Speiling

I oppgave 4 Geometri 5 – 7 og oppgave 7 Geometri 8 – 10 nedenfor ønsker vi å undersøke om elevene skiller speiling fra rotasjon og parallellforskyvning. Det kan være naturlig å se tilbake på elevens besvarelse av denne oppgaven når vi senere studerer de svarene eleven gir på de mer omfattende oppgavene om speiling.



Oppgaveeksempel 26: Oppgave 4 Geometri 5 – 7 og oppgave 7 Geometri 8 – 10

Oppgave 4 Geometri 5 – 7 Oppgave 7 Geometri 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	0	0
Figur B (Riktig svar)	74	82
Figur A	12	9
Figur C	6	4
Figur B og A	4	1
Figur B og C	2	2

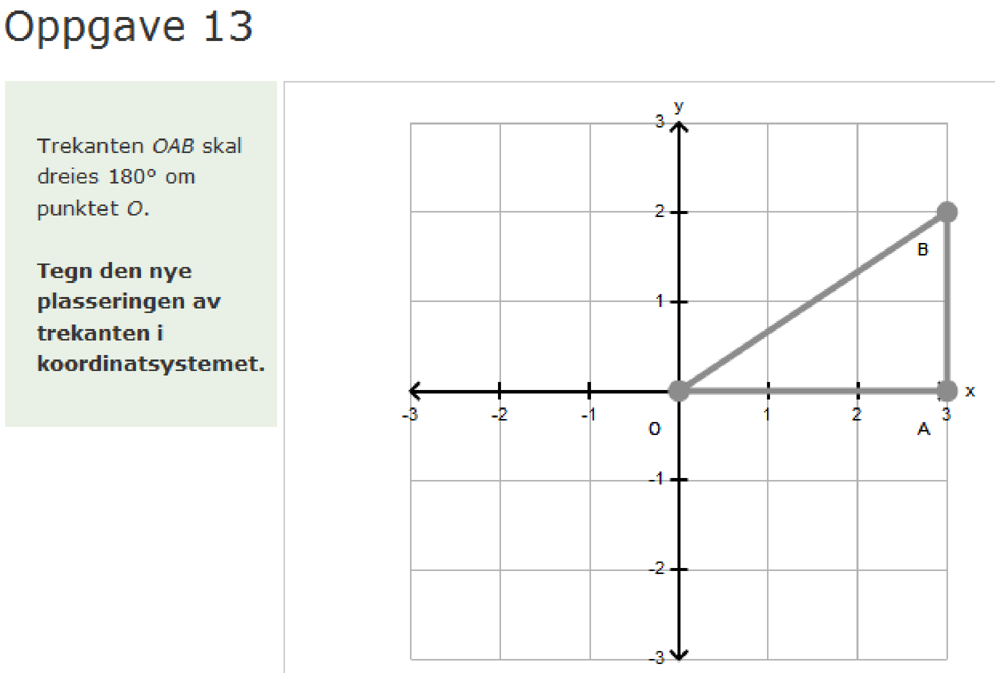
Tabell 41: Prosentvis fordeling. Oppgave 4 Geometri 5 – 7 og oppgave 7 Geometri 8 – 10.

Vi ser at de fleste elevene kan identifisere hvilken av figurene som viser en speiling. Videre legger vi merke til at det er vanligst å forveksle parallellforskyvning med speiling. Noen av elevene krysser også av for begge disse alternativene.

Det er altså noen elever som er usikre på hva speiling innebærer. I oppgaven brukes ordet ”speilbilde”. Dette ordet er et kjent uttrykk for de fleste elevene fordi det brukes ofte i dagliglivet. Innholdet i den dagligdagse bruken av ordet og den matematiske betydningen ligger nær opp til hverandre. Hovedforskjellen ligger i den mer presise definisjonen av det matematiske innholdet.

5.2 Rotasjon

I de læringsstøttende prøvene i Geometri er det med bare en oppgave som undersøker elevenes forståelse av rotasjon, oppgave 13 Geometri 8 – 10.



Oppgaveeksempel 27: Oppgave 13 Geometri 8 – 10

I denne oppgaven skal elevene tegne inn den nye plasseringen av trekanten. For å kunne plassere trekanten riktig må de kjenne til hva som ligger i det matematiske begrepet rotasjon. De må også vite hva det vil si å dreie en 180 graders vinkel. Det er rimelig å anta at koordinatsystemet i oppgaven kan skape vansker for en del elever, men samtidig er det enklere å tegne en nøyaktig figur når vi har gitt et rutenett.

Oppgave 13 Geometri 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	28
Korrekt tegnet figur, dreid 180°	20
Figuren er speilt om y-aksen	19
Figuren er speilt om x-aksen	3
Figuren er parallellforskjøvet	4
Elevene forlenger linjen OB, men tegner ingen ny figur	4

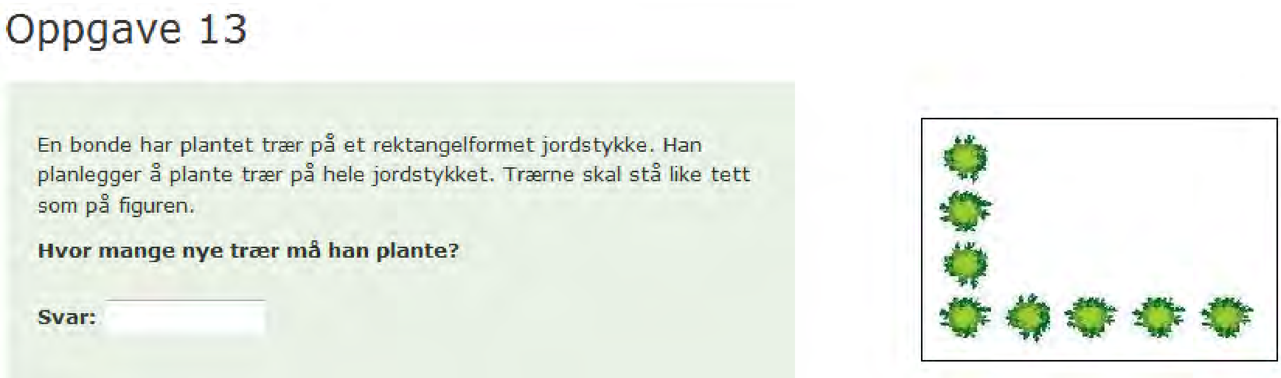
Tabell 42: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 Geometri 8 – 10.

Blant de elevene som speiler figuren, er det mest vanlig å speile om y-aksen. Disse elevene har vist at de har en godt utviklet ide om hva det innebærer å speile i en linje. Mange av disse elevene bruker den samme strategien i denne oppgaven når de skal rotere, trolig fordi de ikke vet hva det vil si å dreie denne trekanten. Noen få elever parallellforskyver figuren. Den er ofte flyttet ned i tredje kvadrant. Dette kan indikere at de har en ide om hva en 180 graders rotasjon vil føre til.

5.3 Mønstre

Det er bare én oppgave om mønstre i de læringsstøttende prøvene for Geometri. Vi vil anbefale at lærerne lar elevene arbeide med mønstre ved å bruke fliser og brikker. Se også aktivitetene i del 2 i denne veiledningen.

I oppgave 13 Geometri 5 – 7 nedenfor skal elevene fullføre et mønster bestående av rader og kolonner.



Oppgaveeksempel 28: Oppgave 13 Geometri 5 – 7

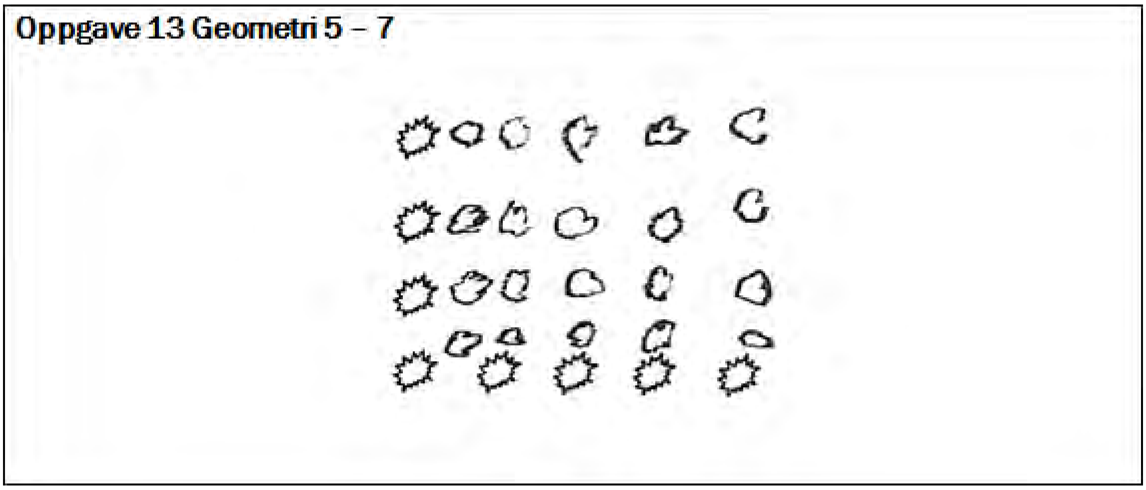
Oppgaveteksten forteller ikke hvordan svaret skal gis. Besvarelsene viser at mange har tegnet inn flere trær i tillegg til å oppgi et tallsvar, men det er også mange elever som bare gir et tallsvar.

Oppgave 13 Geometri 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
12 (Riktig svar)	59
20	12
8	5
16	4
6	4

Tabell 43: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 Geometri 5 – 7

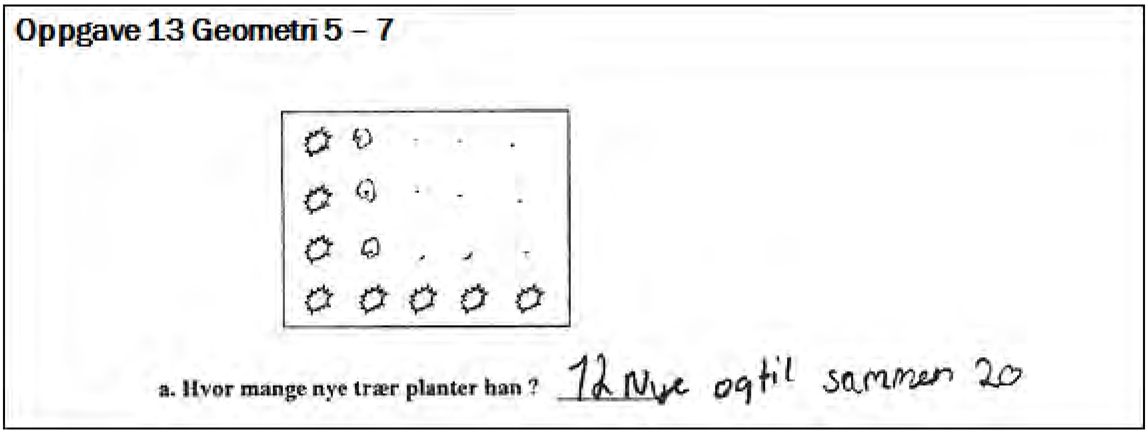
Det kan være at elever som har tegnet på illustrasjonen av oppgaven i utprøvingen, har ment at dette er svar på oppgaven, da de blir bedt om å forklare hvordan de kom fram til svaret.

En del elever er usikre på hvordan de skal tolke illustrasjonen. Hvor mange trær skal det være i en rad og hvor mange rader? Eksemplet nedenfor viser dette:



Elevsvar 24: Eksempel på elevsvar med 20 trær

Til tegningen har eleven skrevet ”20 trær. Jeg har tegnet nye slik at radene er fylt opp.” Denne eleven har kommer fram til at det må plantes 20 trær, for eleven leser illustrasjonen slik at det skal plantes fire nye rader hver med fem trær. Andre elever har vansker med å tolke teksten selv om de plasserer inn korrekt antall trær:

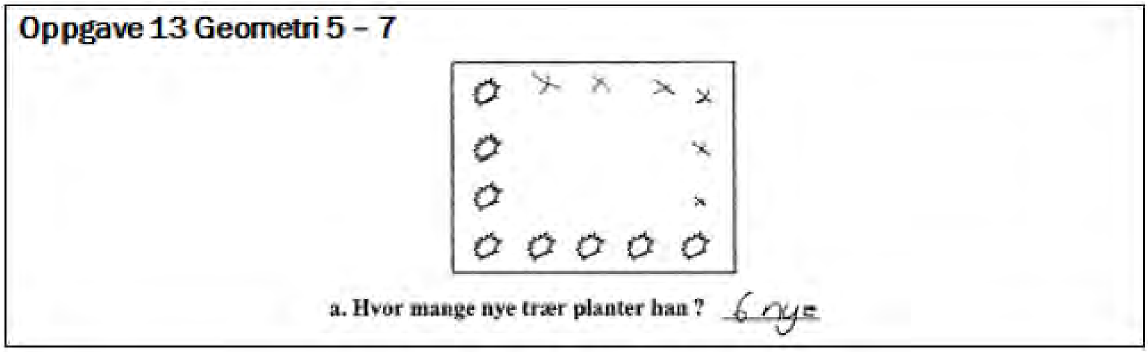


Elevsvar 25: Eksempel på korrekt forklaring

Elevenes forklaringer viser at de ser to ulike løsninger på denne oppgaven, uavhengig av hvor mange trær de mener bonden skal plante. I hovedsak kan vi skille mellom disse tilnærmingene:

- elever som fyller opp jordet med trær
- elever som planter trær rundt jordet

De fleste regner rader med trær, men noen elever er ikke så systematiske, de tegner trær i et vilkårlig mønster eller forsøker å fylle flaten med så mange trær som mulig.
Det er også noen som leser illustrasjonene slik at de fortsetter å plassere trær langs rader på jordet. Det er noe varierende i hvilken grad elevene lar antall trær som plasseres på de ulike sidene, stemme overens med antallet som allerede er tegnet inn. Når elevene lager et mønster som visuelt sett tilpasses illustrasjonen i oppgaven, kan dette skyldes at det tolker illustrasjonen, ikke oppgaveteksten, for å finne ut hva de skal gjøre.



Elevsvar 26: Eksempel på svar der elevene "rammer inn" jordet med trær

Så eksempler på at elevene forsøker å tegne flest mulig trær. Teksten er ikke satt i sammenheng med illustrasjonen. Noen elever tegner antall trær de tror er riktig.

Hos de elever som mener at det er nødvendig med 12 nye trær, finner vi fire ulike strategier:

- eleven har tatt utgangspunkt i antall rader og antall trær per rad, slik det er vist i illustrasjonen, og bruker uttrykk som for eksempel $5 \cdot 4 - 8$
- eleven stiller opp enkle regneuttrykk for å regne ut antall trær som skal plantes, i hovedsak $3 \cdot 4$, uten av eleven forklarer hvordan en har kommet fram til regneuttrykkene.
- Forklaringer som viser ulike tellestrategier inklusive det å fullføre tegningen og telle på den
- Påstander som "jeg ser det"

Det er vanskelig ut fra elevtekstene å se hva elever som kommer fram til at det trengs 20 trær, har tenkt. Disse tekstene er ofte svært knappe, ofte bare et oppstilt regneuttrykk:

- $5 \cdot 4$, som regel uten noen forklaring som forteller eleven har stilt opp dette regneuttrykket
- Påstander som "jeg telte"

Vi finner også svar der elevene har fylt opp jordet med trær og kommet fram til et annet antall enn 12 eller 20 trær. Ofte virker det som disse elevene har tegnet inn de nye trærne vilkårlig, og det kan være vanskelig å finne et mønster eller en sammenheng

Oppgave 13 Geometri 5 – 7 Forklaringer	6. årstrinn
Ubesvart	7
12 trær: Et uttrykk som tar utgangspunkt i antall rader og antall trær per rad	6
12 trær: $3 \cdot 4$	15
12 trær: Tellestrategier	27
12 trær: "Jeg ser det"	4
20 trær: $5 \cdot 4$	9
20 trær: "Jeg telte"	2

Tabell 44: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 Geometri 5 – 7. Forklaringer 12 og 20 trær

Elever som tenker seg at de planter en krans av trær, kan ha stolt for mye på inntrykket de får av illustrasjonen i oppgaven. Mange av disse elevene har tegnet trærne de ser for seg. Noen skriver tekst der de forsøker å forklare hvorfor det må være et visst antall trær. Elever som forklarer hvorfor det må være åtte eller 16 trær, bruker samme modell. Noen legger til åtte nye trær, mens andre også teller med de trærne som allerede er plantet.

Del 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av ulike geometriske begreper. Analysen og diskusjonen av disse vanskene og misoppfatningene har stått sentralt i del 1 av denne veiledningen.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på flere ulike måter i undervisningen. Det er viktig at de feil elevene gjør og de misoppfatningene de har brukes på en konstruktiv måte. Diskusjoner av ideene som knytter deg til begrepene, og tid til å reflektere over det en gjør, står sentralt i denne arbeidsmåten. De fleste av aktivitetene er laget med dette som siktemål.

Noen vanlige misoppfatninger hos elevene innenfor *Geometri*:

- Høyden i en trekant ligger alltid inne i trekanten
- Firkanter og deres mange navn
- Forveksler omkrets og areal
- Vinkelbegrepet
- Parallellitet

Kapittel 6 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.*

Tradisjonell undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil lærere assosiere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Det å be barn presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og at disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte elev.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere disse. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor blir det pekt på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klasser.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det uforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er riktig eller feil. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist har vist at klasser gjør det klart bedre på prøver når læreren ikke for tidlig prøver å ”avslutte” diskusjonene med å peke på riktige svaret eller på den riktige måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det riktige tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som

- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta,
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte eleven som snakker,
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn,
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer.

”Hør hva Anne sier.” ”Tak Helge! Nå, hva mener du, Marit?” ”Hvordan reagerer du på det, Åse?” ”Er det andre ideer her?” ”Kan du gjenta det du sa, Petter?”

2 Noen ganger være en ”utspørrer ” eller ”provokatør” som

- introduserer en ny ide når diskusjonen er laber,
- følger opp et synspunkt,
- spiller ”djevelens advokat”,
- fokuserer på et viktig begrep,
- unngår å spørre multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar.

”Hva ville skje dersom ...?” ”Hva kan du si om svaret, når du multipliserer to tall?”

3 Ikke være en dommer eller ”vurderer” som

- vurderer hvert svar med ”ja”, ”godt” eller ”interessant” eller lignende. Slikt hindrer ofte andre fra å komme fram med alternaive ideer og oppfordrer til en ”ytre akseptabel” framførelse i stedet for en utforskende samtale.

Læreren bør unngå uttrykk som ”Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene.” ”Du er nesten framme.” ”Ja, det er riktig.” ”Nei, du skulle ha sagt …” ”Kan noen se hva som er feil med det Gunnar sier?”

Denne listen er ikke ment å vise at det alltid er upassende å evaluere et elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med ”spørsmålsgjetting”, der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende samtale, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, forlater elevene timen argumenterende og tenkende.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, så kan disse ta mange former og ha ulike formål. Det vil for eksempel være forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der en skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når en har arbeidet en med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor vil vi peke på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger vil det være spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsninger de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å avdekke misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som:

- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? (En kan så vel sammenligne på tvers av oppgaver som elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor.

Kapittel 7 Oppbygging av geometrisk kunnskap: van Hiele-nivåer

Ekteparet van Hiele arbeidet ved en montessoriskole i Nederland. I sin forskning fokuserte de på nivåer i geometriske aktiviteter. Pierre van Hiele formulerte strukturen med nivåene og prinsippene for hvordan elevene utvikles med hensyn til geometrisk tenkning.

Ifølge van Hiele er det slik at elevene gjennomgår fem nivåer under utviklingen i sin forståelse av geometri. Hver elev må utvikle sin tenkning fra ett nivå til det neste i rekkefølge, en kan ikke nå opp til et bestemt nivå uten å ha gjennomgått de tidligere nivåene.

Nivå 0
Eleven gjenkjenner navn, kan sammenligne og sortere geometriske figurer etter utseendet (for eksempel ulike typer firkanter, vinkler, kryssende eller parallelle linjer osv.)

Nivå 1
Eleven kan gruppere og analysere geometriske figurer ut fra egenskaper / deler og forhold mellom egenskaper og deler, og oppdager empirisk egenskaper og regler til en gruppe geometriske figurer (eleven bruker bretting, måling, rutenett, gitter eller diagram).

Nivå 2
Eleven sammenligner og setter sammen tidligere oppdagede egenskaper og lager nye regler.

Nivå 3
Eleven beviser teoremer deduktivt og etablerer sammenhenger mellom nettverk av teoremer.

Nivå 4
Eleven etablerer teoremer i ulike postulatsystemer og analyserer og sammenligner disse systemene.

Nivåene er karakterisert ved eksempler på denne måten:

- På nivå 0 er objektene geometriske figurer
- På nivå 1 opererer eleven med objekter som er klasser av figurer, og oppdager egenskaper som tilhører disse klassene
- På nivå 2 er det egenskapene til klassene som er objekter. På dette nivået foregår en logisk systematisering av disse egenskapene
- På nivå 3 er det systematisering av sammenhenger som er objekter
- På nivå 4 er det begrunnelser for systematisering av sammenhenger som er objekter

I grunnskolematematikken utvikles de tre laveste nivåene hos elevene, og det er spesielt disse nivåene læreren må legge til rette for i undervisningen. I de tre situasjonene som er beskrevet, er utgangspunktet en aktivitet der elevene har ark med ulike typer firkanter. Firkantene har ulike orientering. Elevene må klippe ut fra firkantene før de kan arbeide videre med å sortere og systematisere dem.

Nivå 0
På nivå 0 er det de konkrete utklippede figurene som er objekter. Eleven ser og erfarer de konkrete figurene som ligger på pulten. Når eleven uttaler seg om det geometriske i situasjonen, er det på grunnlag av dem og ikke andre tenkte figurer med de samme geometriske egenskapene. Eleven sorterer figurene ved å se på dem og sammenligne. Når

eleven skal argumenterer for hvorfor to figurer hører til samme klasse, tyr han til argumenter som "Kvadratene er like fordi de ser like ut."

Nivå 1

På det neste nivået beveger eleven seg ut over de konkrete figurene; her er objektene kategorier for figurer som for eksempel kvadrater og rektangler. Elevens tenkning er karakterisert ved han gjenkjenner egenskaper og det som karakteriserer de ulike kategoriene. For eksempel kan eleven ha utsagn som

"I et kvadrat
- er det fire sider
- er alle vinklene rette
- er alle sidene kongruente eller like lange
- er motsatte sider parallelle"

Nivå 2

Nivå 2 er sannsynligvis det høyeste nivået en elev vil nå i løpet av grunnskoletiden. Mange elever stopper opp på nivå 1, og enkelte elever strekker seg ikke utover nivå 0. På dette nivået har eleven klart for seg hvilke nødvendige egenskaper som karakteri-serer de ulike kategoriene. Elevens tanker er strukturerte ved at han/hun kan formulere logiske sammenhenger mellom egenskaper og sette opp uformelle forklaringer. Eleven kan for eksempel sette opp nødvendige egenskaper ved et parallellogram og bruke disse egenskapene til å bestemme hvilke av de andre firkantene som tilfredsstiller disse betingelsene, og som derfor hører til gruppen parallellogram – selv om de til daglig betegnes med et annet "navn" (for eksempel kvadrat).

Van Hiele påpeker også at hvert nivå har sitt eget sett av symboler og sett eget språk. En sammenheng som er korrekt på ett nivå, kan være feil på et annet nivå. Tenk for eksempel på forholdet mellom et kvadrat og et rektangel. To personer som resonnerer på hvert sitt nivå, kan ikke forstå hverandre. Ingen av dem kan følge den andres tankeprosess.

Språk og språkstruktur er en kritisk faktor når eleven arbeider seg oppover i van Hiele-nivåene – fra konkrete strukturer (nivå 0) via visuelle geometriske strukturer (nivå 1 – 2) til abstrakte strukturer (nivå 3 – 4). van Hiele vektlegger betydningen av å bruke språket i undervisningen. Blant annet hevder han at i mange situasjoner der elevene har vanskeligheter, skyldes det at læreren bruker et språk som ligger på et høyere nivå enn det eleven forstår. Lærerens språk mangler innhold på grunn av nivået som eleven befinner seg på.

Et viktig trekk ved van Hieles teori er at framgang fra ett nivå til det neste er avhengig av instruksjon. Erfaring med ulike typer av undervisningsopplegg påvirker denne framgangen. Det er også mulig at visse undervisningsmetoder hindrer framgang mot neste nivå. For eksempel kan det være slik at eleven får seg forelagt egenskaper for rektangler og pugger dem utenat i stedet for å oppdage disse egenskapene selv, eller eleven bare "kopierer" et bevis i stedet for å utvikle det selv eller i det minste tilføre noe resonnementer til beviset. van Hiele presiserer også at det er mulig å presentere undervisningstoff som ligger over den aktuelle elevens nivå. Ifølge van Hiele er det slik at framgang fra ett nivå til det neste har fem faser:

1) Informasjon
2) Tilrettelagt orientering / instruksjon
3) Forklaring
4) Fri orientering / instruksjon
5) Integrasjon

Fasene kan beskrives slik:

1) Informasjon
Eleven gjøres kjent med eller blir orientert om emnet eller temaet som han skal arbeide med (undersøker eksempler og ikke-eksempler)

2) Tilrettelagt orientering / instruksjon
Eleven utfører oppgaver som involverer ulike sammenhenger innenfor det emnet han skal arbeide med eller utvikle/utforme (bretter, måler, ser etter symmetri).

3) Forklaring
Eleven bevisstgjøres om sammenhenger – prøver å utrykke dem i egne ord og lærer seg de begreper og symboler som er involvert i det aktuelle emnet (utnytter ideer om egenskaper ved figurer).

4) Fri orientering / instruksjon
Ved å gjøre flere sammensatte oppgaver lærer eleven å finne sitt eget system i et nettverk av relasjoner (kjenne til egenskaper for en kategori av former og undersøke disse egenskapene i forhold til en ny form, for eksempel trapes).

5) Integrasjon
Elevene oppsummerer alt de har lært om emnet, for deretter å reflektere over egne handlinger og oppnå en oversikt over det nye nettverket av sammenhenger som er tilgjengelige (oppsummering av egenskapene eller karakteristikkene ved en figur).

7.1 Karakteristiske trekk ved van Hiele-nivåene

- Nivåene er sekvensielle
- Hvert nivå har sitt eget språk, sett av symboler og nettverk av sammenhenger
- Det som er implisitt på ett nivå, er eksplisitt på det neste nivået
- Temaer og emner som det undervises i over det nivået er på, kan bli redusert til elevenes nivå
- Framgang fra ett nivå til det neste er mer avhengig av gjennomført undervisning eller tilrettelagte instruksjoner enn av alder og biologisk modenhet
- Elevene gjennomgår flere ulike faser på veien fra ett nivå til det neste

Med bakgrunn i Piagets biologiske aldersrelaterte teori for kognitiv utvikling bygger van Hieles teori på relevant instruksjon. Eleven kan ikke tilegne seg innsikt på et visst kognitivt nivå uten at underliggende nivåer er forstått. Det blir derfor viktig for læreren å planlegge undervisningen i geometri på en slik måte at han/hun legger til rette for aktiviteter på ulike nivåer, siden elevene i klassen befinner seg på ulike nivåer.

Kapittel 8 Undervisningsaktiviteter

Dette kapitlet inneholder en del aktiviteter som er rettet mot de problemene som er tatt opp i del 1 av denne veiledningen. Hver aktivitet må ses på som en idé for videre utarbeiding og er ikke ment å være et fullstendig opplegg. Vi har forsøkt å gå noe i dybden på de ulike aktivitetene i stedet for å forsøke å dekke alle temaer som kan tenkes å trekkes fram i geometri.

8.1 Å beskrive og kommunisere geometriske objekter

8.1.1 Firkanter - ungdomstrinnet

Felles for disse aktivitetene er at elevene kan arbeide med dem på ulike nivåer, og at de er lagt til rette slik at elevene kan utvikle sin forståelse av geometri.

I aktivitetene må elevene få muligheten til å

- først sortere på grunnlag av det en kan se (hva ser ut til å høre sammen?)
- analysere og lage enkle regler om generelle felles trekk
- sette opp regler som entydig beskriver objektet en arbeider med
- formulere sammenhenger og utvikle systemer

Under aktivitetene er det viktig at elevene hele tiden får anledning til å uttrykke sine ideer verbalt, at de får fortelle om og beskrive det de ser og finner ut. En annen mulighet er at elevene skriver ned disse sammenhengene. Elevene må få bruke språket til å fortelle og forklare.

Målet med disse aktivitetene er å legge til rette for undervisning der elevene kan utvikle sin geometriske tenkning, og der de kan utvikle t redskap for å argumentere for og analyse geometriske sammenhenger. Elevene vil også få kjennskap til egenskaper ved ulike geometriske figurer – ulike firkanter.

Aktivitetene kan være tidkrevende og må gå over flere undervisningstimer (alle matematikktimene i to uker). Ønsker læreren å utvikle tenkning på nivå 1 og 2 hos elevene, må de få tid til å utvikle seg. Da må læreren legge til rette for situasjoner i klasserommet der elever undersøker sammenhenger og verbaliserer dem. Dette kan ikke påskyldes av læreren, men det er læreren som legger til rette for elevenes utvikling gjennom valg av undervisningsaktiviteter.

Aktivitet 1
Elevene får utdelt ark som det er tegnet mange ulike firkanter på. Læreren kan legge til eller fjerne figurer. Det er viktig at det er mange av hver type, og at de har ulik størrelse og orientering. Læreren kan tegne ulike kvadrater, rektangler, trapeser, parallellogrammer og "drager" (*kite* på engelsk). Elevene kjenner begrepene kvadrat og rektangel fra undervisningen på barneskolen, men de vil ofte bedømme figurene på dette grunnlaget:

- Dette er et rektangel fordi det ser ut som et rektangel.
- Dette er et rektangel fordi to sider er lengre.

Hensikten med aktiviteten er å få elevene til å tenke på og arbeide med figurenes egenskaper i stedet for å bedømme dem visuelt. Samtidig ønsker en å hjelpe elevene til å skille mellom hva ulike egenskaper betyr rent matematisk.

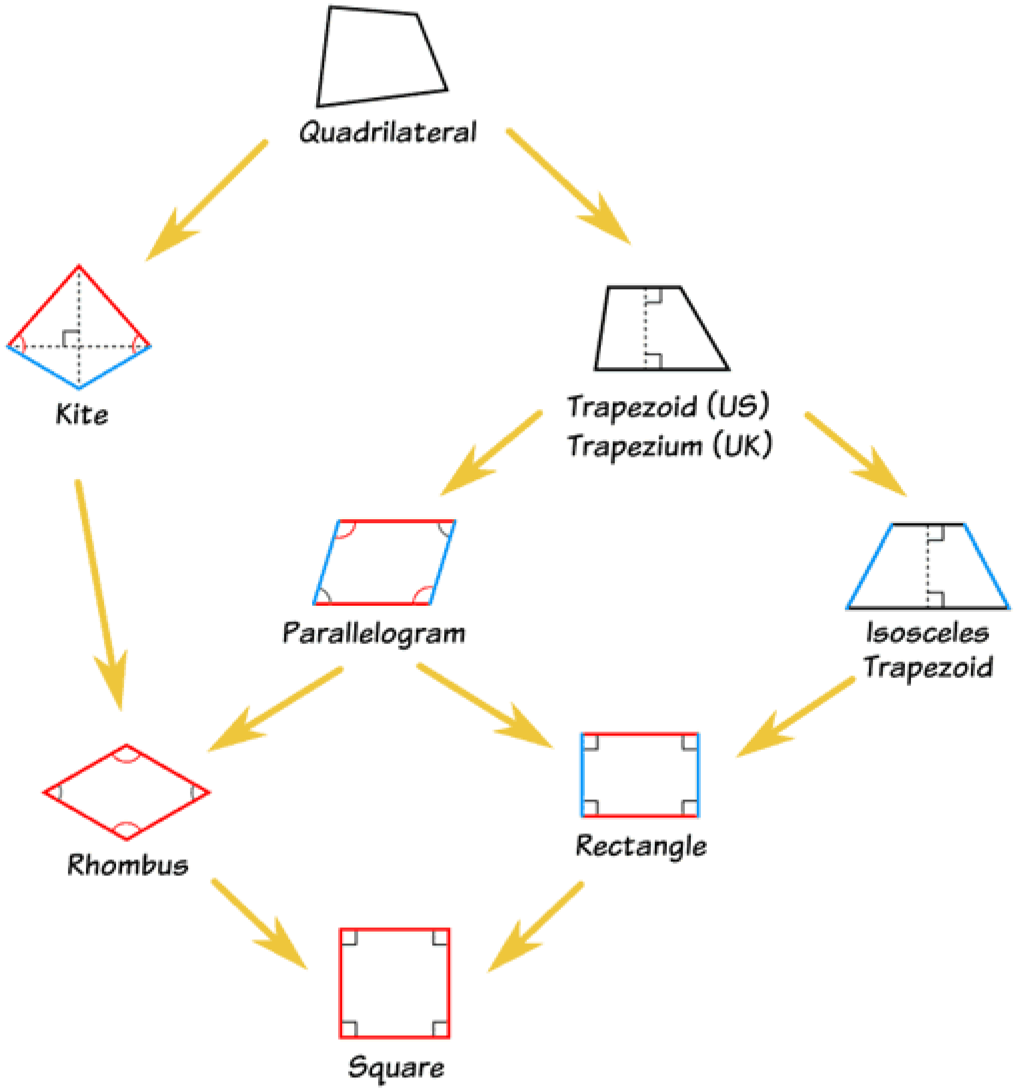
Elevene blir bedt om å klippe ut og sortere firkantene. De vil ha ulike strategier for å gjøre dette. Noen vil sortere figurene i hauger, slik at figurer som ligner på hverandre, komme i samme haug. Dette er elever som vil få flere grupper av figurer. Kanskje vet elevene at en av haugene er kvadrater og en annen er rektangler, uten at de kan forklare nærmere hvorfor. Elevene argumenterer med at figurene ligner på hverandre, derfor hører de til samme gruppe.

Enkelte elever vil sortere i kvadrater, rektangler og resten. Også disse elevene bruker en form visuell bedømming sorterer ut figurer som ligner på hverandre. Enkelte elever bruker egenskaper ved figurene for å skille mellom dem og sortere dem i grupper. Noen elever sorterer i to hauger: figurer med rette vinkler og figurer som ikke har rette vinkler. En kan også finne elever som sorterer figurene i grupper etter hvor mange parallelle sider figurene har. Disse elevene vil sortere kvadrater og rektangler i samme bunke.

Det må stilles krav til at elevene skal forklare hvorfor de har sortert i de gruppene de har valgt. Elevene bør skrive ned argumentene sine først. Siden kan læreren gå gjennom de ulike grupperingene i plenum i klassen. Det vil være en fordel å ha kopiert figurene over på overhead eller lignende slik at elevene kan vise fram for de andre i klassen hvilke figurer som de mener hører sammen, og forklare hvorfor de mener at disse utgjør en gruppe.

Det er en fordel for elevene om de arbeider i par i denne økta. Da har de noen å diskutere med og prøve ut formuleringer på, ved siden av at det er enklere å stå foran klassen og forklare hvorfor de har valgt den aktuelle grupperingen.

Det er viktig at en har et åpent og inkluderende klima i klassen. Læreren bør også gjøre det klart for elevene at en kan gruppere firkantene på ulike måter, og at han/hun ønsker å få fram flest mulig av disse måtene. Da unngår vi at en gruppering får merkelappen ”korrekt” og en annen blir ”feil”.



Figur 1: Ulike typer firkanter med engelske betegnelser

Aktivitet 2

Klassediskusjon: Hvilken inndeling er hensiktsmessig? Hvordan kan vi beskrive firkantene som hører til denne gruppen, slik at vi beskriver dem best mulig?

Elevene har en tendens til å ramse opp flest mulig egenskaper. Dette kan vi godt oppmuntre til. Det vil være en fordel om elevene formulerer disse listene skriftlig. Etter hvert vil enkeltelever oppdage at noen egenskaper kjennetegner flere grupper. For eksempel vil både kvadrater og rektangler ha to og to parallelle sider og bare rette vinkler. Også parallellogrammet har to og to parallelle sider.

Stiller enkeltelever spørsmål som ”Du lærer, er kvadratet et parallellogram?”, bør vi skrive disse spørsmålene på tavla slik at en kan undersøke dette nærmere senere. Slike spørsmål oppmuntrer elevene til å være analytiske når de undersøker figurene.

En viktig side ved denne aktiviteten er å få elevene til å formulere disse egenskapene slik at de er egenskaper som gjelder *alle* kvadrater, *alle* rektangler osv. Noen elever vil formulere egenskaper som ikke er korrekte, eller som bare er delvis korrekte fordi de gjelder spesialtilfeller. Det er derfor viktig at vi har en felles diskusjon som gjelder alle figurer som hører til gruppen.

Aktivitet 3
Elevene undersøker: Du har en venn som er syk, og som ikke har vært på skolen. Han ringer til deg for å spørre om hva dere har arbeidet med på skolen. Du skal forklare hva et kvadrat er. Hvordan kan du forklare det slik at han ikke kan forveksle kvadratet med en annen figur, samtidig som du nevner så få egenskaper som mulig? Hvor mange egenskaper må du oppgi? Etter at elevene har arbeidet med å finne ut av dette i smågrupper, bør klassen diskutere oppgaven i fellesskap.

Aktivitet 4
Vi undersøker hvilke figurer som er undergrupper av andre figurer. Har elever stilt spørsmål til dette tidligere i perioden, bruker vi disse spørsmålene. Hvis dette ikke er tilfelle, kan læreren stille spørsmål i klassen. Aktuelle spørsmål kan være:

- Kan rektanglet være et parallellogram?
- Er rektanglet et kvadrat?
- Kan kvadratet være et rektangel?

For å besvare dette spørsmålet må eleven bruke figurenes egenskaper og se hvilke som utelukker hverandre, og hvilke som kan tilfredsstille kravene til en annen gruppe. Noen elever vil ikke makte å gjennomføre analyser på et slikt nivå. De vil argumentere på det nivået de befinner seg på, og en kan finne elevsvar som ”Nei, rektanglet er ikke et parallellogram fordi parallellogrammet er skjevt.” Noen få elever vil klare å lage et hierarki over figurene, der de ser hvilke figurer som er spesialtilfeller av andre figurer, men dette krever tenkning på et høyere nivå enn det de fleste elevene er på.

Ønsker vi å gjennomføre aktiviteten på mellomtrinnet, kan vi tenke oss at vi i utgangspunktet arbeider med færre grupper av figurer, og at vi dropper aktivitet 4.

8.1.2 Skjulte objekter

Hvordan kommuniserer vi at et geometrisk objekt er en terning eller en trekant? Svært ofte vil vi vise til en figur eller en tegning. Det kan imidlertid være nyttig å prøve å beskrive geometriske objekter uten at vi kan referere direkte til en billedlig framstilling. Da tvinges vi til å tenke over hvilke egenskaper objektet har, og hvordan vi kan kommunisere disse egenskapene.

En rekke aktiviteter kan knyttes til slike beskrivelser, for eksempel at vi skal beskrive et geometrisk objekt ”over telefonen” til en annen person. Vi skal her ta for oss en aktivitet som kan gjennomføres i klasserommet.

Aktivitet 5 Kjennetegn ved romlegemer

Utstyr
En lukket pappeske som har hull på hver side slik at en kan stikke inn hendene fra hver sin side for å føle på objekter i esken.

Gjenstander til å putte inn i esken kan være kule(ball), terning, tetraeder/pyramide, sylinder, ulike typer av prismer osv.

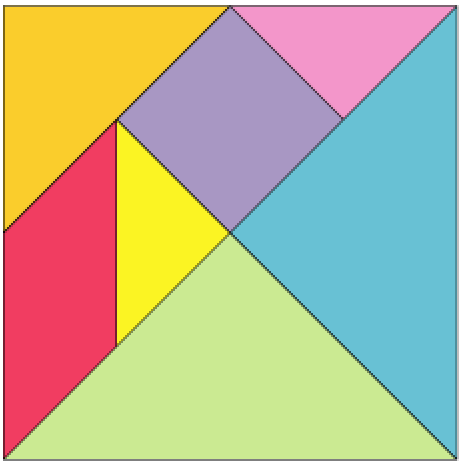
En elev har som oppgave å føle på en gjenstand i esken. De andre elevene i klasse stiller spørsmål etter tur. Elevene som har hendene i esken, skal forsøke å svare på spørsmålene.

Klarer de da å komme fram til hva slags en gjenstand det er? Den eleven som stiller spørsmålet, bør få sjansen til å gjette først. Deretter kan turen gå til andre som måtte ha ideer.

Mer kompliserte gjenstander kan brukes, for eksempel polyedre som terning, prisme, pyramide, tetraeder, oktaeder. Denne aktiviteten kan kombineres med at elevene lager modeller av disse legemene.

8.2 Tangram

Tangram er et gammelt puslespill med uklare historiske røtter. Den tidligste kjente kinesiske boken om tangram er datert 1813, men puslespillet er nok mye eldre enn det. Her er det mange teorier, men vi kan regne med at det senest stammer fra 1700-tallet. Opphavet til ordet tangram er også uklar. Tangram består av sju brikker som til sammen fyller ut et kvadrat:



Figur 2: Illustrasjon av et tangram

En kan få kjøpt tangrambrikker, men det er meget enkelt å lage et sett selv. Det bør være litt tykkelse på den pappen en bruker. Tangrambrikker kan en også lage av rester av finerplater.

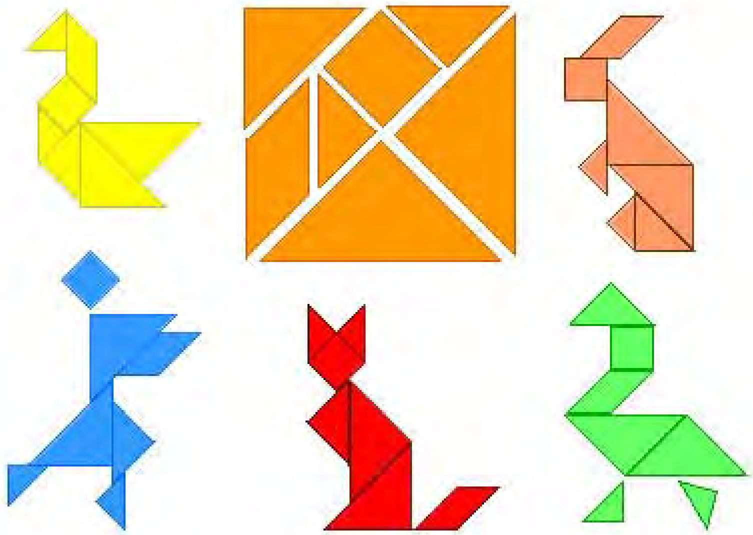
På 1800-tallet ble det stor interesse for tangram i Europa og Amerika, sikkert på grunn av at handelsforbindelsene med Kina ble åpnet. Her bør det nevnes at i 1903 skrev amerikaneren Sam Loyd en "historie" om tangram – The Eighth Book of Tan. Denne boka – som egentlig var fritt oppspinn når det gjaldt de historiske hendelsene – inneholdt over 600 mønstre som kunne legges.

Dette er kanskje den vanligste bruken av tangram: Vi får oppgitt en figur uten at vi ser hvordan brikkene er lagt. Så skal vi finne fram hvordanvi kan legge alle sju (!) brikkene for å danne figuren.

Aktiviteter kan være:

- Prøv å finne figurer ved å bruke alle brikkene (de bør ligne på noe)
- Vi kan lage konkurranser ved å se hvor lang tid en bruker på å lage en bestemt figur
- Prøv om det kan finnes flere løsninger til en figur

Det er ikke vanskelig å finne tangramfigurer. I litteraturlista er det en oversikt over noen bøker som inneholder eksempler på tangramfigurer.



Figur 3: Eksempler på omformet tangramfigurer

Her skal vi imidlertid fokusere på et annet aspekt, nemlig hvordan tangrambrikkene kan brukes i geometriundervisningen. Det er særlig areal og forhold som vil være sentral temaer. I disse aktivitetene vil vi ikke nødvendigvis bruke alle brikkene for å danne figurer. Vi kan gjøre mange beregninger når det gjelder tangrambrikkene, men et aspekt som er viktig når vi arbeider med yngre elever, er at vi kan arbeide med begrepene uten beregninger eller mål. La oss imidlertid først se på noen mål og beregninger som gjelder disse brikkene.

Vi ser at består av fem trekanter, ett kvadrat og ett parallellogram. Alle trekantene er 45-90-45, og vinklene i parallellogrammet er 45-135-45-135. Det er også klart at $\sqrt{2}$ spiller en stor rolle når det gjelder figurenes dimensjoner (hvis vi for eksempel regner med at lengden i kvadratet = 1 lengdeenhet). La oss ta utgangspunkt i at arealet av kvadratet er 1 arealenhet.

Noen betraktninger om areal:

- Hvor stor areal har den største trekanten?
- Hvor stor areal har den mellomste trekanten?
- Hvor stor areal har den minste trekanten?
- Hvor stor areal har kvadratet?
- Hvor stor areal har parallellogrammet?

For eksempel kan vi resonnere slik: De to største trekantene er like store og utgjør til sammen halvparten av kvadratet. Altså har de hver arealet 1/4 . Hvis vi vil unngå å bruke brøk, kan vi ta utgangspunkt i at kvadratet er 16 (sidekant).

Svarene på disse spørsmålene er uttrykt ved enkle brøker, men som nevnt kan vi også knytte aktiviteter til dette som ikke bygger på beregninger. Slike aktiviteter er for eksempel direkte sammenligning av arealer. Ved å legge brikkene på hverandre finner vi:

De to minste trekantene har til sammen like stort areal som kvadratet, og dette er også arealet til parallellogrammet. Altså har kvadratet og parallellogrammet samme areal. Igjen ved å kombinere de to minste trekantene finner vi at de til sammen har like stort areal som den mellomste trekanten. Dette er nok den viktigste bruken av tangrambrikkene.

Aktivitet 6
Ta for deg et kvadrat som har areal lik halvparten av areal til kvadratet som består av alle tangrambrikkene.

Merknad: *Sidekanten i dette kvadratet skal være i forholdet* $\frac{1}{\sqrt{2}}(\approx 0{,}71)$ *til sidekanten i kvadratet med alle tangrambrikkene*.

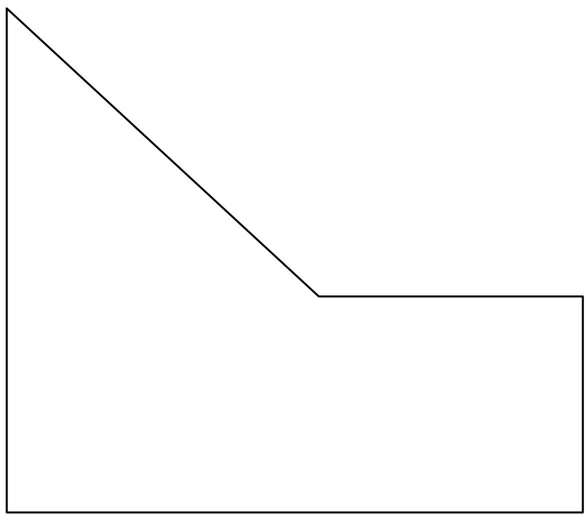
Dekk dette kvadratet med for eksempel:

- to tangrambrikker
- fire tangrambrikker
- fem tangrambrikker

Det er mange mulige aktiviteter som kan utføres med tangrambrikkene. De er kanskje mest aktuelle når det gjelder den mest grunnleggende begrepsdannelsen. For eksempel kan vi utforske figurers form og se hvordan en trekant (eller andre figurer) kan være bygget opp av andre trekanter eller figurer. Vi kan for eksempel undersøke hvor mange måter vi kan dekke en av de største trekantene med andre tangram-brikker på.

Mer avansert bruk knytter seg til arealberegninger. Vi kan stille spørsmålet: På hvor mange måter kan du lage trekanter som har areal $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$? Også i dette eksemplet er det rimelig å tegne opp figurene slik at aktiviteten blir å legge brikker som dekker – som i eksemplet ovenfor. Dette kan vi gjøre slik at det ikke er nødvendig å bruke et uttrykk eller en formel for å beregne arealet. Gjennom aktivitetene får elevene kjennskap til arealbegrepet.

Aktivitet 7
Lag en femkant som er kongruent til femkanten nedenfor. Finn et uttrykk for arealet til den figuren du har funnet.



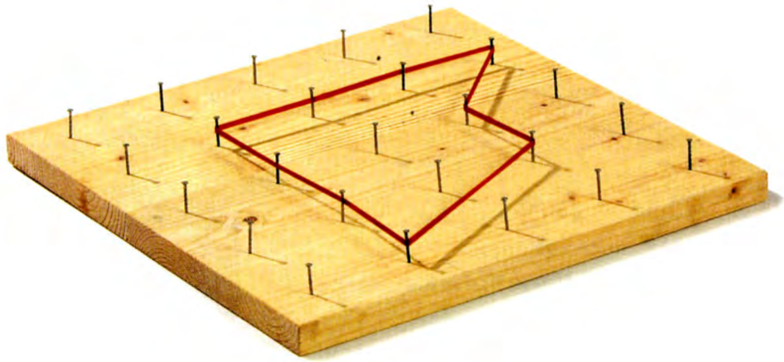
Figur 4: Eksempel på omformet tangramfigur

For eldre elever er det selvfølgelig mange andre typer av aktiviteter som kan være aktuelle. En utvidelse vil for eksempel være å stille spørsmål hvor det kanskje ikke er mulig å lage en figur:

- Er det mulig å lage et parallellogram med areal $\frac{3}{4}$?
- Er det mulig å lage en trekant med areal $\frac{3}{4}$

8.3 Geobrett

Et geobrett er en treplate med spiker, slik det er vist på bildet nedenfor:



Figur 5: Illustrasjon av et geobrett

Avstandene mellom spikrene i alle rader (både på langs og på tvers) er like. De skal danne et kvadratisk mønster. Geobrett kan ha ulike størrelser, men for de fleste formål er det tilstrekkelig med et brett som har 5 x 5 spikrer. Områder og figurer lages (markeres) ved at en strekker strikker (gjerne fargede) mellom spikrene. Det skal ikke være streker på brettet. Derfor bør vi bruke en mal når en spikrer. Det finnes geobrett i salg, men det er enkelt å lage brett som er fullt brukbare.

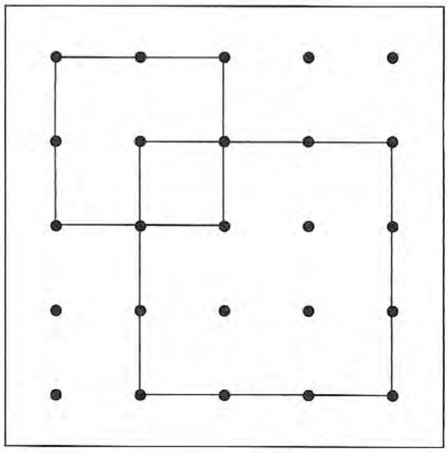
Geobrett kan brukes til en rekke aktiviteter i geometri og enheter. Det primære mål med å bruke brettet er å danne begreper og å gjennomføre geometriske resonnementer. I tilknytning til geobrettet kan vi også tegne på papir med punkter (prikkpapir).

8.3.1Fri eksperimentering på geobrettet

Elevene må bli kjent med brettet og noen av egenskapene. De kan finne fram til forskjellige former på figurer. Det er mulig å ta vare på de figurene som vi kommer fram til, ved å tegne disse på prikkpapir. En aktivitet som gjerne kan gjøres innledningsvis, er å telle opp antall sider og hjørner på de figurene som vi lager.

8.3.2Rektangler (kvadrater) og trekanter

Figurer som vi snart kommer i kontakt med på brettet, er kvadratet og trekanter. Kvadratene er vel de enkleste. Det gjelder særlig kvadratene som har sidene parallelle med kantene på brettet.

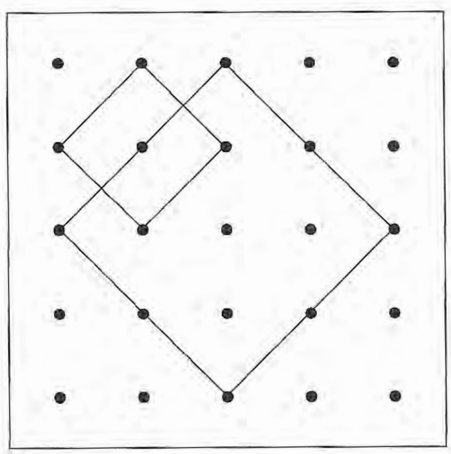


Figur 6: Eksempel på geobrett med firkanter med sidekanter parallelle med kantene på brettet

Aktivitet 8

- Hvilke størrelser kan vi finne på slike kvadrater?
- Hvor mange kvadrater med sidekant 2 (2 x 2-kvadrater) kan vi finne på brettet?

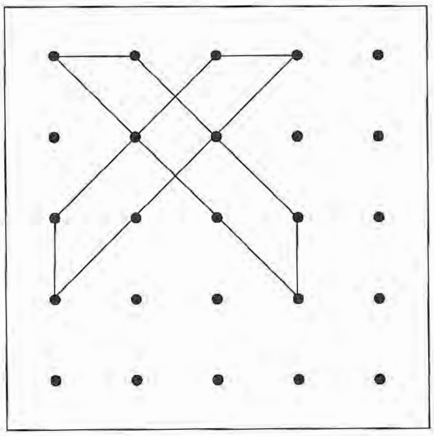
Ved disse og tilsvarende aktiviteter kan vi eksperimentere med kvadrater av ulik størrelse. Videre kan vi la elevene arbeide med større geobrett (prikkpapir) og så stille dem noen av de samme spørsmålene, for eksempel hvor mange 3 x 3-kvadrater vi kan finne på et 7 x 7-brett. Det er også andre kvadrater vi kan komme i kontakt med. På figuren nedenfor er det tegnet inn noen andre kvadratiske figurer.



Figur 7: Eksempel på geobrett med firkanter der sidekantene ikke er parallelle med kantene på brettet

Aktivitet 9
Hvordan kan vi avgjøre om dette er kvadrater? Geobrett er velegnet for å komme fram til arealet av ulike kvadrater. Vi kan ta utgangspunkt i "standardkvadratet", som vi sier har areal lik 1 (arealenhet). Hvor stort blir da arealet av kvadratene i figuren ovenfor?

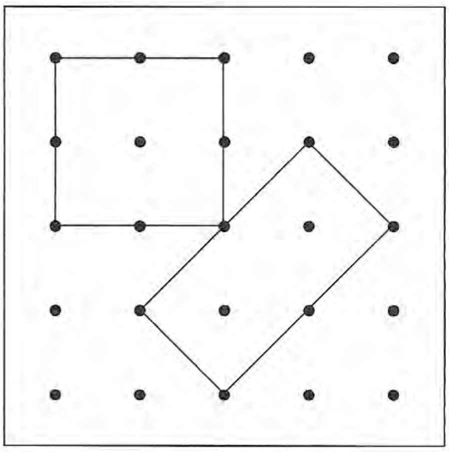
- En utfordrende oppgave kan være å lage et kvadrat med liten (minst) størrelse. Kan vi for eksempel lage et kvadrat med areal lik enheten?



Figur 8: Eksempel på geobrett der en kan utforske areal og omkrets

Forsøk å finne et uttrykk for arealet til kvadratet som framkommer på figuren ovenfor.

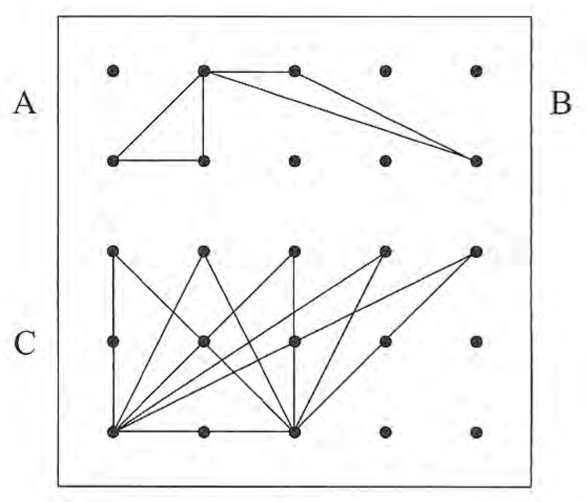
Det er klart at vi kan lage mange rektangler på geobrettet. Areal og omkrets er begreper som kan utforskes. For eksempel, på hvor mange måter kan vi lage rektangler som har areal lik 4 enheter? På hvor mange måter kan vi lage rektangler som har areal 6 enheter? Merk at vi her omtaler kvadrater (også) som rektangler.



Figur 9: Eksempel på en utforskningsoppgave på geobrett

Disse aktivitetene kan bygge opp elevenes begreper om figurers form og areal. Tilsvarende kan vi ha aktiviteter om omkrets.

Aktivitet 10
De samme aktivitetene kan vi også bruke for trekanter:



Figur 10: Eksempel på geobrett med trekanter

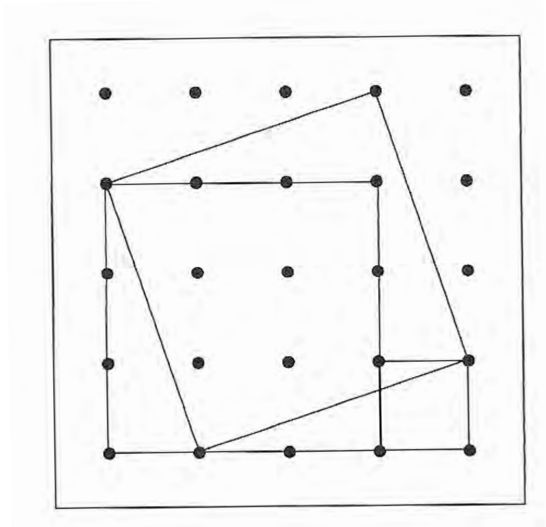
Kan du lage en trekant med areal 3 enheter? En trekant med omkrets på 12 enheter? Og så videre.

- Hvilken av trekantene A og B i figur 10 har størst areal?
- Hvilken av trekantene i C har størst areal?

8.3.3 Å resonnere på geobrettet

Geobrettet egner seg svært godt til å gjennomføre resonnementer om areal og omkrets. Å finne fram til figurer som har like store arealer, kan være en interessant aktivitet.

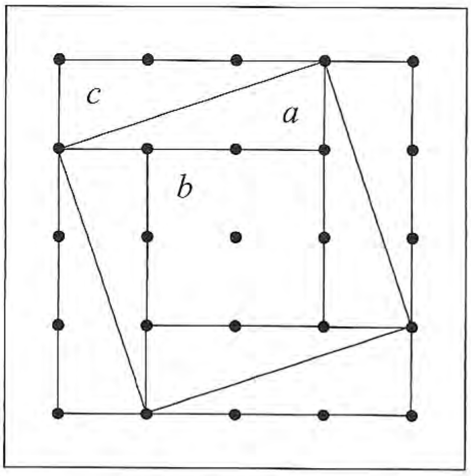
Aktivitet 11
Vis at arealet til de to minste kvadratene til sammen er lik arealet til det store kvadratet.



Figur 11: Eksempel på utforskning på geobrett

Aktivitet 12

Også andre sammenhenger kan utforskes. For eksempel kan Pytagoras´ setning finnes i figuren nedenfor.



Figur 12: Geobrett brukt til å bevise Pytagoras´ setning

La a, b og c være som på figuren.

a = avstanden mellom to ”spikrer” (= 1 lengdeenhet)

b = (3a)

c er diagonalen i rektanglet med sidekanter a og b.

Sidekanten i det ytterste kvadratet er (a + b), arealet er derfor $(a+b)^2$. Arealet til trekanten med sider a, b og c er $\frac{ab}{2}$. Arealet til det minste kvadratet i midten er $(a-b)^2$. Ved å se på arealene kan vi da sette opp:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = (b-a)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

Vi legger sammen og får:

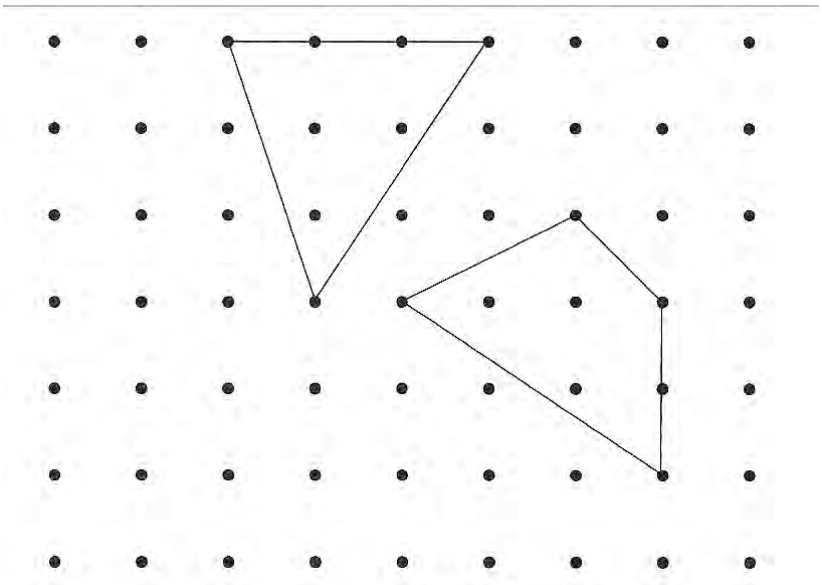
$$2c^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Dette gir altså $c^2 = a^2 + b^2$ (som er Pytagoras).

8.4 Picks formel

Er det mulig å finne en sammenheng mellom areal av en geobrettfigur som en funksjon av antall gitterpunkter på omkretsen og antall gitterpunkter som er inne i figuren? Det er faktisk en slik sammenheng – som egentlig er ganske bemerkelses-verdig. Det kan legges til rette for eksperimentering for å finne denne sammenhengen med enkle midler.

Aktivitet 13
Utstyr som trengs er geobrett eller prikkpapir. Eksempler på areal av geobrettfigurer:



Begge figurene ovenfor har fem punkter på randen og tre indre punkter. Kan du beregne arealet av disse to figurene på tradisjonell måte? For å utforske sammen-henger kan vi bruke følgende tabell:

Indre punkter	Punkter på randen	Areal

- Lag en serie geobrettfigurer som alle har samme antall punkter på randen, men forskjellig antall indre punkter. Lag tabell over det du finner.
- Hvordan endrer arealet seg når du øker antallet indre punkter med ett?
- Lag en serie geobrettfigurer som alle har samme antall indre punkter, men forskjellig antall punkter på randen. Lag en tabell over det du finner.
- Hvordan endrer arealet seg når du øker antallet punkter på randen med ett?

Kan du på dette grunnlaget komme fram til en sammenheng (regel) for arealet til en geobrettfigur?

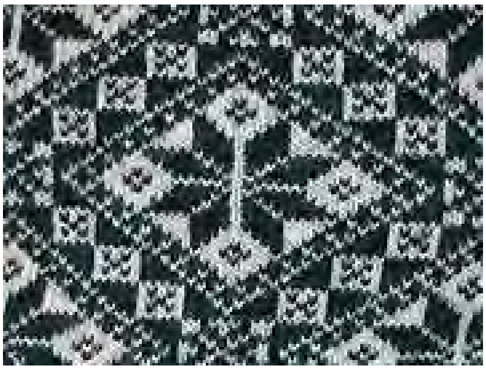
Picks regel er følgende:

La A bety arealet, i antallet indre punkter og r antallet punkter på randen.

Da er: $A = i + \frac{r}{2} - 1$

8.5 Mønstre

Gjennom arbeid med å undersøke og å lage mønstre kan elevene få praktisk erfaring med begreper som speiling, parallellforskyvning og rotasjon. Også dette er aktiviteter som krever at elevene får bruke en del tid. Aktivitetene nedenfor kan gjennomføres i matematikktimene, eller de kan for eksempel være en del av et temaarbeid der matematikk og kunst og håndverk er to av fagene som omfattes av arbeidet.



Figur 13: Eksempel på mønster

8.5.1 Å undersøke mønstre

I denne aktiviteten er det fint å ta utgangspunkt i et lokalt mønster, for eksempel et vevd bånd til en lokal bunad, et mønster i en genser, en bord (frise) på en husfasade eller lignende. La eleven undersøke gjenstanden eller et bilde i gjenstanden. De må gjerne bruke et lite lommespeil eller en speilograf. Det er viktig at elevene beskriver det de observerer, med ord. Dette kan gjerne være hverdagslig i første omgang, slik som at "denne er snudd rundt, og senere kommer den om igjen." Dersom elevene undersøker ulike mønstre, kan vi også be dem om å beskrive mønsteret de under-søker, for andre i klassen. Gjennom disse aktivitetene får elevene etter hvert behov for å uttrykke seg mer presist enn de kan gjennom hverdagsspråket, og vi kan introdusere de matematiske begrepene. Med eldre elever, som allerede kjenner de matematiske begrepene, kan vi undersøke og beskrive mønstre gjennom å bruke de korrekte matematiske termene.

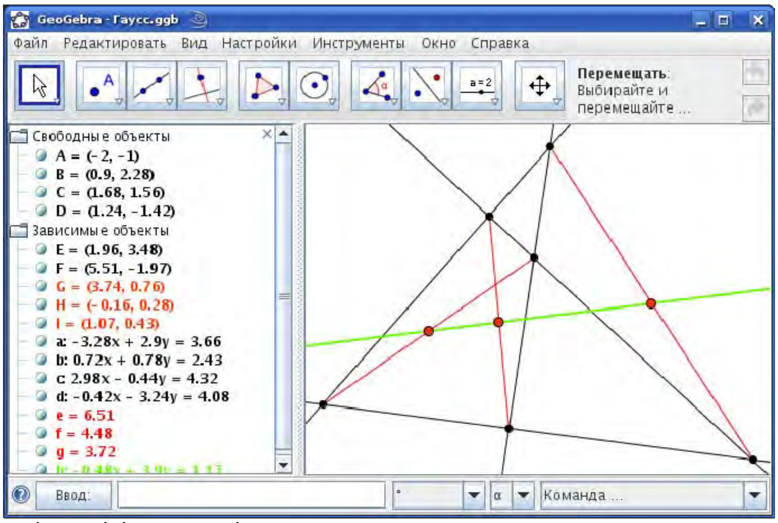
8.5.2 Å tegne og konstruere mønstre

Elevene på ungdomstrinnet skal i kunst- og håndverksfaget lære noe om arkitektur. Finnes det bygninger i nærmiljøet med særpregede mønstre i fasaden, kan det å beskrive disse være en fin aktivitet som favner mål i læreplanen både i matematikk og i kunst og håndverk. Elevene kan også forsøke å tegne mønstrene selv for å presentere disse for andre. Elever på ungdomstrinnet kan forsøke å konstruere mønstrene for å lage en mal som er helt nøyaktig. For å få til dette må de først analysere figuren for å se hvordan vi lager mønsteret gjennom å speile, rotere og parallellforskyve.

8.6 Programvare for geometri

En figur eller konstruksjon på dataskjermen gir andre muligheter enn figurer og konstruksjoner på papir. På et ark kan vi tegne skisser eller utføre konstruksjoner med passer og linjal. Med et egnet dataprogram blir datamaskinen et tegne- og konstruksjonsverktøy der vi har en rekke muligheter, for eksempel til å manipulere figurer eller lagre en konstruksjon.

Det har i de senere årene blitt utviklet en rekke programmer i såkalt dynamisk geometri. Med "dynamisk" forstår vi geometri der vi kan manipulere figurer som er konstruert.



Figur 14: Skjermbilde av dynamisk geometriprogram

Eksempler på slike dynamiske geometriprogram er Cabri, Geometer´s Sketchpad og Geogebra. Programmene har mange fellestrekk. Versjoner for utprøving (demo-versjoner) kan lastes ned fra Internett. Slik kan vi gjøre oss kjent med programvaren.

De dynamiske geometriprogrammene kan brukes blant annet til å belyse speiling og symmetri, rotasjon og parallellforskyvning. Her ligger mange utforskningsmuligheter. Programmene er også graftegningsprogrammer noe som gir mulighet til å vise elevene hvordan for eksempel grafene endrer uttrykk når funksjonsuttrykkene endrer seg.

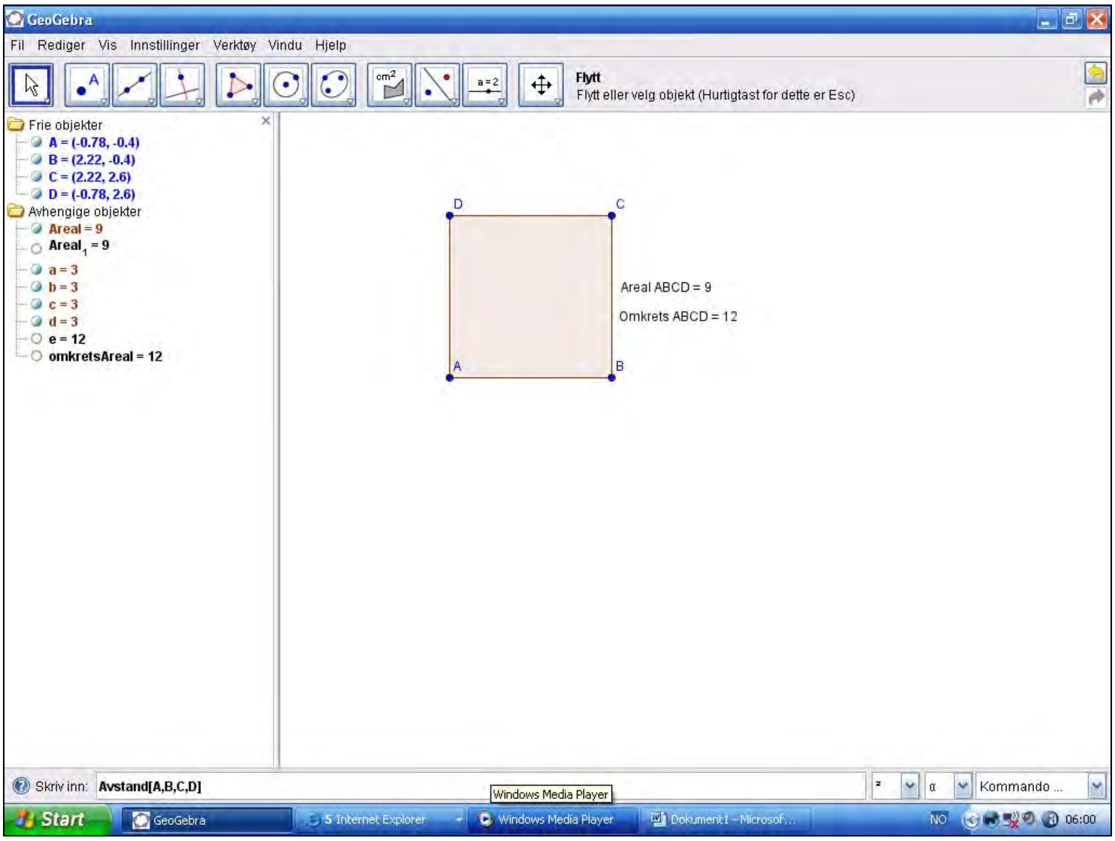
Et annet område der disse programmene egner seg godt, er når vi vil måle, for eksempel areal og omkrets til figurer eller områder. Omkrets og areal er funksjoner som er innebygget i programmene. Vi kan derfor utforske hvordan for eksempel omkrets og areal forandrer seg når en figur forandres.

Mange elever har vansker med å skille mellom omkrets og areal. Dette viser også internasjonale undersøkelser. De programmene som vi omtaler her, gir gode muligheter for elevene til å eksperimentere med omkrets og areal til områder.

8.6.1 Beskrivelse av noen aktiviteter vha. dynamisk geometriprogram

Aktivitet 14

Vi kan for eksempel tegne et kvadrat (regulær mangekant) i Geogebra. Deretter kan vi velge fra en meny og få frem omkretsen til figuren og arealet til figuren.



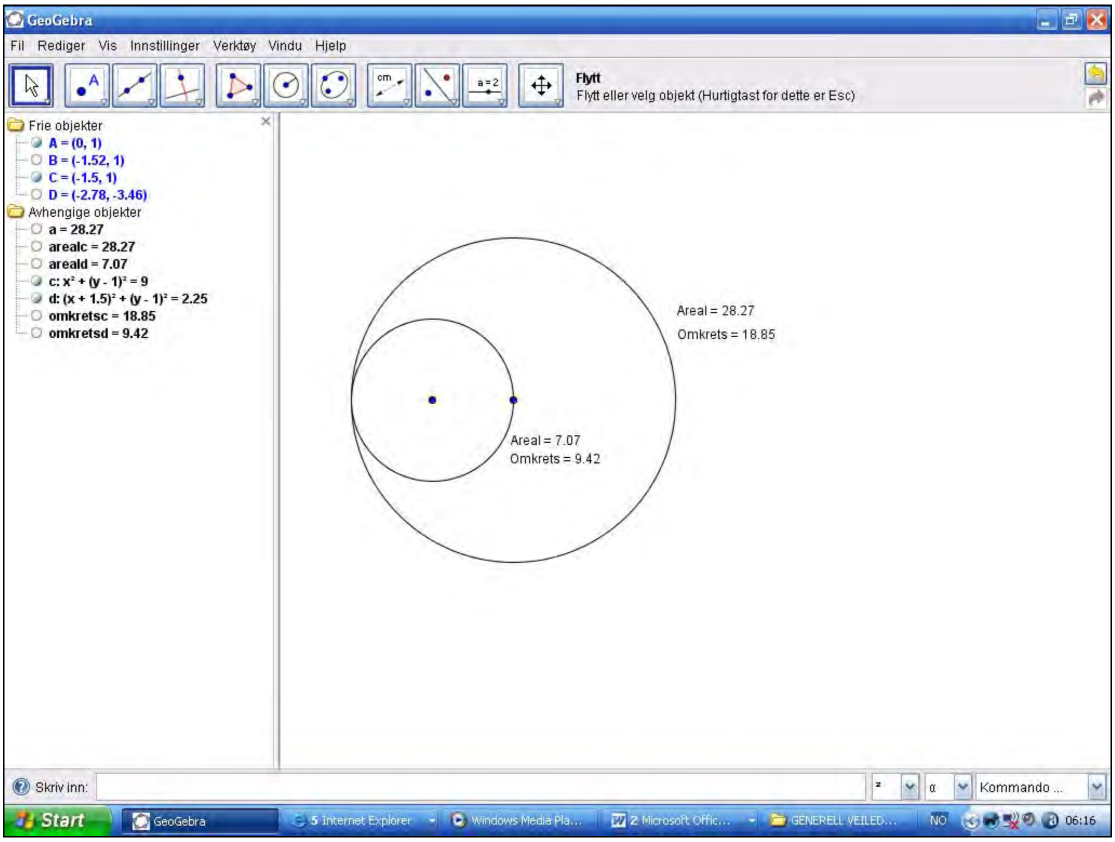
Figur 15: Eksempel fra Geogebra

Vi kan så "dynamisk" forandre størrelsen på kvadratet (for eksempel ved å dra i et hjørne) og observere hvordan omkretsen og arealet forandrer verdi. Elevene kan diskutere hva som er sammenhengen mellom de to tallene.

Aktivitet 15

Hvordan forandrer det ene tallet seg (for eksempel omkretsen) i forhold til det andre? Her kan det være nyttig for elevene å ha en kalkulator tilgjengelig, slik at ikke regne-arbeidet blir uoverkommelig.

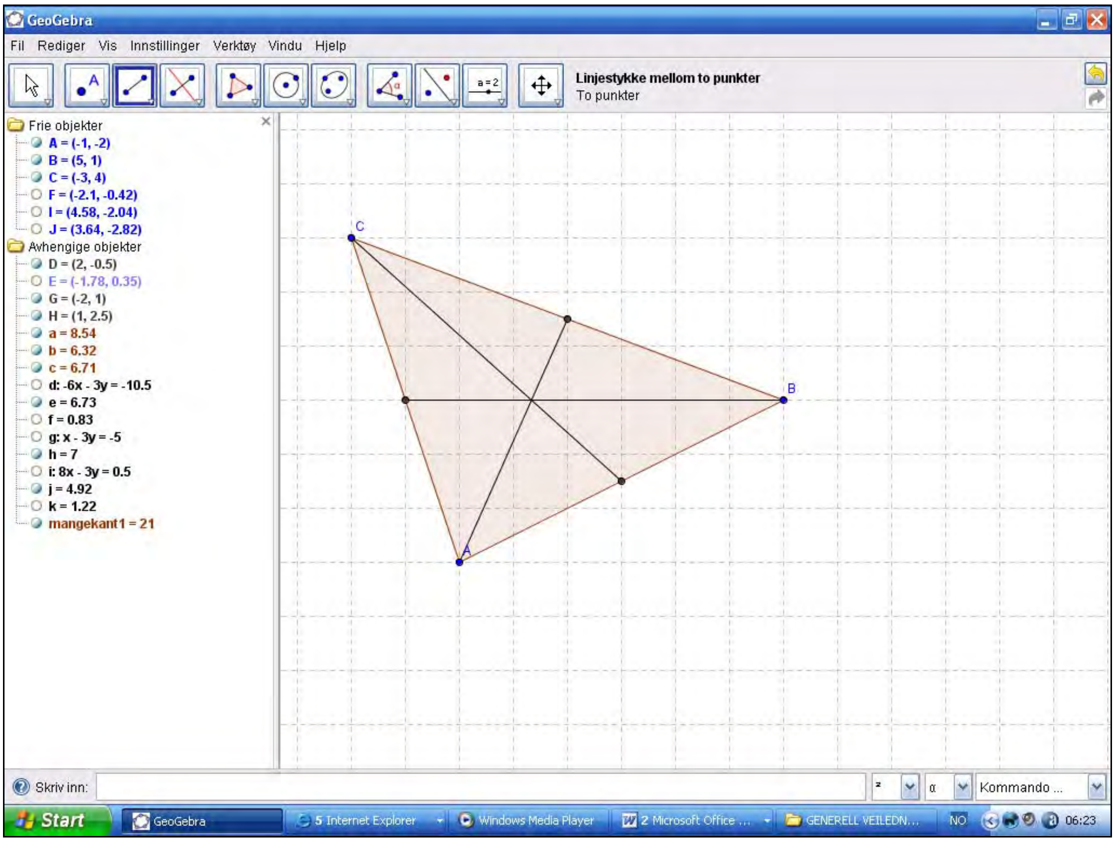
Når det gjelder omkrets og areal til sirkelen (oppgave 6 og 7 Geometri 8 – 10), kan sammenhenger også utforskes. Elevene kan tegne to sirkler som er "koplet" på den måten at radien i den ene er diameteren i den andre. Når de forandrer størrelsen på den ene sirkelen, forandrer de også den andre. Ved at omkrets og diameter til begge sirklene blir vist på dataskjermen, kan elevene utforske sammenhengen.



Figur 16: Eksempel fra Geogebra

8.6.2 Bruk av dynamiske geometriprogrammer

En interessant egenskap er at en kan (dynamisk) forandre figurer ved å trekke i deler av dem, for eksempel trekke i et hjørne i en trekant. Har vi derfor definert linjer eller lignende som bygger på (er koplet til) den figuren som deformeres, vil vi kunne se hvordan egenskaper forandres eller er stabile. Et vanlig slikt eksempel er å se på medianene i en trekant. De ser ut til å skjære hverandre i ett punkt, og en kan observere hvordan denne egenskapen er konstant, når en forandrer trekantens form.



Figur 17: Eksempel fra Geogebra

Aktivitet 16

Gjør tilsvarende for de tre høydene i en trekant. Hva ser du? Gjør det samme for de tre midtnormalene i en trekant. Hva ser du?

Dynamiske geometriprogrammer er derfor godt egnet til eksperimentering og utforskning. En fordel er at elever kan arbeide i grupper. De kan diskutere forhold som de ser på dataskjermen. En aktivitet der elevene kan eksperimentere, er for eksempel følgende:

Tegn en vilkårlig (uregelmessig) firkant. Merk av midtpunktene på hver av sidene og tegn den firkanten som framkommer når midtpunktene forbindes. Ta så tak i et hjørne i den opprinnelige firkanten. Hva ser du når du drar i hjørnet?

Her vil det for mange reise seg et spørsmål: Er det riktig det jeg ser? Hvorfor er det slik? Kan jeg bevise det? Programmet gir ikke bevis, men illustrerer en sammenheng eller egenskap. Geometrien har kanskje vært det området i skolematematikken der vi har kommet i kontakt med matematiske bevis. Geometriprogrammene lar oss observere på dataskjermen og komme med hypoteser. For mange vil det være en naturlig fortsettelse å bevise det de ser på skjermen, men da med tradisjonelle metoder.

8.7 Konstruksjoner med passer og linjal eller dataverktøy?

Mange momenter kan trekkes inn i en slik diskusjon.

Vi har sett at dynamiske geometriprogrammer er derfor godt egnet til eksperimentering og utforskning.

Hva så med tradisjonelle konstruksjoner med passer og linjal? Konstruksjoner har lang tradisjon i skolens geometriundervisning. Elevene kan oppøve nøyaktighet og mange har gjennom konstruksjonsoppgaver fått innsikt i matematiske sammenhenger. Å konstruere en vinkel på 30° gir innsikt i størrelser til vinkler. Imidlertid falt bruk av slike verktøy også vanskelig for mange elever, og det har i L97 vært en bevegelse bort fra den mer formelle bruken av passer og linjal til en mer uformelle tegning. I de læringsstøttende prøvene har vi i flere spørsmål bedt elevene om å tegne. Mange elevsvar viser at tegningene ofte er svært unøyaktige. Spesielt i oppgaver med speiling ser vi at mange elever har problemer med å komme fram til riktig avstand.

Konstruksjoner med passer og linjal kan være et viktig didaktisk verktøy i undervisningen. Å skrive en forklaring til en konstruksjon er en god måte å formidle en matematisk framgangsmåte på. Å konstruere fokuserer på den matematiske prosessen. Problemer oppstår imidlertid når selve konstruksjonsprosessen stryk blir et hinder for mange elever.

Imidlertid, geometri og geometriske konstruksjoner utføres i dag i vårt samfunn utenfor skolen så å si utelukkende med dataverktøy. På denne bakgrunn vil mange hevde at dataverktøyene også bør komme inn i undervisningen.

Den store matematikeren Carl Friedrich Gauss konstruerte som ganske ung den regulære 17-kanten, og han så på denne konstruksjonen som svært vesentlig. I dag ”konstruerer” et dataprogram en 17-kant på en viss kommando. Men når data-programmene tegner figurer eller konstruerer, går et viktig element tapt. På den andre siden tar konstruksjonsprogrammene oss et skritt videre. Når konstruksjonene er automatisert, kan vi utforske sammenhenger. Vi kan for eksempel utforske medianenes skjæringspunkt i mange ulike trekanter.

Som et slags svar på spørsmålet i overskriften kan vi si at begge deler hører hjemme i skolens geometriundervisning, noe lærerplanen etter 10. årstrinn sier:

> *utføre og grunngje geometriske konstruksjonar og avbildingar*
> *med passar og linjal og andre hjelpemiddel*

Kapittel 9 Referanser

9.1 Ressurser for geometri på Internett

9.1.1 Tangram på Internett

Det finnes en mengde ressurser for tangram på Internett. Som for mange andre temaer virker muligheten mange. Nedenfor har vi bare listet opp to mulige adresser av svært mange, som kan være et utgangspunkt for videre søkning.

http://www.cimt.plymouth.ac.uk/resources/puzzles/default.htm

http://mathforum.org/trscavo/tangrams.html

De som liker å utforske, kan søker på "tangrams" på de mange søkemotorene på Internett. Referansemengden er overveldende.

9.1.2 Geobrett på Internett

Det finnes flere ressurser for geobrett på Internett, for eksempel:

http://mathforum.org/trscavo/geoboards/

Med denne siden som utgangspunkt kommer en videre til sider der en kan få skrevet ut ark med prikkpapir her:

http://mathforum.org/trscavo/geoboards/dotpaper.html

9.1.3 Eksempler på programvare for geometri på Internett

GeoGebra:
http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Ungdomstrinnet

Cabri:
http://www.cabri.com/

Geometer´s Sketchpad:
http://www.dynamicgeometry.com/

9.2 Litteratur

Dahl, K. (2000) *Kvadrater, hieroglyfer og smarte kort*. Oslo: Omnipax

Dunkels, A. (1983) *Boken om geometri på ett bräde*. Malmö: Gleerups

Ford, B.E. (1990) The *Master Revealed – A Journey with Tangrams*. Vallejo, CA: Tandoreas Box Press

Fuglestad, A.B. (2000) Internettressurser. Dynamisk geometri. Tangenten, nr.3

Kerry, T., (1981), Talløking: The teacher´s role. I Sutton, C. (ed.): *Communicating in the Classroom*. London: Hodder and Stoughton.

Lehet, J.L. (1998) *A Sage´s Journey*. Waterford, CT: MathMaverick Press

Loyd, S. (1968) *The Eighth Book of Tan*. New York, NY: Dover

Picciotti, H. (1999) *Geometry Lab*s. Emeryville, CA: Key Curriculum Press

Read, R.C. (1965) *Tangrams, 330 Puzzles*. New York, NY: Dover

Rosing, N.K. (2000) *Den matematiske krydderhylle*. Trondheim: Midt-nordisk vitensenter

Spikell.Marl A. (1993) *Teaching Mathematics with Manipulatives: A Resource of Activities for the K-12 Teacher*. Boston:: Allyn and Bacon