Utdanningsdirektoratet

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Måling

Bokmål

Innledning

Dette ressursheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til Læringsstøttende prøver om emnet *Måling*. Spesielt retter disse oppgavene seg mot begreper i geometri i grunnskolen.

Disse oppgavene er prøvd ut tidligere på 6. årstrinn og 9. årstrinn.

Del 1 i dette ressursheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger basert på i utprøvingen av oppgavene.

Oppgavene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved elevens forståelse av forskjellige sider ved geometrien i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisningen, slik at elevene kan utvikle en så solid begrepsforståelse som mulig.

Analysen, som utfyller de veiledningstekster som knyttes til den enkelte oppgave i den digitale prøven, er likevel ikke fullstendig Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begreps-dannelse innenfor tall og tallregning.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer og veiledninger, som retter seg mot de vansker som kartleggingsoppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan kartleggingsoppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg på bakgrunn av de vanskene som elevene har.

Del 1 Analyse av oppgavene i læringsstøttende prøver

Måling

I denne delen blir ulike begreper knyttet til måling og enheter analysert og diskutert. Noen av de diagnostiske oppgavene er noe modifisert sammenlignet med de opprinnelige oppgavene, mens andre en uforandret.

Det deltok 105 klasser på 6. årstrinn og 89 klasser på 9. årstrinn i datainnsamlingen. På disse årstrinnene var det henholdsvis 2106 og 2150 elever som besvarte prøvene. Skolene er tilfeldig utvalgt blant alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulik størrelse. Blant de elevene som besvarte prøvene har, vi trukket ut i overkant av 900 elever.

Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen er følgende:

Måling: 891 på 6. årstrinn og 891 på 9. årstrinn

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved måling og bruk av enheter og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett.

Kapittel 1 Måling

Emnet måling har tilknytningspunkter til alle andre emner i matematikk. Likevel skiller regning med måling seg fra de øvrige emnene først og fremst ved å ha praktiske formål. Langt på vei kan man si at tallære, geometri og algebra er støttedisipliner til praktisk regning. Men den praktiske regningen har også sin egen teori, som bare knytter seg til måling. Denne teorien kommer til anvendelse på de områdene vi bruker til matematikken i praktiske problemstillinger.

Bjørnar Alseth tar opp måling i *Matematikk på småskoletrinnet* (1998), og påpeker at vi ikke bare skal legge vekt på kunnskaper og ferdigheter. Det er viktig å redegjøre for hensikten med målinger, nemlig kommunikasjon av størrelser, slik at de meddeles fra en person til en annen eller tas med til andre situasjoner. Dette er ikke mindre viktig på høyere årstrinn, når elevene kanskje er mindre opptatt av aktivitetene i seg selv (lek) og mer opptatt av nytten av læringsarbeidet.

1.1 Læreplanverket etter Kunnskapsløftet LK06 og *Måling*

Gjennom hele grunnskolens årstrinn skal elevene i følge læreplanens kompetansemål etter Kunnskapsløftet arbeide med måling. Måling er et av hovedområdene i læreplanen etter 2. årstrinn, 4. årstrinn, 7. årstrinn og etter 10. årstrinn. Måling og enheter kan omfatte en rekke størrelser fra natur og samfunn. En fysisk størrelse er en egenskap som et fysisk objekt har. Denne egenskapen kan bestemmes kvantitativt, slik som masse og volum. Egenskapen er enten resultatet av en direkte fysisk måling eller en beregning ved hjelp av fysiske lover. Det kan være heltall eller desimaltall. Denne veiledningen tar ikke for seg svært mange av disse størrelsene. Vi behandler for eksempel ikke problemstillinger knyttet til penger, temperatur, masse og tetthet, som alle er nevnt i læreplanen.

1.1.1 Måling

Etter 2. årstrinn skal elevene sammenligne størrelser som gjelder lengde og areal ved hjelp av egnede måleenheter. Etter 4. årstrinn skal elevene blant annet gjøre overslag innenfor en rekke temaer under måling. Elevene skal etter samme årstrinn kunne "å bruke ikkje-standardiserte måleiningar og forklare føremålet med å standardisere måleiningar, og gjere om mellom vanlege måleiningar" og " samanlikne storleikar ved hjelp av høvelege målereiskapar og enkel berekning med og utan digitale hjelpemiddel." Etter 7. årstrinn skal elevene blant annet "velje høvelege målereiskapar og gjere praktiske målingar i samband med daglegliv og teknologi, og vurdere resultata ut frå presisjon og måleusikkerheit" og videre "velje høvelege måleiningar og rekne om mellom ulike måleiningar." Etter 10. årstrinn skal elevene velge paasende måleenhter, forklare sammenhenger og regne om mellom ulike måleenheter, videre bruke og vurdere måleinstrument og målemetoder i praktisk måling, og å drøfte presisjon og måleusikkerhet.

1.1.2 Lengde

Etter 4. årstrinn skal elevene kunne gjøre overslag over og beregne lengde og omkrets. Dette skal elevene også arbeide med etter 7. årstrinn, i tillegg til å kunne bruke målestokk til å beregne avstander og lage enkle kart og arbeidstegninger. Etter 10. årstrinn skal elevene kunne gjøre overslag over og beregne lengde og omkrets, samt å bruke og endre målestokk.

1.1.3 Areal og volum

I løpet av 3. og 4. årstrinn skal elevene kunne gjøre overslag over og måle areal og volum. Etter 7. årstrinn skal elevene også gjøre overslag over og måle størrelser for areal og volum. På samme årstrinn skal elevene kunne "forklare oppbygginga av mål for areal og volum og berekne omkrins og areal, overflate og volum av enkle to- og tredimensjonale figurar." Etter 10. årstrinn skal elevene kunne både gjøre overslag over og beregne areal og volum, men også "gjere greie for talet pi og bruke det i berekningar av omkrins, areal og volum."

1.1.4 Tid

Etter 2. årstrinn skal elevene kunne nevne dager, måneder og enkle klokkeslett. Videre skal elevene kunne gjøre overslag og måle tid etter 4. årstrinn. Det samme skal de kunne etter 7. årstrinn, men i tillegg skal elevene kunne bruke tidspunkt og tidsintervall i enkle beregninger. Kravet om at elevene skal kunne gjøre overslag over og beregne tid gjentas etter 10. årstrinn.

1.1.5 Fart

Temaet fart kommer naturlig inn etter 7. årstrinn og 10. årstrinn når elevene skal "forklare samanhengar og rekne om mellom ulike måleiningar."

1.1.6 Vinkler

Etter 4., 7. og 10. årstrinn skal elevene kunne gjøre overslag over og beregne vinkler.

1.2 Sammenheng mellom enheter

På 1900-tallet skjedde det en radikal sanering av måleenhetene i verden, også i Norge. Høydepunktet var innføringen av SI-systemet, som vi omtaler i et eget avsnitt senere. I hovedsak besto arbeidet i

- å få felles grunnenheter uavhengig av landegrenser og fagdisipliner
- å få dekadisk inndeling av enhetene
- å unngå definisjoner med medfører bruk av proporsjonalitetskonstanter i beregningene

Uttrykket sammenheng mellom enheter kan henspille både på ulike enheter for samme størrelse og på hvordan enheter for forskjellige størrelser forholder seg til hverandre.

1.2.1 Myntenheter

La oss se på to eksempler på den første bruken, hentet fra et arbeid med myntenheter og enheter for fart. Penger er mål for materielle verdier. Enhetene vi bruker i Norge, er kroner og øre (1 kr = 100 øre). I Storbritannia blir det brukt pund og pence (1 £ = 100 pence). Når kursen på britiske pund er 9,42, betyr det at en vare som i britiske pund er verdt £ 100,00, i norske kroner er verdt kr 942,00. En vare som koster £ 7,55, koster kr 71,22. Vi finner prisen i norske kroner ved å multiplisere antall britiske pund med 9,42.

Tidligere da ett pund bestod av 20 shilling og en shilling bestod av 12 pence var omregningen mer komplisert. Omregningen fra kroner og øre kunne da ikke skje ved enkel multiplikasjon (tilsvarende forhold var det lenge også for lengdemål, vekt og så videre). Ved å gå over til dekadiske enheter i pengesystemet i Storbritannia har vi forenklet sammenhengen mellom britiske pund og andre (dekadiske) myntenheter. Ikke minst i skolematematikken har dette medført at et tidligere mye omtalt problem ble borte. Verdifull tid kan i stedet brukes til annen læring.

1.2.2 Fart

Fart måles til vanlig enten i *km/h* (kilometer per time) eller i *m/s* (meter per sekund). Hvis du beveger deg 1,0 *m/s*, kan farten også oppgis som 3,6 *km/h* fordi du dermed beveger deg 3600 m på en hel time. 1,0 m/s er altså like raskt som 3,6 *km/h*. Speedometrene i biler kunne derfor like gjerne bruke enheten *m/s*.

Hvorfor velger vi noen ganger å bruke m/s og andre ganger *km/h*? Valgene gjøres ut fra situasjonen som størrelsen skal brukes i. Det er lite hensiktsmessig å bruke *m/s* når vi bruker timer som tidsenhet.

Hvor langt kommer jeg på to timer når jeg kjører med en fart på ca. 20 m/s?

Dette spørsmålet kan få mange voksne til å hente fram kalkulatoren og likevel få problemer. Hvis vi stedet hadde gitt farten som ca. 72 *km/h*, ville nok de fleste kunne gi et raskt og riktig svar. Farten oppgis i egne enheter. For enkelhets skyld er disse enhetene kalt *m/s* eller *km/h*. Dermed henspiller de på enhetene for strekning og tid.

Hvis vi bruker enhetene *m*, *s* og *m/s*, får vi måltallet for strekning, s, ved å multiplisere måltallet for fart, *v*, med måltallet for tid, *t*.

Vi skriver

1.. $s = v \cdot t$

Hvis vi derimot holder oss til *km/h* som enhet for fart, *m* som enhet for strekning og *s* som enhet for tid, vil vi skrive

2. $s = \frac{1}{3,6} \cdot v \cdot t$

Faktoren $\frac{1}{3,6}$ knytter de to enhetene for tid sammen.

1.2.3 Forenklinger gjennom SI-systemet

Det er åpenbart enklere å bruke den første av formlene ovenfor. Da slipper vi å ta med proporsjonalitetskonstanten $\frac{1}{3,6}$ ved hver utregning. SI-systemet, som ble vedtatt i 1960, sørger for at enhetene samsvarer slik at vi oftere kan bruke formler av type 1 enn av type 2 ovenfor.

Når vi vokser opp med SI-systemet, kan vi lett ta det som en selvfølge. Nye generasjoner slipper stort sett å regne om fra centimeter, meter og kilometer til tommer, fot og miles. Tilsvarende problemer med masseomregninger og hulmål unngår vi også. Men samtidig mister vi den trangen/behovet slike problemer gir til å reflektere over hva de forskjellige størrelsene står for, og Men samtidig mister vi behovet slike problemer gir til å reflektere over hva de forskjellige størrelsene står for, og hvilke enheter som er best egnet for de ulike størrelsene. og inn-deling. Det gir dermed mindre ballast for å forstå hvordan enhetene til mindre observerbare størrelser knyttes sammen, for eksempel i varmelære og elektrisitetslære.

1.3 Måltall har alltid en usikkerhet

Forestillingen om at all matematikk handler om nøyaktige tall og nøyaktige svar på problemer, synes å være grunnfestet hos mange. Mer spesifisert synes en utbredt oppfatning både hos elever og hos noen lærere å være:

- Det finnes alltid et *riktig* svar.
- Det finnes bare *ett* riktig svar.
- Matematiske svar er *sikre*.
- Alle matematiske uttrykk er *nøyaktige*.
- Eventuell unøyaktighet i måltall skyldes avrunding.

Dette er misoppfatninger som bør angripes systematisk. Når det gjelder måling og enheter, har særlig de to siste forestillingene interesse. Men også de tre første er svært aktuelle for praktiske problemstillinger som måling er knyttet til.

Hvordan kan slike forestillinger oppstå? La oss ta for oss misoppfatningen at alle matematiske uttrykk er nøyaktige.

- Språkbruken både i dagligtale og i undervisningen kan trolig forklare en god del av denne misoppfatningen. Det er enklere å bruke uttrykk som *å måle nøyaktig* enn å si *å måle så nøyaktig som du kan.*

- Forståelsen av tallsystemet blir ufullstendig når elevene lærer å bruke måle-redskaper som metermål. Ikke alle elever forstår med en gang at de må bruke stadig flere desimaltall for å angi tall mer og mer nøyaktig. Nettopp gjennom oppgaver med måling kan elevene få øynene opp for at det kan være behov for enheter som måler stadig mindre størrelser, og dermed bli motivert for å forstå desimalsystemet.

- Måling gjennom telling av enheter kan muligens også bidra til en slik misoppfatning. Når vi har telt de minste enhetene (for eksempel millimeter), kan vi sitte igjen med en forestilling om at ”det gikk akkurat opp”.

- Troen på at enheten alltid går opp i den målte størrelsen, forsterkes når vi bruker penger i innføringen av måltall. Her har vi til vanlig tellbare enheter. Vi kommer likevel til problemstillinger der vi har behov for å dele opp de minste enhetene (ørene) ytterligere. Det gjelder når vi regner om fra ett lands mynt-enheter til et annet lands. Elevene får imidlertid erfaringer med dette forholdsvis sent i skolegangen.

Vi ser at undervisningen kan ha stor betydning for om en misoppfatning forsterker seg, eller om den avsløres og svekkes. Også blant lærere er det en vag forståelse av usikkerhetsbegrepet. Vi skal derfor se på fire vesentlige grunner til at alle måltall er beheftet med usikkerhet.

1.3.1 Systematiske målefeil

Ved målinger kan det oppstå feil knyttet til både tilfeldigheter og systematisk feil målemetode. Fra historien kjenner vi til at noen kjøpmenn som tok imot varer fra bønder og fiskere, bevisst brukte måleredskaper som ga feil resultat. Hvis vi bruker et metermål som er kortere (eller lengre) enn en meter, vil måltallet vi får, systematisk bli for stort (eller for lite). *Måleredskapet* kan med andre ord være årsak til målefeil.

Men også *bruken* av måleredskapet kan systematisk være feilaktig. La oss bruke som eksempel tidtaking under et friidrettsstevne. Når vi bruker manuelle stoppeklokker for å måle tiden på 60-meteren, setter vi vanligvis noe forsinket i gang, både fordi det tar noe tid før lyden når en tidtaker som står 60 meter fra starteren (ca. 0,2 s), og fordi tidtakerne ikke reagerer momentant. Vi stopper klokkene mer korrekt når løperne går over målstreken, fordi vi ser at de nærmer seg, og kan forutsi passeringen. Dermed vil vi systematisk gi noe for gode tider.

Vi kan redusere den systematiske målefeilen hvis vi kjenner årsaken til den. Hvis vi går tilbake til eksemplet og ikke venter på lyden, men starter med det samme vi ser røyken fra startpistolen, tar signalet forsvinnende liten tid fram til tidtakeren. Reaksjonstiden vil likevel medføre at den målte tiden blir noe for god. Bruk av elektronisk tidtaking fjerner også den feilkilden.

Men også avanserte målemetoder kan føre til feil. De senere årene har vi sett at muligheter for systematiske feil ved fartsmålinger har ført til en rekke tvister etter fartskontroller i trafikken. Justervesenet har ansvaret for at Norge har en måleteknisk infrastruktur og kan kalibrere instrumenter for måling av lengde, volum/hulmål, masse, temperatur, elektrisk spenning og elektrisk motstand.

1.3.2 Tilfeldige målefeil

La oss gå tilbake til eksemplet med tidtakingen ovenfor. Hvis flere tidtakere tar tiden på samme løper, blir klokkene sjelden stoppet på samme hundredels sekund. Delvis kan dette skyldes at tidtakerne har ulik reaksjonshastighet ved start. Noen av tidtakerne kan dermed vanligvis gi bedre tider enn andre. Men nøyaktigheten hos den enkelte tidtaker kan også variere. Her er det altså variasjoner fra menneske til menneske og fra måling til måling hos den enkelte tidtaker. Dette blir avslørt fordi klokkene er langt mer nøyaktige enn tidtakerne. Det lar seg i praksis ikke gjøre at samme person tar gjentatte målinger av det samme sekstimeterløpet. Derfor bruker vi ofte flere tidtakere på samme løper for å redusere store tilfeldige utslag.

Når det gjelder andre målinger, for eksempel lengdemåling og veiing, er gjentakelse vanligvis mulig. Hvis samme person gjør samme lengdemåling gjentatte ganger, kan tilfeldige målefeil demonstreres. Det er en aktuell oppgave i skolen, slik at elevene får egen erfaring med denne typen feilkilder.

Gjennomsnittet av flere uavhengige målinger er normalt et mer sikkert uttrykk for den målte størrelsen enn resultatet av en enkelt måling. Ved hjelp av spredningsmål som variasjonsbredde eller standardavvik kan vi et uttrykk for hvor stor usikkerhet som knytter seg til måltallet.

Målingsteorien, som bygger på statistikk, forteller om hvordan usikkerheten i gjennomsnittet avhenger av tallet på målinger, og hvordan usikkerheten i summen av to måltall eller produktet av måltall er avhengig av usikkerhetene i de enkelte tallene. Vi går ikke mer inn på dette her.

1.3.3 Objektets form og matematiske modeller

Bredden av et golv vi ønsker å måle, kan i de fleste rom variere med flere millimeter. Golvene er vanligvis ikke helt rektangulære. Ofte kan objektene ha en form som gjør det vanskelig å definere størrelsen (bredden på rommet) klart. I slike tilfeller er kanskje ikke usikkerheten først og fremst knyttet til målingen. Når måltallet oppgis, bør usikkerhet knyttet til definisjonen av den målte størrelsen også vurderes. Det er for eksempel meningsløst å oppgi kjøreavstanden mellom to byer til nærmeste meter.

En matematisk modell er en beskrivelse av den virkelige verden. Vi kaller modellen matematisk hvis beskrivelsen bruker matematiske uttrykksformer fra geometri, algebra, statistikk osv. En matematisk modell er god i den grad den bidrar til å løse et problem eller hjelper oss med å formidle informasjon.

Utsagnet ”jorda er kuleformet” kan som svar til et barn være tilstrekkelig presist til at barnet oppfatter at du mener at jorda ikke er plan. På et mer avansert nivå kan ”kuleform” være upresist. Spørsmålet kan da være hvordan jorda skiller seg fra matematisk kuleform.

Utsagnet “luftas tetthet avtar med høyden over havet” er også en matematisk beskrivelse, i hverdagsspråk. Mer presise beskrivelser kan ofte best foretas ved innføring av symboler for de variable: d for tetthet, h for høyde osv. Vi kan si at d er en funksjon av h, og gjerne beskrive denne funksjonen ved hjelp av formel. Hvis d er omvendt proporsjonal med h, kan funksjonen ha formen $d = \frac{k}{h}$, hvor k er en konstant. Vi kunne eventuelt framstille en graf som beskriver sammenhengen.

Matematiske modeller beskriver virkeligheten og gjør det mulig å foreta vurderinger og beregninger. Konklusjonene vil ha en usikkerhet avhengig av hvor godt modellene beskriver virkeligheten. Ofte kan flere modeller være aktuelle. Det betyr ikke at den ene nødvendigvis er bedre (eller riktigere) enn den andre. I skolens matematikk-undervisning har vi tradisjonelt arbeidet forholdsvis lite med å utvikle modeller ut fra situasjoner vi skal arbeide med. I naturfagsundervisningen har nok dette vært vanligere.

1.3.4 Avrunding

I enkelte framstillinger i skolebøker settes måltallenes usikkerhet lik den unøyaktighet som følger av at desimaltallene må avrundes. Det er bare delvis riktig. Avrundingsfeilen i et desimaltall kan være opptil fem enheter av den første desimalen som strykes. Når vi leser størrelsen 3,24 m, antar vi at lengden er målt til mellom 3,235 m og 3,245 m. Vi kan skrive dette som 3,24 m $\pm$ 0,005 m.

For forståelsen av usikkerhet og avrunding er det tjenlig å bruke begrepet relativ usikkerhet. Relativ usikkerhet finner vi ved å dividere usikkerheten i måltallet med måltallet. Ofte oppgis den relative usikkerheten i prosent.

Eksempel:
Anta at måltallet 3,532 kg har en usikkerhet på 0,01 kg. Relativ usikkerhet blir da 0,01 : 3,532 $\approx$ 0,003 eller 0,3 %.

I norsk skolematematikk har den relative usikkerheten tradisjonelt liten plass. Men når vi arbeider med begrepet *gjeldende siffer*, er det egentlig relativ usikkerhet vi tar for oss. Antallet gjeldende siffer er enkelt å definere, hvis tallet er gitt med desimaler. Hvis vi derimot har et helt tall som slutter med en eller flere nuller, kan vi ha et problem.

Eksempel:
3,53 kg har tre gjeldende siffer. 3,530 kg har fire gjeldende siffer. Men hvor mange gjeldende siffer er det i 3530 g? Spørsmålet er om 0-en ”bare” er plassholder. Mer informasjon ligger i skrivemåten $3{,}53 \cdot 10^3$ g. Dette skiller seg fra $3{,}530 \cdot 10^3$ g ved at det siste uttrykket har fire gjeldende siffer, mens det første har tre.

La oss gå tilbake til formålet med målinger: *kommunikasjon av størrelser*.

Det første spørsmålet vi bør stille når vi vurderer hvor mange siffer vi skal avrunde til, er: ”Hvor stor nøyaktighet har vi behov for?” Hvis vi kan akseptere en usikkerhet på 1 %, trenger vi ikke mer enn tre siffer i måltallet. Vi kan runde bort det fjerde sifferet, men det vil være uhensiktsmessig å runde bort det tredje. Dette kan vi vurdere uavhengig av andre usikkerhetsvurderinger knyttet til måltallet.

Hvis vi derimot ønsker så stor nøyaktighet som mulig på måltallet, bør vi starte med å vurdere usikkerheten knyttet til målefeil og matematisk modell. Hvis vi for eksempel antar at denne usikkerheten er på 0,1 %, bør vi beholde så mange siffer at avrundingsfeilen ikke gir noe vesentlig bidrag til den samlede usikkerheten. Det kan vi si er tilfellet hvis avrundingsfeilen er på mindre enn 1/3 av en annen kjent usikkerhet. I eksemplet ovenfor med 0,1 % kjent usikkerhet bør vi derfor holde oss til fire gjeldende siffer og runde bort det femte.

For å gå tilbake til eksemplet vi innledet dette delkapitlet med, er usikkerheten etter avrunding minst 0,005 m. Målemetoden og objektets form avgjør om usikkerheten er større.

En god regel er å bruke en desimal mer enn det målemetoden og formen skulle tilsi. Dermed kan vi unngå at avrundingsfeilen gir et vesentlig bidrag til usikkerheten i måltallet.

I norsk grunnskoletradisjon er dette lite utbredt. Vi tar gjerne bare med ett usikkert siffer og forenkler usikkerhetsvurderingene til bare å gjelde avrundingsfeil.

1.4 Regning med måltall

Måltall kan brukes til ulike beregninger. Vi kan for eksempel beregne arealet til en rektangulær golvflate ved å multiplisere lengde med bredde. Siden det er usikkerhet i måltallene, vil denne usikkerheten forplante seg til produktet. Tilsvarende gjelder for andre beregninger (addisjon, subtraksjon og divisjon). Ved vurderingen av usikkerheten i sluttsvaret kan vi i grunnskolen velge forholdsvis enkle overslag:

- *Multiplikasjon og divisjon*: Den relative usikkerheten i svaret er lik den største av de relative usikkerhetene i måltallene. Dette gir litt for små anslag. I praksis (norsk tradisjon) betyr dette at vi i svaret angir like mange gjeldende siffer som vi har i måltallet med færrest gjeldende siffer.

- *Addisjon og subtraksjon av to tall*: Usikkerheten til svaret kan anslås til å være summen av usikkerhetene i måltallene. Dette gir litt for store overslag. Her bruker vi i stedet usikkerheten til den addenden som har størst usikkerhet (det vil si i norsk tradisjon så mange desimaler som i tallet med færrest deismaler). Merk her skillet mellom antall gjeldende siffer og antall desimaler.

Eksempel:
Vi skal beregne farten til en syklist. Vi har målt en strekning på 100 m og tar tiden syklisten bruker på denne strekningen. La oss anta at usikkerheten i lengdemålingen er 5 cm. Vi måler tiden til 12, 2 s. Usikkerheten er 0,3 s.

$s = 100{,}00 \text{ m} \pm 0{,}05 \text{ m}$ (tradisjon: $s = 100{,}0$ m)
$t = 12{,}2 \text{ s} \pm 0{,}3 \text{ s}$ (tradisjon: $t = 12$ s)

Tradisjonell beregning: $v = \frac{s}{t} = \frac{100{,}0}{12} \text{ m/s} \approx 8{,}3 \text{ m/s}$

Alternativ beregning: $v = \frac{s}{t} = \frac{100{,}0}{12{,}2} \text{ m/s} \approx 8{,}2 \text{ m/s} \pm 0{,}2 \text{ m/s}$

Det er en vurderingssak hvilken betraktningsmåte som egner seg best. Var det riktig å velge to gjeldende siffer i tidsangivelsen og i svaret? Svaret vil da bli 8,3 m/s og en antatt usikkerhet på 0,05 m/s. Hva med tre gjeldende siffer eller bare ett?

Den alternative betraktningsmåten ville gi nesten det samme svaret. Men informa-sjonen om usikkerheten i svaret er langt bedre. Du ser svakhetene i de to betraktningsmåtene bedre når vi gjør beregningene med større og mindre usikkerhet i tidsmålingen, eventuelt også når vi lar syklisten bruker noe under 10 sekunder.

1.5 SI-systemet

Det internasjonale enhetssystemet ble vedtatt av *Generalkonferansen for vekt og mål* i 1960. SI-systemet tar utgangspunkt i sju grunnenheter. Det er ampere (A), candela (cd), kelvin (K), kilogram (kg), meter (m), mol (mol) og sekund (s). Absolutt alle andre enheter kan defineres ved hjelp av disse. Enkle eksempler er:

- hertz (Hz): s^{-1} (for frekvens)
- newton (N): $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ (for kraft)

Enheter som er definert ved hjelp av grunnenhetene, kalles *avledede enheter*. Ikke alle avledede enheter har egne navn eller symboler, slik som for frekvens og kraft. Enheten for fart kunne hatt et eget navn.

Avledede enheter synes i noen grad å bli forvekslet med ”sammensatte enheter”, slik dette uttrykket brukes i norsk skolematematikk. *Det er en vanlig misoppfatning at størrelser med sammensatte enheter må betraktes som mindre grunnleggende enn størrelsene som grunnenhetene er knyttet til.* Dette tar vi opp i et senere kapittel.

Som lærere bør vi imidlertid være oppmerksomme på at ikke alle størrelser er like direkte observerbare uten bruk av instrumenter. Lengde er lettere å observere enn fart og akselerasjon. Masse er lettere å observere enn tetthet. Elevene har lettere for å forestille seg – og arbeide med – størrelser som de kjenner fra egen erfaring, som de selv har observert eller manipulert.

Forståelse av fart og akselerasjon vil normalt komme gjennom erfaringer, gjerne på egen kropp, og ikke gjennom formelle definisjoner.

Språkbruken kan være viktig når vi drøfter erfaringene. Hva er forskjellen på disse spørsmålene:

1. Per og Ola løper i 10 sekunder. Per løper fortere enn Ola.
   Hvem kommer lengst?

2. Per og Ola løper i 10 sekunder. Per kommer lenger enn Ola.
   Hvem har størst fart?

Spørsmål 1 inviterer til en konklusjon om at $s = v \cdot t$

Spørsmål 2 inviterer til en konklusjon om at $v = \frac{s}{t}$

I det første tilfellet er lengden den avledede størrelsen. I det andre tilfellet er farten den avledede. Poenget er at både tid, fart og lengde lar seg avlede av de to andre størrelsene. Slik er det også med en rekke forhold innenfor naturvitenskapene og samfunnsvitenskapene. Bruk av uttrykk som sammensatt størrelse og avledet enhet er ofte mer egnet til å tilsløre enn til å avklare de underliggende forholdene i praktisk regning.

Spørsmålet bør snarere være om vi kan gi direkte erfaringer med størrelsene, og om vi har instrumenter som direkte måler disse størrelsene.

Kapittel 2 Lengde

Kan det sies at begrep om noen størrelser er viktigere enn andre for å forstå verden omkring oss? I våre dager ville kanskje noen hevde at tiden og tidsmålinger er grunnleggende for all aktivitet. Selv ville vi nok ha nevnt lengder og lengdemål først. Lengdevurdering kommer trolig også tidligere enn andre målinger for de fleste barn. Den uformelle målingen som skjer gjennom sammenligning av lengder, danner basis for å forstå viktige sider av både lengde og måling.

2.1 Lengdebegrepet

Som voksne har vi lett for å glemme vår egen utvikling av lengdebegrepet. Begrepet er blitt vårt eget, og vi behandler det med den største selvfølgelighet. En analyse av begrepet kan i noen grad avspeile den utviklingen det enkelte barn har angående lengde. Det er derfor på sin plass å minne om hvilke holdepunkter vi kan ha for barns tilegning av lengdebegrepet.

Alseth (1998) foreslår at elevene får utvikle målingsbegrepet gjennom å bruke fingrer og andre tilgjengelige redskaper som for eksempel kvister. Først senere brukes standardenheten meter.

2.1.1 Konservere

For voksne er det liten tvil om at *en lengde er den samme uavhengig av hvordan vi deler den opp i enheter, eller i hvilken retning vi måler.* Når barnet innser dette, har det nådd en viktig milepæl i å tilegne seg lengdebegrepet.

2.1.2 Transitivitet

Med transitivitet mener vi at vi kan sammenligne to lengder, for eksempel ved å måle den ene med en snor og så flytte snora over til den andre. I bunn og grunn er dette forutsetningen for at måling skal ha noen hensikt.

2.1.3 Sammenligning og ordning

Sammenligning av størrelser forutsetter en forståelse av at størrelser kan ordnes. Barna oppdager snart at hvis Kari er høyere enn Lise og Lise er høyere enn Anne, så er Kari nødvendigvis høyere enn Anne. Det er ikke like lett å innse at hvis Per er høyere enn Tor og Per er høyere enn Nils, kan vi ikke uten videre si hvem som er høyest av Tor og Nils.

2.1.4 Addisjon og subtraksjon

Lengder kan adderes til hverandre subtraheres fra hverandre.

- *Disse taustumpene er "så lange" til sammen.*
- *Nils er "så mye høyere" enn Tor.*
- *Kari kaster "så mye lenger" enn Lise.*

Både barn og voksne har en tendens til å generalisere denne kunnskapen. Vi oppdager at den gjelder for lengder, senere også for arealer, volum og en rekke andre størrelser. Men hva med temperaturer? Det er en utfordring at vi ikke på en meningsfull måte kan addere to temperaturmålinger, når de måles i celsiusgrader. Når barn oppdager dette, kan de bli i tvil lom gyldigheten av addisjon også på andre områder. Barn bør få vite at celsiusskalaen har et tilfeldig valgt nullpunkt. Derfor egner ikke målingene seg for addisjon. Men temperaturdifferanser har en mening!

Mange har vel observert at når barn spiller et terningspill og skal ”flytte fem fram”, kan det ta tid før de forstår at de ikke skal telle med den ruten brikken står i. Slik kan det også være med lengdemåling. Ikke sjelden plasserer et barn 1-tallet på linjalen ved det ene endepunktet når det måler et linjestykke med en linjal.

2.1.5 Lage enheter

Vi kan finne en enhet, for eksempel lengden av en fot, måle lengdene ved å telle antall fot og sammenligne tallene. I lek er dette vanlig. Bruk av kroppen som lengdeenhet har den fordelen at vi alltid har måleredskapene tilgjengelige. Barna oppdager likevel raskt at det å telle fot, skritt, fingerbredder osv. ikke blir nøyaktig, siden for eksempel ikke alle skritt er like lange. Vanligvis begynner barna å bruke mindre enheter, for eksempel fingerbredder, når de ser at de store enheter ikke går opp i den målte enheten. Da oppdager de at heller ikke fingerbredden alltid går opp.

All måling medfører unøyaktighet (usikkerhet). Bruk av standardiserte måleredskaper reduserer måleusikkerheten. For at barna bedre skal forstå dette, bør de ikke arbeide med enheter som er så små at usikkerheten synes å forsvinne. Det kan fort skje når vi bruker avanserte måleredskaper. Egendefinerte enheter stiller elevene stadig overfor utfordringer knyttet til målingenes nøyaktighet.

2.1.6 Standardiserte enheter

Det er trolig viktig for forståelsen av standardiserte enheter at barna har arbeidet med egendefinerte enheter før de standardiserte blir introdusert. Tidlig introduksjon av målebånd og meterstaver kan dermed være til hinder for begrepsutviklingen. Barnas lek kan danne grunnlag for utviklingen av begrepene, forutsatt at leken har en slik karakter at ”uformell” måling er nødvendig. Men det er viktig at barna etter hvert forstår hensikten med standardiserte enheter, at de er konstante over tid og rom. De bør også utvikle begrep om størrelsen av de vanligste enhetene, gjerne sammenlignet med kroppsdeler.

2.1.7 Telle og måle

Innføringen i måling skjer ved at vi teller enheter. Forståelsen av at måling er ”noe mer” enn telling, forutsetter at vi har en korrekt oppfatning av begrepet kontinuitet. Lengde er en kontinuerlig variabel. Det finnes ingen enheter små nok til at vi ved telling kan måle enhver lengde. Når vi bruker desimaltall for å angi lengder, må vi ha et uendelig antall desimaler for å angi lengdene nøyaktig. Her skiller ekte måling seg fra regning med penger. I økonomien har vi definisjoner og regler som gjør at dette problemet unngås. Kontinuitet synes vanskelig å begripe for mange barn i barneskolen. Vi ser litt nærmere på dette i kapittel 8.

2.1.8 Direkte begrep av lengdeenheter

Vi bruker stadig lengdemål i det daglige. Derfor er det viktig at vi har en noenlunde klar forestilling om enhetenes ”absolutte” størrelser og om relasjonene mellom enhetene, det vil si ”relative” størrelser. Hvordan kan vi danne oss et bilde av om elevene har slik kjennskap til de ”absolutte” størrelsene? Det enkleste er å be elevene bruke enhetene til å si noe om lengder i kjente situasjoner.

2.2 Oppgaver med lengdemåling og lengdeenheter

2.2.1 Absolutt forståelse av de metriske enhetene

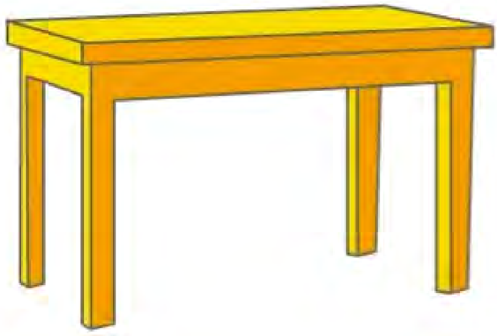
Høyden og størrelsen til et bord vil variere en del. Likevel kan vi si at et spisebord i Norge er slik at vi kan sitte inntil det med knærne under det. Alle har erfart det. Men hvor høyt er det egentlig? Det vet barna. Oppgaven nedenfor dreier seg derfor ikke om kunnskap som gjelder bord, men om barna har en oversikt over viktige måleenheter.

Oppgave 1

Dette er en tegning av et spisebord.

Omtrent hvor høyt er det i virkeligheten?

- 10 mm
- 1 cm
- 10 cm
- 1 m
- 10 m



Oppgaveeksempel 1: Oppgave 1 Måling 5 – 7

Spørsmålet var det første for elevene på 6. årstrinn, og nesten alle elevene svarte på det. 82 % av elevene svarte riktig (1 m). Om lag halvparten av de som svarte feil, foreslo 10 cm.

Oppgave 1 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	0
1 m (**Riktig svar**)	82
10 cm	8

Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave 1 Måling 5 – 7

Når feilsvarene var så mange at det gjelder ca. fem elever i en klasse på 20 – 30, kan det tyde på at de er usikre på den grunnleggende lengdeenheten. Men på dette årstrinnet er også mange usikre på en skriftlig prøvesituasjon. Det er vanligvis noen som er usikre på om m betyr meter. Hva betyr nå egentlig cm? En utprøving hvor læreren stiller eleven det samme spørsmålet muntlig, kan gi færre feilsvar.

Spørsmålsstillingen kan også snus på. I neste oppgave skal elevene selv komme med gode eksempler på en lengde som er omtrent en meter.

Oppgave A (ikke med i den elektroniske prøven for Måling 5 – 7) Omtrent hvor lang er en meter? ○ Fra albuen til fingerspissen ○ Fra golvet til hoftehøyde ○ Høyden ~~av~~ til en dør ○ Høyden ~~av~~ til en kjøkkenbenk ○ Bredden ~~av~~ til en hånd

Oppgaveeksempel 2: Oppgave A

Tabell 2 nedenfor viser at ca. 80 % av elevene enten har svart ”Høyden til en kjøkkenbenk”, ”Fra golvet til hoftehøyde” eller begge deler. Dette er de riktige svarene. Omtrent 20 % svarte altså feil på denne oppgaven. Dette er omtrent en like stor del som i oppgave 1. Det vanligste feilsvaret er ”Fra albuen til fingerspissen”.

Oppgave A Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	0
Høyden til en kjøkkenbenk **(Riktig svar)**	26
Fra golvet til hoftehøyde **(Riktig svar)**	42
Både fra golvet til hoftehøyde og høyden på en kjøkkenbenk (Riktig svar)	13

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Oppgave A

Det er vanlig å bruke kroppen for å konkretisere lengdemål fra 1 mm til 1 m. Kroppen har vi med oss. Til en viss grad kjenner vi kroppen vår. Oppgavene 25 og 26 for Måling 5 – 7 nedenfor handler om slike mål.

Oppgave 25

1 mm er omtrent:

○ Bredden til en hånd
○ Et langt skritt
○ Tykkelsen til en lillefinger
○ Tykkelsen til en negl

Oppgaveeksempel 3: Oppgave 25 Måling 5 – 7

Oppgave 25 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	3
Tykkelsen en negl **(Riktig svar)**	73
Tykkelsen en lillefinger	12
Et langt skritt	7

Tabell 3: Prosentvis fordeling. Oppgave 25 Måling 5 – 7

Oppgaveeksempel 4: Oppgave 26 Måling 5 – 7

Oppgave 26 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	8
Bredden en hånd **(Riktig svar)**	56
Tykkelsen en lillefinger	23
Et langt skritt	7

Tabell 4: Prosentvis fordeling. Oppgave 26 Måling 5 – 7

Flest elever, 73 %, kunne angi at 1 mm er omtrent tykkelsen av en negl. Omtrent halvparten av elevene som svarte feil, ca. 12 %, valgte tykkelsen til en lillefinger og 7 % et langt skritt. Færre elever, 56 %, kunne angi at 1 dm er omtrent bredden til en hånd. Omtrent halvparten av elevene som svarte feil, ca. 23 %, valgte også her tykkelsen til lillefingeren. Det er god grunn til å arbeide mye med de absolutte størrelsene på enhetene. I kapittel 8 kan en se mer på dette.

2.2.2 Forholdet mellom lengdeenheter

Lengdeenhetene har et innbyrdes forhold. Definisjonene kan være vanskelige å huske. Forståelsen av og kunnskapen om dette kan undersøkes på flere måter. Oppgaven nedenfor er den enkleste måten å spørre på.

Oppgave B Måling 5 – 7

Hvor mange millimeter er det i en meter? Sett kryss.

☐ 1000 mm
☐ 100 mm
☐ 10 mm
☐ 1 mm

Oppgaveeksempel 5: Oppgave B

Som det framgår av tabell 5 nedenfor visste omtrent 70 % av elevene på 6. årstrinn at det er 1000 mm i en meter. 100 mm var det feilsvaret som var vanligst (19 %).

Oppgave B Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	1
1000 mm (**Riktig svar**)	72
100 mm	19
10 mm	7

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Oppgave B - ikke med i KIM for Måling 5 – 7

Kunnskapen om forholdet mellom lengdeenhetene viser seg også i evnen til å bruke disse i ulike situasjoner. I oppgave 2 Måling 5 – 7 nedenfor vil det trolig ikke være noe problem å regne ut at tårnet er 70 cm høyt. Utfordringen ligger i å uttrykke dette ved hjelp av de andre enhetene.

Oppgaveeksempel 6: Oppgave 2   Måling 5 – 7

Vi ser av tabell 6 nedenfor at omtrent 60 % svarte enten 7,0 dm, 0,7 m eller begge deler, som var riktige svar.

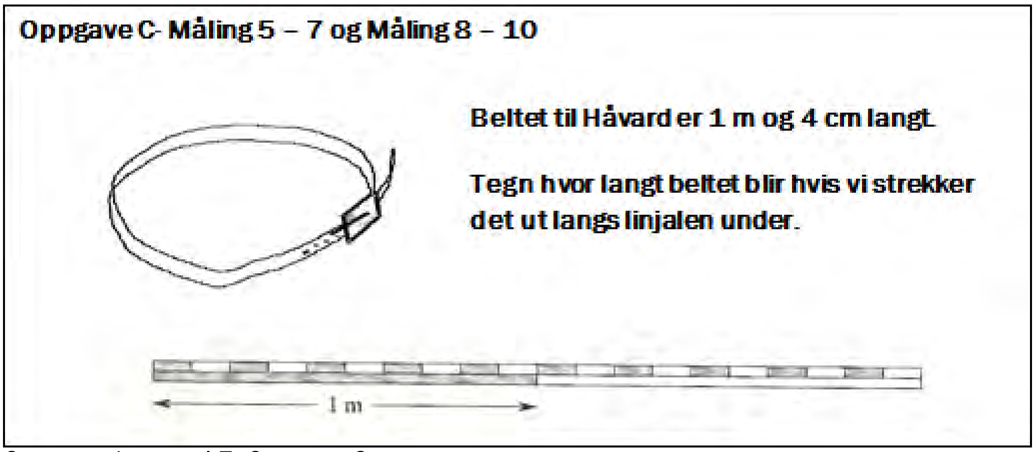
Oppgave 2 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
0,7 m (**Riktig svar**)	30
7,0 cm	20
7,0 m	12
Andre svar	30

Tabell 6: Prosentvis fordeling. Oppgave 2   Måling 5 – 7

Ved å eliminere "opplagte feil" ville det ikke være vanskelig å tippe ett av de riktige svarene. Den viktigste informasjonen i svarfordelingen er kanskje at bare ca. 4 % av elevene klarte å angi begge de riktige svarene. Av de elevene som svarte feil, valgte halvparten, ca 20 %, 7,0 cm. Elevene velger et svar som hadde samme benevning som oppgaven (cm), de kan vurdere på tegningen (ca. 5 cm), eller de kan tro at 7,0 cm er 7 ganger så langt som 10 cm, det vil si at de har problem med desimaltall. At hele 12 % av elevene tror at tårnet med 7 klosser som hver er 10 cm høye, er 7 meter høyt, er overraskende.

Svarene på oppgavene ovenfor viser at det er stor usikkerhet blant 11 år gamle elever når det gjelder størrelsen på måleenhetene. Det tyder også på at det er større usikkerhet med hensyn til enhetene desimeter og millimeter enn meter.

Oppgaven viser en gjenstand som skal måles, og en målestav gitt som et bilde, langt fra den virkelige størrelsen.



Oppgaveeksempel 7: Oppgave C

7 – 8 % av elevene svarte ikke på denne oppgaven. Det kan tyde på at de har klart å forestille seg situasjonen som beskrives i teksten. Poenget med oppgaven var å se hvordan elevene markerer de 4 cm. Utfordringen ligger i at målestaven er inndelt i meter og desimeter.

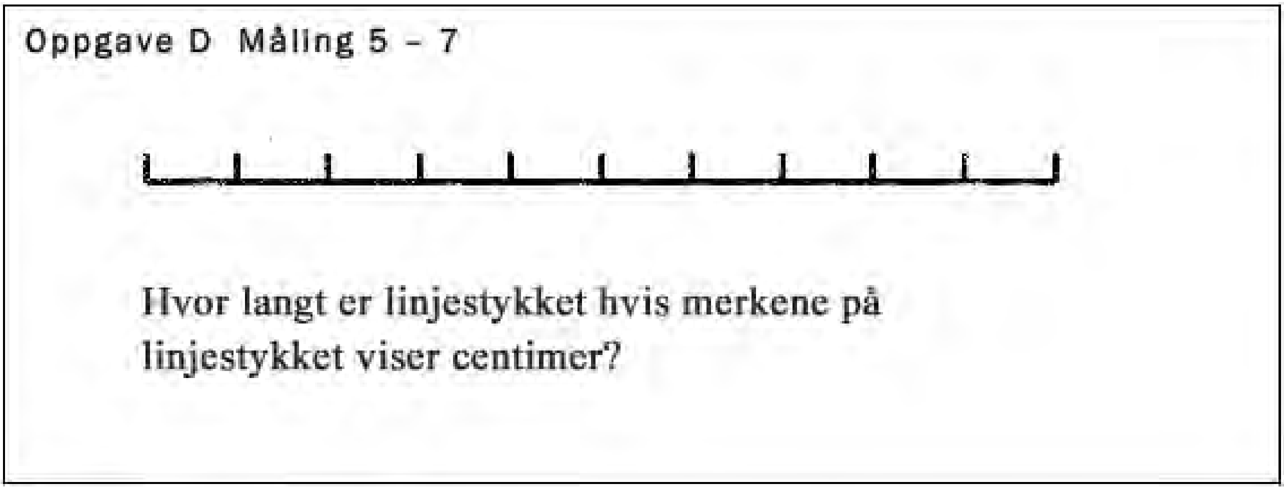
På 6. årstrinn klarte 36 % å markere tydelig mellom 1,0 m og 1,1 m, som godtas som riktig svar. På 9. årstrinn klarte 67 % å markere riktig. Den hyppigste feilen var å markere 1,4 m, med henholdsvis 23 % og 16 % på de to trinnene. Det viser usikkerhet når det gjelder rekkefølgen i inndelingen meter – desimeter – centimeter.

Oppgave C Måling 5 – 7 og Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	8	7
Mellom 1,0 og 1,1 **(Riktig svar)**	36	67
Omtrent 1,4	23	16
Mellom 1,45 og 2	14	3

Tabell 7: Prosentvis fordeling. Oppgave C

2.2.3 Måling

Å kunne starte med null er en viktig ferdighet i måling. Mange elever gjør feil her. Det henger sammen med at læring av måling starter med å telle enheter. Etter hvert bør elevene frigjøre seg fra telling for å lese av på en skala. Overgangen medfører at elevene forstår at det ikke er delestrekene på skalaen de skal telle. I lengdemål markerer delestrekene at vi for eksempel går fra en centimeter til den neste. Det er intervallene som markerer enhetene (centimeter) Den første delestreken skal derfor ikke regnes med.



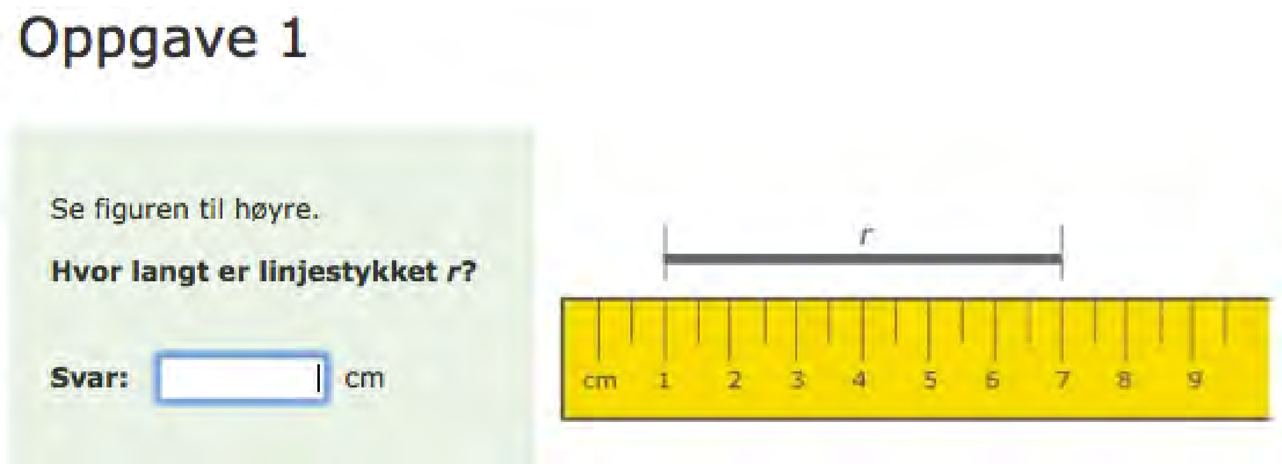
Oppgaveeksempel 8: Oppgave D

Omtrent 50 % av elevene svarte korrekt, 10 cm eller 1 dm. Ytterligere 10 % viser at de har tenkt riktig, men glemt å ta med benevning. Omtrent 10 % av elevene har startet med å telle fra 1. Linjestykket i oppgaven er med hensikt tegnet slik at skalaen ikke blir helt riktig. Det avslører at 9 % av elevene har brukt vanlig linjal og målt linjestykket. De har fått ca. 10,4 cm. Disse elevene viser at de kan måle, men de har problemer med å akseptere informasjonen som er gitt i oppgaven.

Oppgave D Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	7
10 cm eller 1 dm (Riktig svar)	50
11 cm (eller 11)	10
Har målt med linjal. Svar ca. 10,4 cm	9
1 m	6

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Oppgave D

En annen oppgave, oppgave 30 Måling 5 – 7 og oppgave 1 Måling 8 – 10, inviterer mer direkte til at elevene gjør feilen å måle fra 1, og ikke fra 0. Denne situasjonen er nærmere vanlig måling enn i oppgave D ovenfor ved at linjalen er lagt ved siden av linjestykket.



Oppgaveeksempel 9: Oppgave 30 Måling 5 – 7

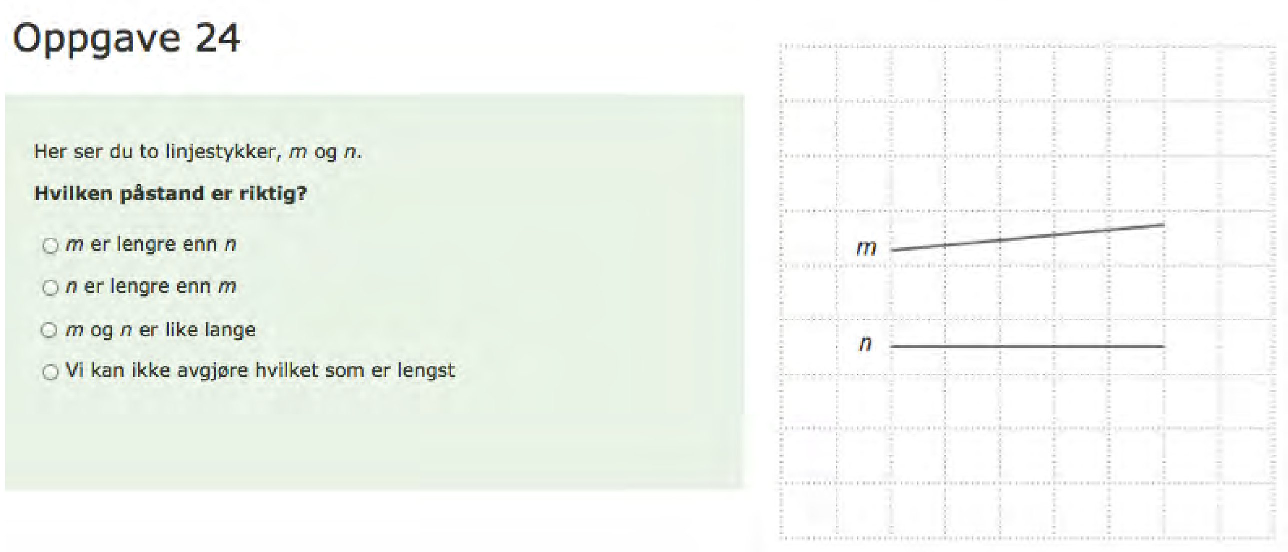
Bare 50 % av elevene på 6. årstrinn svarte 6 cm eller 6, som er det riktige svaret. Men 79 % på 9. årstrinn ga de samme svarene. Det vanligste feilsvaret var 7 cm eller bare 7. Omtren25 % på 6. årstrinn og 15 % på 9. årstrinn ga et slikt svar. Det kan tyde på usikkerhet i bruk av linjal til måling. Heller ikke denne figuren var tegnet i riktig skala, og 9 % på 6. årstrinn brukte egen linjal til å måle lengden av linjestykket. Det er omtrent som på oppgave D ovenfor. På 9. årstrinn var det langt færre som målte med egen linjal.

Oppgave 30 Måling 5 – 7 Oppgave 1 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	1
6 cm eller 6 (Riktig svar)	50	79
7 cm	25	15
6,4 cm, har målt med linjal	9	1

Tabell 9: Prosentvis fordeling. Oppgave 30 Måling 5 – 7 og oppgave 30 Måling 5 – 7

2.2.4 Flytte og sammenligne

Svarene på oppgave 24 Måling 5 – 7 og oppgave 8 Måling 8 – 10 nedenfor kan tolkes på ulike måter.



Oppgaveeksempel 10: Oppgave 24 Måling 5 – 7 og oppgave 8 Måling 8 – 10

Oppgave 24 Måling 5 – 7 Oppgave 8 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	1
$m > n$ (Riktig)	32	52
$m=n$	63	44

Tabell 10:Prosentvis fordeling. Oppgave 24 Måling 5 – 7 og oppgave 8 Måling 8 – 10

Mønsteret av kvadratiske ruter gjør det lett å sammenligne lengden av linjestykkene *m* og *n*. Hvordan vet vi at *m* er lengre enn *n*?

La oss ta utgangspunkt i *n*. Hvis venstre endepunkt holdes fast og vi dreier linjestykket mot urviseren, vil høyre endepunkt ikke bare gå oppover, men også mot venstre. Endepunktet vil forlate den markerte vertikale linja i rutemønsteret. Når *n* er parallell med *m*, vil høyre endepunkt ikke lenger nå fram til linja i rutemønsteret. Altså må *n* være kortere enn *m* (altså *m* er lengre enn *n*).

Passeren er et tjenlig redskap til å vise dette. Elevene har sikkert selv erfart at det å ”holde” en lengde ved hjelp av utstrakte armer kan være vanskelig. Introduksjonen av passeren for å ”holde på” en lenge mellom de to spissene gir mening både i oppgaver som er nevnt ovenfor, og når vi senere skal "definere" sirkelen som *alle punktene ned samme avstand fra sentrum*. Vi ser at henholdsvis 32 % og 52 % av elevene på de to årstrinnene ser at *m* er lengre enn *n*, mens henholdsvis 63 % og 44 % mener at de er like lange.

Linjestykkene er tegnet slik at ved bruk av vanlig linjal vil elevene i begge tilfeller måle til 4,0 cm. Elevene som "kontrollerer", vil dermed lett svare at linjestykkene er like lange. Vi skjønner at det ikke er selvsagt for elevene at "avstanden mellom parallelle linjer måles langs en normal til linjene", eller at "avstanden mellom et punkt og en rett linje måles langs normalen." Å forklare avstanden som "den korteste veien" mellom to objekter, er litt diffust for mange.

Usikkerheten med lengder til linjestykker som går i ulike retninger, illustreres, også med en mer praktisk oppgave, oppgaveeksempel 11. Oppgave 2 Måling 8 - 10 og oppgave 20 Måling 5 – 7, er mer sammensatt og forutsetter at elevene tolker oppgaven slik at de kan finne omkretsen ved å legge sammen lengden til sidene.

Oppgaveeksempel 11: Oppgave 20 Måling 5 – 7 og oppgave 20 Måling 8 – 10

For elver som ser at diagonalene i de kvadratiske rutene er lengre enn sidene i kvadratet, må omkretsen bli større enn 8 cm. Henholdsvis 34 % og 49 % av elevene på de to årstrinnene svarte dette.

Oppgave 20 Måling 5 – 7 Oppgave 2 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	3	2
Mer enn 8 cm (**Riktig svar**)	34	49
8 cm	24	29
Mindre enn 8 cm	28	17
Vi kan ikke vite det	9	3

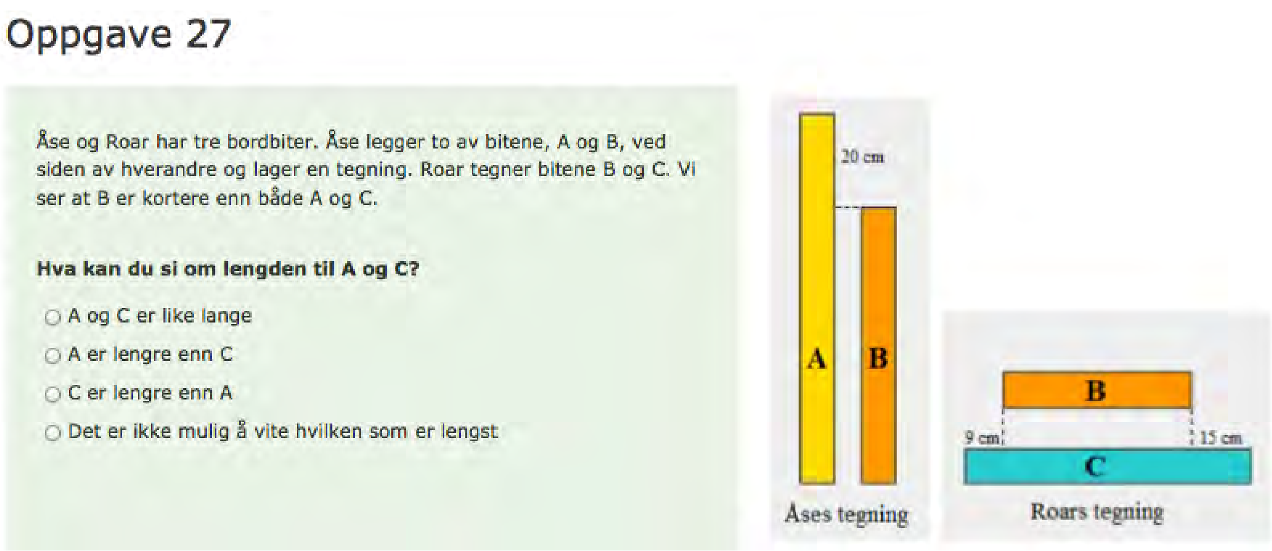
Tabell 11: Prosentvis fordeling. Oppgave 20 Måling 5 – 7 = Oppgave 20 Måling 8 – 10

Omtrent hver fjerde elev på begge årstrinn svarte at omkretsen er 8 cm, noen flere på 9. årstrinn enn på 6. årstrinn! Omtrent like mange elever svarte at omkretsen er mindre enn 8 cm, færre etter 9. årstrinn enn 6. årstrinn. Dette tyder på at over halvparten av elevene har problemer med å "flytte med seg det 1 cm lange linjestykket" og sammenligne med lengden til sidene i figuren.

Denne oppgaven er tegnet i riktig skala. Oppgaven kan dermed tilsløre at en del av elevene som svarer riktig, likevel har det problemet vi har nevnt ovenfor. Ved hjelp av linjal kan de måle diagonalen til ca. 1,4 cm. Ved å sette mål på sidene kommer de fram til riktig svar.

I oppgaven ovenfor ønsket vi å undersøke om elevene er i stand til å flytte med seg et mål (1 cm) omkring i figuren og sammenligne med linjestykkene som danner omkretsen. Når forholdsvis få svarte riktig, kan det skyldes at de ikke hadde denne evnen, men det også skyldes at det å beregne omkrets er et problem for mange.

Oppgavene som er gjengitt i oppgaveeksemplene 8 – 11, er hentet fra Dickson, Brown & Gibson (1984). De refererer til en stor matematikkundersøkelse i England på begynnelsen av 1980-tallet. CSMS-undersøkelse. I oppgave D Måling 5 -7 har denne undersøkelsen 79 % riktige svar for tolvåringer. De norske resultatene er betydelig svakere, også når aldersforskjellen på ett år tas i betraktning. For oppgavene i de andre oppgaveeksemplene samsvarer de norske resultatene godt med CSMS-undersøkelsen.



Oppgaveeksempel 12: Oppgave 27 Måling 5 – 7 og oppgave 3 Måling 8 – 10

Denne oppgaven gir en annen tilnærming til problemet. Her er to situasjoner gjengitt i forskjellig målestokk. I de to situasjonene er det en felles referanse for lengdene ved at bord B inngår i figurene. For øvrig er lengdene målsatt, men ikke samme skala. I denne oppgaven får elevene ingen nytte av å bruke linjal. Hvis elevene måler på tegning , finner de at A er større enn C. Omtrent fire av fem elever på 6. årstrinn og to av fem på 9. årstrinn svarte dette. Henholdsvis 11 % og 47 % svarte riktig, at C en lengre enn A.

Oppgave 27 Måling 5 – 7 Oppgave 3 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	5
C er lengre enn A **(Riktig svar)**	11	47
A og C er like lange C	5	3
A er lengre enn C	80	41
Det er ikke mulig å vite hvilken som er lengst	3	3

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave 27 Måling 5 – 7 og oppgave 3 Måling 8 – 10

Det er god grunn til å spørre om en så komplisert oppgave måler det den er ment å skulle måle. Er oppgaven for omfattende til at 11 år gamle elever kan få oversikt? I så fall skyldes dette kanskje at de ikke ser at bordbit B går igjen i begge figurene? Hvilke andre grunner kan det være til at elevene svarer feil?

Opprinnelig ble elevene på 9. årstrinn bedt om å forklare hvorfor de svarte som de gjorde. Omtrent en firedel av elevene ga ingen forklaring. Omtrent 41 % tok utgangspunkt i at B var felles, og at tillegget til B var 24 cm for C og 20 cm for A. Dermed måtte C være lengre enn A. Omtrent 8 % viste til at de hadde målt. Av andre svar er en stor gruppe ”Vi ser det”. Noen tar bare utgangspunkt i tallene og viser til 20 cm og 15 cm, men overser de 9 cm i den andre enden av C.

Oppgave 3 Måling 8 – 10 Forklaring	9. årstrinn
Ubesvart	24
Viser til at 24 cm er lengre enn 20 cm **(Riktig svar)**	41
”Vi ser det”	6
Måling (med linjal)	8

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Forklaring. Oppgave 3 Måling 8 – 10

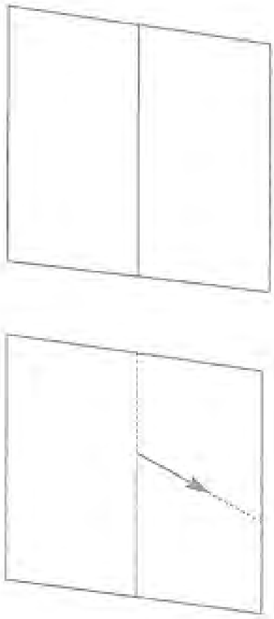
For 14 år gamle elever synes dermed oppgaven å fungere bra. Den skiller ut elever som viser at de har tilegnet seg transitivitet angående lengder. For de andre elevene vil det være svært aktuelt med samtaler, hvor de muntlig kan forklare hvordan de tenker.

Kapittel 3 Areal

Er det plass her til bildet? Ikke sjelden er det tilstrekkelig med et raskt overblikk for å få nødvendig informasjon om areal. Da ser vi gjerne på lengde og bredde hver for seg. Størrelsen vurderes i forhold til yttermålene. Formen kan også spille inn i vurderingen. Noen ganger ikke kunnskap om største lengde eller største bredde nok. *Hvor mange fliser må jeg ha til denne veggen? Hvor mange kilogram plenfrø trenger jeg til denne delen av hagen?* Da må vi regne ut arealet.

Arealbegrepet synes uklart for mange elever. Slik som andre begrep utvikles arealbegrepet gjennom erfaringer og refleksjon. Hvordan kan vi legge forholdene til rette for at elevene skal utvikle viktige sider ved begrepet, slik at de for eksempel ser at areal og lengde ikke er det samme, men at arealet angir størrelsen til en flate (to dimensjoner)? Hvilke problemstillinger motiverer elevene til å bruke areal, slik at de utvikler arealbegrepet? Alle elever har erfaringer fra situasjoner utenfor skolen. Lek kan fremme behovet for å vurdere både formen og størrelsen til en planfigur. Nedenfor ser vi eksempel på en slik lek.

Å kappe land



To deltakere risser opp to "land" inntil hverandre på hardtrampet bakke. Områdene bør ha omtrent like stort areal.

Deltaker 1 stiller seg i sitt land og kaster kniven slik at den står i motstanderens land. Han risser langsetter knivbladet, slik at landet deles i to. Deltaker 2 må gi fra seg den ene delen.

Deltaker 2 stiller seg i det som er igjen av sitt land, og kaster kniven i landet som deltaker 1. Og så videre.

Den vinner som klarer å avgrense motstanderens land så mye at han ikke kan stå i det uten å tråkke på en av grensene.

Aktivitet 1: Å kappe land

Hvis vi ikke ønsker å bruke kniv, kan vi bruke en annen gjenstand som angir retning, for eksempel en liten pinne. I denne leken er arealet til områdene (landene) det sentrale. Men formen kan også avgjøre om eleven har plass til å sette foten i eget land. Linjene som stadig forskyves, danner grensene (omkretsen), men har for øvrig liten betydning. Stadig vekk må områdenes (landenes) areal vurderes, både når eleven skal gi fra seg en del av landet, og når eleven skal sikte på et sted å kaste kniven. Det er landene som elevene spiller om.
I skolen kan vi også starte med å legge opp til enkle situasjoner. Et vanlig råd er å arbeide med å dekke flater med arealenheter som ikke er kvadratiske, siden kvadratet senere skal definere arealenhetene. Når elevene har innsett at begrensede områder eksisterer, blir neste skritt å kunne danne seg et bilde av arealet (altså størrelsen til det begrensede området). Vi voksne har gjennom skolegangen lært ulike beregningsmåter. Det er sjelden vi teller arealenheter i dagliglivet. Hvis vi har behov for å kjenne arealet til en flate, sammenligner vi det oftest med mangekanter og sirkel.

Rektanglet er den mest brukte figuren i arealberegning. Vi har lært oss å multiplisere lengde og bredde:

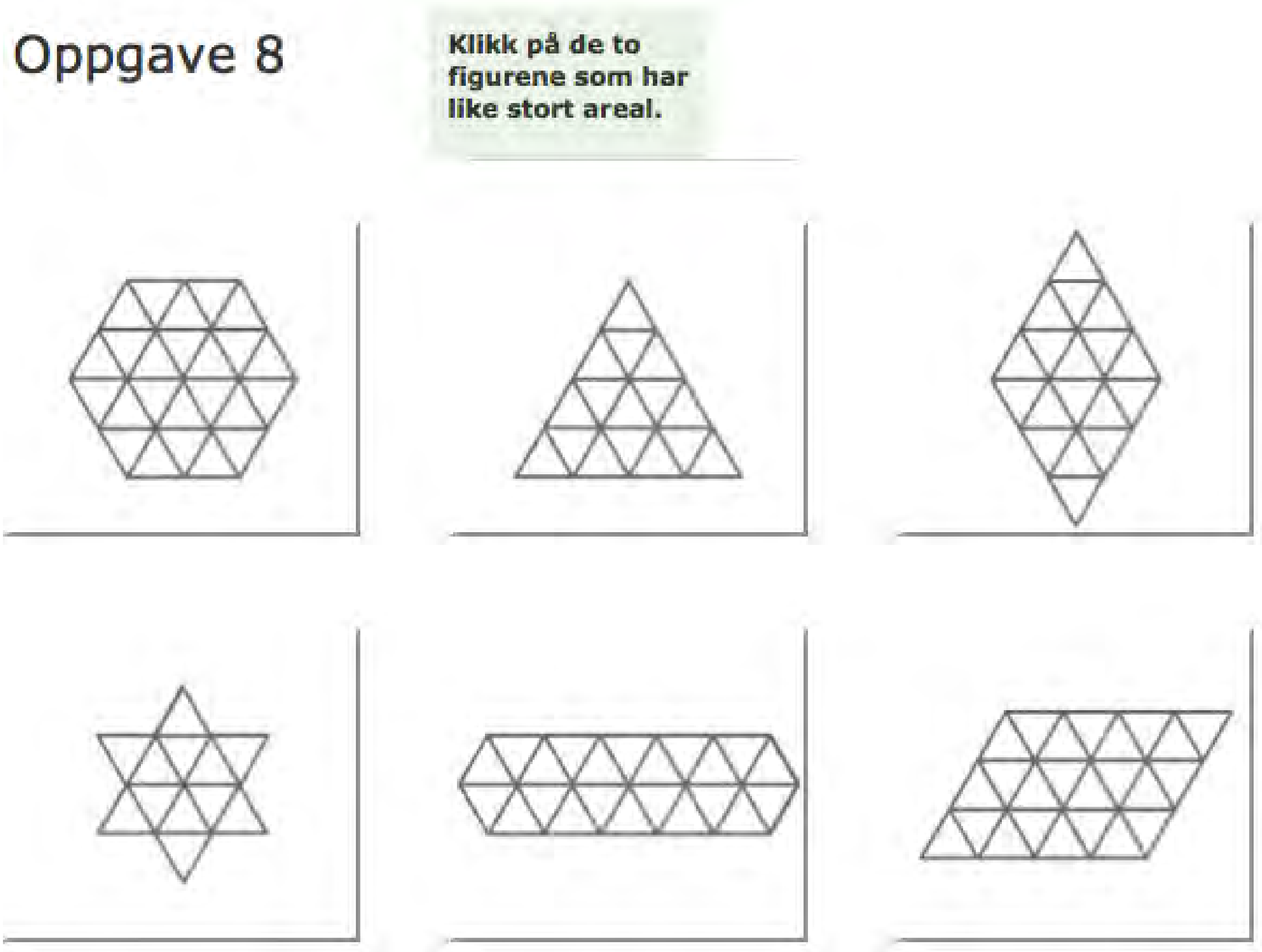
$$A = l \cdot b$$

Hvis lengden og bredden oppgis i meter, kommer rektanglet ut i kvadratmeter. Formelen viser tydelig (for elever som kan lese formler) at det er to dimensjoner som avgjør arealet til rektanglet. For å arbeide inn denne forståelsen kan det være aktuelt med oppgaver hvor vi går ut fra et bestemt areal, men endrer formen på figuren.

Etter hvert som vi venner oss til å regne ut et areal, blir vi kanskje mindre bevisst at areal, som andre målbare størrelser, bygger på enheter som vi kan telle sammen. Men også for areal gjelder det at full forståelse forutsetter at areal oppfattes som en kontinuerlig størrelse. For å vurdere om elevene oppfatter areal som et eget begrep, er det vanlig å la elevene møte problemstillinger hvor det ikke er lett å gjøre beregninger på grunnlag av lengdemål. Ofte bruker vi da flateenheter som kan telles direkte.

3.1 Telling av arealenheter

Oppgave 8 Måling 5 – 7 og oppgave 17 Måling 8 – 10 nedenfor undersøker om elevene er i stand til å vurdere areal gjennom telling av enheter.



Oppgaveeksempel 13: Oppgave 8 Måling 5 – 7 og oppgave 17 Måling 8 – 10

Oppgave 8 Måling 5 – 7 Oppgave 17 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	8
A og F (Riktig svar)	51	63
B og C	6	5
F og C	12	5

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Måling 5 – 7 og oppgave 17 Måling 8 – 10

Vi ser at ca. 51 % av elevene på 6. årstrinn og ca. 63 % av elevene på 9. årstrinn finner riktige figurer. Det er selvsagt mulig å tippe riktig uten å telle. Formen på figurene gjør at noen elever fort tipper feil. Det må antas at de fleste elevene som har svart feil, ikke har telt. Men noen kan ha telt feil. Liten forskjell i størrelse forklarer valget av B og C, mens tilnærmet formlikhet kan forklare at noen velger F og C.

Ut fra svarene kan det synes som om omtrent halvparten av elevene ikke velger å telle like enheter når det ikke er aktuelt med beregning. Oppgaven er hentet fra Dickson, Browne & Gibson (1984). De viser til at mindre enn 70 % av femtenåringer i USA har svart riktig på en tilsvarende oppgave. Dette svarer godt til våre resultater for elever på 11,5 år og 14,5 år.

3.2 Konservering

Hva skjer med arealet til en figur som deles opp og settes sammen på en ny måte? Spørsmålsstillingen kan påvirke svarene. Oppgave 12 Måling 5 – 7 går egentlig ut på at man klipper av to firedeler av sirkelen og setter dem tilbake etter at de har byttet plass.

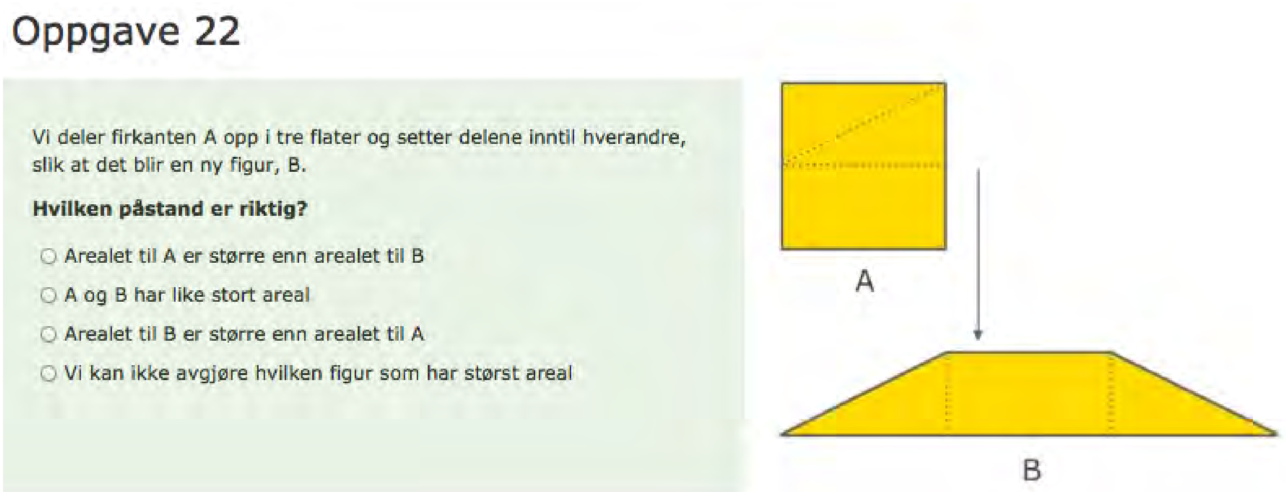
Oppgaveeksempel 14: Oppgave 12 Måling 5 – 7

De fleste ser at arealet er det samme, men 23 % av elevene på 6. årstrinn mener at arealene ikke er like store.

Oppgave 12 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
A og B har like stort areal (Riktig)	61
A har større areal enn B	13
B har større areal enn A	10
Vi kan ikke avgjøre hvilken figur som har størst areal.	8

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave 12 Måling 5 – 7

Oppgave 22 og 23 Måling 5 – 7 og oppgave 6 og 7 Måling 8 – 10 synes å legge enda klarere opp til at arealene er like store ved at det ettertrykkelig står at det er de samme delene som danner den nye figuren.[1] Til gjengjeld kan vi ikke like direkte sammenligne figurene.



Oppgaveeksempel 15: Oppgave 22 Måling 5 - 7 og oppgave 7 Måling 8 – 10. Areal

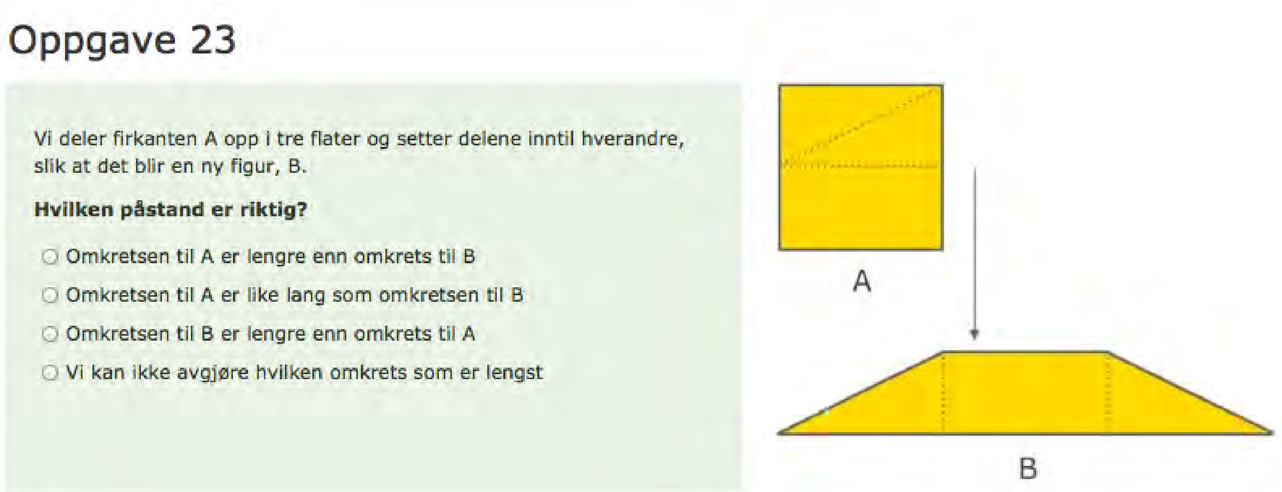
[1] Strengt tatt er ikke dette ikke helt riktig. Vi må speilvende en av trekantene for å kunne sette sammen den nye figuren.

Nå er det under halvparten, 48 %, av elevene på 6. årstrinn og 71 % av elevene på 9. årstrinn som svarer riktig.

Oppgave 22 Måling 5 – 7 Oppgave 7 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	8	3
A og B har like stort areal (Riktig)	48	71
A har større areal enn B	9	4
B har større areal enn A	30	18
Vi kan ikke avgjøre hvilken figur som har størst areal	4	3

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave 22 Måling 5 – 7 og oppgave 7 Måling 8 – 10

Figurenes form har i stor grad påvirket svarene, henholdsvis 30 % og 18 % mener at den langstrakte figuren hadde størst areal.
Elevene ble også spurt om omkretsen. Dette er oppgave 23 Måling 5 – 7 og oppgave 6 Måling 8 – 10



Oppgaveeksempel 16: Oppgave 23 Måling 5 – 7 og oppgave 6 Måling 8 – 10. Omkrets

B har betydelig større omkrets enn A. Noen få elever svarte at omkretsen til de to figurene var like stor. Kanskje er det for noen en overgeneralisering av konservering. Henholdsvis 55 % og 72 % svarte riktig, og henholdsvis 15 % og 10 % av elevene på de to årstrinnene mener at omkretsen til A er større enn omkretsen til B.

Oppgave 23 Måling 5 – 7 Oppgave 6 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	19	8
B har større areal enn A **(Riktig svar)**	55	72
A og B har like stort areal	7	7
A har større areal enn B	15	10
Vi kan ikke avgjøre hvilken omkrets som er lengst	3	2

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 23 Måling 5 – 7 og oppgave 6 Måling 8 – 10

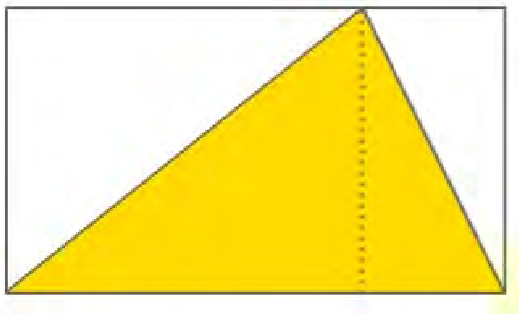
Oppgave 14 Måling 5 – 7 og oppgave 25 Måling 8 – 10 kan ha enkelte likhetstrekk med oppgaven ovenfor (om areal). Nå skal areal vurderes når halvparten av et rektangel fjernes. Det er ikke umiddelbart klart for alle elever at det er nettopp dette som skjer.

Oppgave 14

Arealet til hele rektanglet er 20 cm².

Hvor stort areal har den fargelagte delen?

Svar: ______ cm²



Oppgaveeksempel 17: Oppgave 14 Måling 5 – 7 og oppgave 25 Måling 8 – 10.

Det var forholdsvis mange elever som ikke svarte på denne oppgaven, hhv. 16 % og 21 %.

Oppgave 14 Måling 5 – 7 Oppgave 25 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	16	21
10 (**Riktig svar**)	32	45
20	7	2
Måler med linjal og regner ut arealet. Svar i området 7 - 8 cm²	2	6
12 - 13 eller lignende. Måler omkretsen til trekanten	12	8
15 - 16 Måler omkretsen til rektanglet	4	4

Tabell 18: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 Måling 5 – 7 og oppgave 25 Måling 8 – 10

Det var bare henholdsvis 32 % og 45 % av elevene på de to årstrinnene som svarte korrekt, 10 cm². En del elever, spesielt på 9. årstrinn, synes å ha målt med linjal og regnet ut et areal som ligger i området 7 – 8 cm². De andre svarene kan ha kommet fram ved at elevene har målt omkretsen av trekanten og til rektanglet.

Dickson, Brown og Gibson (1984) viser til at 47 % av elleveåringer og 50 % femten-åringer i USA har svart riktig på en tilsvarende oppgave. Det svarer godt til våre resultater for elever på 14 år. Forholdsvis få av elleveåringene våre har svart riktig.

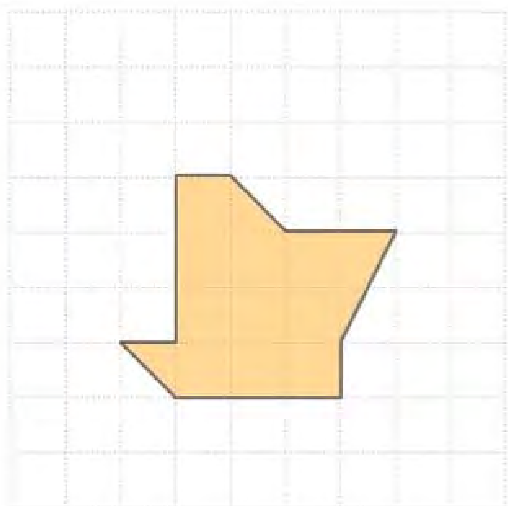
Er elevene i stand til å arbeide med deler av arealenheter uten at disse enhetene gis i form av desimaltall? Oppgaven nedenfor innbyr elevene til å telle, men slik at de skal regne med delte ruter.

Oppgave 11

Hver rute i rutenettet er 1 cm².

Hvor stort areal har figuren i rutenettet?

Svar: ______ cm²



Oppgaveeksempel 18: Oppgave 11 Måling 5 – 7

Oppgaven ble bare gitt til elevene på 6. årstrinn. Noen teller bare med de hele rutene og får svaret 10. Noen teller med alle de aktuelle rutene, men tar ikke hensyn til at noen av dem er delt. De får dermed 14 som svar. Til sammen er det ca. 7 % som dermed ikke regner med deler av enheter.

49 % av elevene tar med deler av ruter og teller sammen til 12. I tillegg har en del fått 11 eller mellom 11 og 12. Disse elevene har trolig arbeidet med deler av enheten, men regnet feil.

Svaret 15 kan vi få ved en feilaktig vurdering av omkretsen til figuren. Randen til figuren passerer gjennom eller følger sidekantene til 15 ruter. Det tyder på at en stor del av elevene på dette årstrinnet har problemer med å skille mellom omkrets og areal.

Oppgave 11 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	10
12 cm^2 eller 12 **(Riktig svar)**	49
Mellom 11 og 12 (cm^2)	7
11 cm^2 eller 11	4
15 cm^2 eller 15	19

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 Måling 5 – 7

3.3 Arealmål

Elevene får gjennom sitt arbeid etter hvert forestillinger om hvor store de fysiske størrelsene er og enhetene som disse størrelsene har. Mange kan mer eller mindre nøyaktig anslå lengder. Lengdemål brukes mye, og elevene lærer seg til å assosiere med kroppsdeler. Høyden til et menneske bedømmes gjerne forholdsvis nøyaktig, i det minste hvis vi står framfor vedkommende. Andre lengdemål kan være mer problematiske.

Vi blir sjeldnere stilt overfor spørsmål om arealer. Hvilke arealenheter er elevene kjent med? Bordplaten, et skriveark, rommet de bor i, klasserommet osv. kan ha vært vurdert med hensyn til hva de kan få plass til.

Nedenfor er det gjengitt en oppgave hvor vi ut fra møblering og plassering av dør og vindu skal gi en vurdering av golvarealet i et rom. Rommet kan for et trenet øye antas å ha en lengde på ca. 5 m og en dybde på noe over 2 m. Arealet burde dermed være noe over 10 m^2. Men vurdert ut fra møblene kan vi se at det er plass til et skap, en sovesofa, en stol og en skrivepult. Fortsatt er om lag halvparten av golvet uten møbler. Det skulle også tilsi omtrent 10 m^2.

Oppgaveeksempel 19: Oppgave 6 Måling 5 – 7 og oppgave 16 Måling 8 – 10

Oppgave 6 Måling 5 – 7* Oppgave 16 Måling 8 – 10*	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	21
1-5	26	8
6-10	30	24
11-15	11	22
16-20	9	12
21-25	2	6
26-	16	8

Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 Måling 5 – 7 og oppgave 16 Måling 8 – 10
*Fasit i elektronisk prøve er satt til mellom 8 og 16 m^2.

Av elevene på 6. årstrinn svarer 26 % 5 m^2 eller mindre. På 9. årstrinn foreslo ca. 8 % et slikt svar. Noe under halvparten av elevene på begge årstrinnene ga et ”realistisk” tall mellom 6 og 15 m^2, henholdsvis 41 % og 46 %. Usikkerheten blant elevene viser seg også ved at henholdsvis ca. 18 % og 14 % foreslo mer enn 20 m^2. Grunnen til at hele 20 % av elevene på 9. årstrinn unnlot å svare, er trolig at det på dette årstrinnet var et følgespørsmål: ”Forklar hvordan du fant dette svaret.”

Oppgave 16 Måling 8 – 10 Forklaring	9. årstrinn
Ubesvart	44
Realistisk lengdevurdering med addisjon; riktig multiplisert	10
Realistisk lengdevurdering; riktig multiplisert	10
Realistisk arealvurdering av elementene; summering	2
Urealistisk lengdevurdering; riktig multiplisert	5
Urealistisk lengdevurdering; uriktig multiplisert	1
Sammenligner med eget rom	2

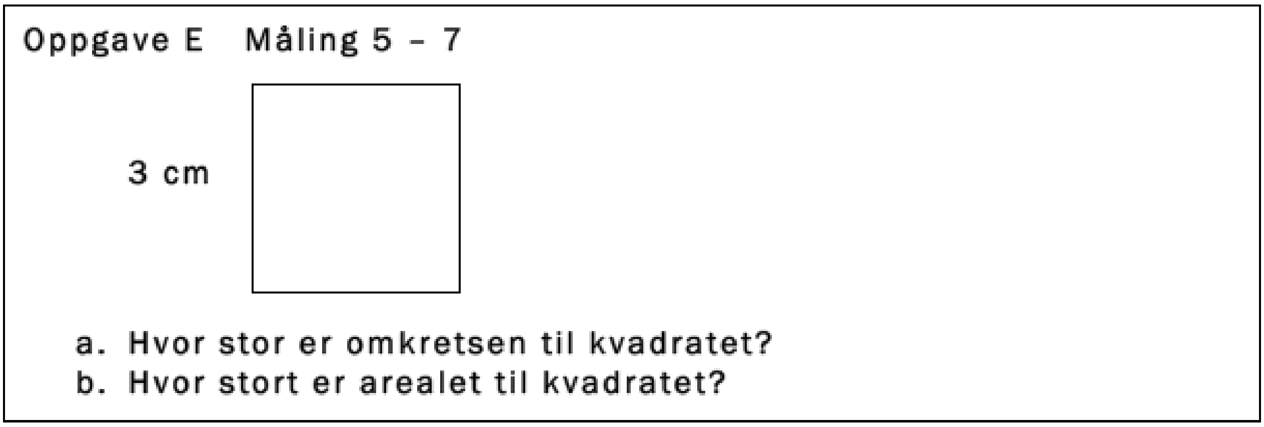
Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Måling 8 – 10. Forklaring.

Det var ikke enkelt å vurdere svarene til de noe over halvparten som forsøker å gi en forklaring. Delvis er svarene knappe, og delvis er de vanskelige å kategorisere. En situasjon hvor elevene kan gi muntlig forklaring, eller hvor læreren kan gi oppfølgende spørsmål, gir mer informasjon.

Omtrent 20 % av elevene gir forklaringer som viser at de gjør realistiske lengde-vurderinger og multipliserer for å finne arealet. Halvparten av disse elevene viser hvordan de kommer fram til lengde og bredde ved å se på møbler, dør og vindu. Noen få (ca. 2 %) vurderer arealbehovet for hvert enkelt møbel og når fram til et realistisk svar. Omtrent like mange sammenligner med eget rom og anslår arealet.

3.3.1 Areal er ikke lengde eller volum

En del elever har problemer med å skille lengde, areal og volum. Spesielt kan begrepet omkrets til en figur være vanskelig for mange. Med oppgaven nedenfor (ikke inkludert i den digitale kartleggingsprøven) prøver vi å finne ut om elevene skiller mellom begrepene omkrets og areal. Læreren kan bruke denne oppgaven for eksempel i samtaler med enkeltelever.



Oppgaveeksempel 20: Oppgave E Måling 5 – 7 – ikke med i KIM

Oppgave Ea Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	8
12 eller 12 cm **(Riktig svar)**	68
3 (cm, cm²)	9
9 (cm, cm²)	4

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave Ea - Omkrets.

Oppgave Eb Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	19
9 (cm²) **(Riktig svar)**	10
9 cm	21
3 (cm, cm²)	12
12 (cm, cm²)	18

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave Eb - Omkrets.

68 % av elevene på 6. årstrinn svarer enten 12 cm eller 12 for omkretsen. Det er også 18 % av elevene som svarer 12 (cm eller cm²) for arealet. Når vi undersøker hvordan hver enkelt elev har besvart disse to spørsmålene, finner vi at tre firedeler av elevene som svarer 12 for arealet, også gir det samme svaret for omkretsen. *Det viser igjen at mange elever har vansker med å skille mellom omkrets og areal*. Bare 10 % regner ut arealet riktig og gir riktig benevning.

En tilsvarende oppgave er brukt i en undersøkelse blant elleveåringer i USA, der 37 % svarte riktig. Det er betydelig flere enn for elleveåringene våre. I den amerikanske undersøkelsen var imidlertid nevningen oppgitt (What is the area of this square? ______ cm²). Det var trolig til stor hjelp for noen elever. Vi trenger gjerne arealmål for å vite hva vi kan plassere på et avgrenset område, eller hva som skal til for å dekke et område.

Oppgaveeksempel 21: Oppgave 28 Måling 8 – 1 0

Omtrent hver fjerde elev i 9. årstrinn unnlot å svare på oppgaven. Omtrent 11 % regnet ut arealet for hver enkelt sideflate og la sammen. Av disse var det noen få som bare tok med de tre synlige sideflatene. Det vanligste feilsvaret var 84. Dette framkommer ved å multiplisere de tre tallene på figuren. 5 % adderte de tre tallene og fikk 14, mens ytterlige 3 % av elevene tydeligvis ser på figuren som en sekskant i papirplanet, regner ut omkretsen av denne og får svaret 28. Denne svarfordelingen tyder på at forståelsen av arealbegrepet er vagt hos mange av elevene.

Oppgave 28 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	26
122 (Riktig svar)	10
84	25
14	5
28	3

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 28 Måling 8 – 1 0

3.4 Måle usikkerhet og gjeldende siffer

I innledningen ble usikkerhet i måltall behandlet. Oppgaven nedenfor forutsetter at elevene etter norsk tradisjon oppfatter lengdemålene gitt med to siffers nøyaktighet (to gjeldende siffer). I hvilken grad gir dette utslag på usikkerheten for arealet som er regnet ut?

Oppgaveeksempel 22: Oppgave 13 Måling 8 – 1 0

Oppgave 13 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	2
71 m² (Riktig svar)	13
70,7 m²	20
70,68 m²	63

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 Måling 8 – 10

Kapittel 4 Volum

Volumbegrepet omfatter både forestillingene om at gjenstander tar plass i rommet, og at gjenstander kan gi plass til for eksempel en væske. Tidligere var det vanlig å snakke om både volum og hulmål. Ordet hulmål er mindre brukt i dag. I noen sammenhenger brukes kapasitet, som er en direkte oversettelse av det engelsk *capacity*. I L97 brukte vi bare ordet volum. Kunnskapsløftet LK06 bruker også bare ordet volum.

På samme måte som en del elever blander samme omkrets og areal til en planfigur, har enkelte elever vansker med å skille mellom overflate og volum til en gjenstand. Areal er mål for størrelsen (flateinnholdet) til en todimensjonal planfigur det vil si en del av *planet*. Volum er mål for størrelsen til en tredimensjonal gjenstand eller rominnholdet i en hul gjenstand, det vil si en del av *rommet*.

4.1 Romsyn

Volumbegrepet forutsetter at vi forestiller oss noe bak den synlige overflaten av gjenstanden; det er snakk om en tredje dimensjon. Uten en slik forestilling er det trolig vanskelig å arbeide meningsfylt med problemstillinger knyttet til volum og hulmål. I oppgavekonstruksjoner må de tre dimensjonene reduseres til to på arket eller skjermen. For elever som har problemer med å oppfatte romfigurer, kan en slik reduksjon muligens gjøre det vanskelig å forstå oppgaven. Elevene nærmer seg lengdemål med å telle lengdeenheter, arealmål med å telle arealenheter. Tilsvarende nærmer elevene seg volummål med å telle volumenheter. Også her kan elevene arbeide med eller uten standardiserte enheter. Når først standardiserte enheter benyttes, har vi den kulturelle arven at hulmål ofte angis i liter og desiliter, mens andre volum angis i kubikkdesimeter og kubikkmeter. De to neste oppgavene kan i noen grad avsløre om elever har en forestilling om det som ligger bak – om de tenker i tre dimensjoner.

Oppgaveeksempel 23: Oppgave 7 Måling 5 – 7

Omtrent 66 % i 6. årstrinn forstår at det må være en kloss i midten av grunnplanet. De elevene som ikke ser for seg denne klossen kan ha problem med å forestille seg at det «indre» av en gjenstand er med på å gi den et volum. Hvis elevene som svarer 5, blir bedt om å forklare hvordan de har tenkt, vil trolig en del rette opp svaret til 6. Andre igjen vil hevde at klossen i midten (eller en annen kloss) er dobbelt så stor som de øvrige. Slik oppgaven er formulert er dette i og for seg riktig. (Sånn sett ville Per hatt nok med fire klosser!) Det viktige er å finne ut hvilke elever som ikke ser at det må være noe i det skjulte rommet.

Oppgave 7 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	2
6 **(Riktig svar)**	66
5	29

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 Måling 5 – 7

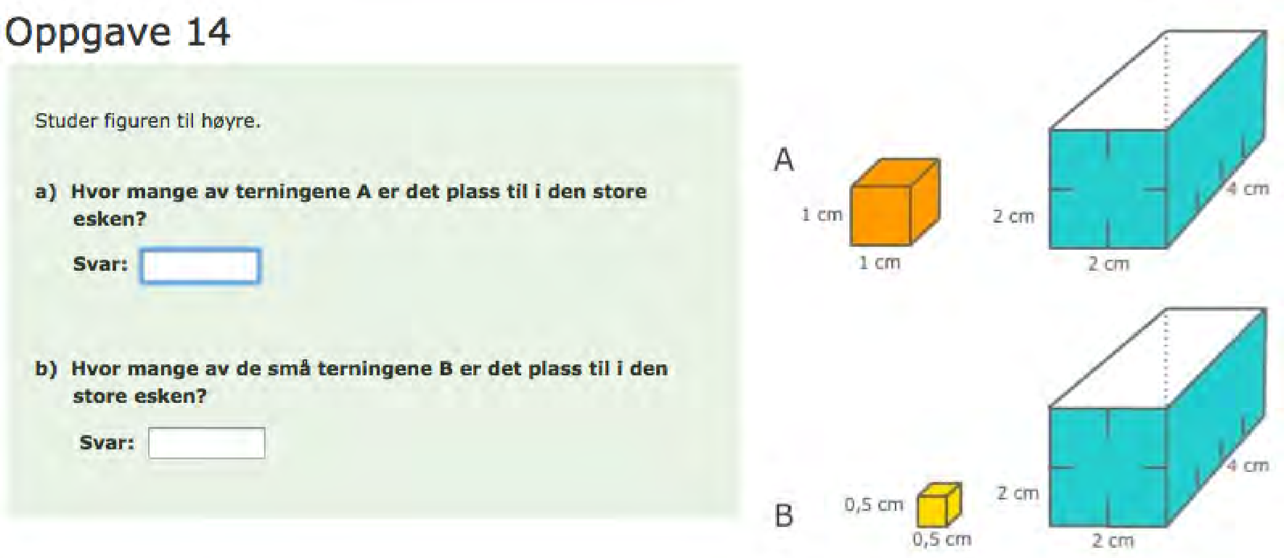
Oppgaven nedenfor prøver også evnen til å ”se i rommet”. Her er en overflatetenkning mer nærliggende enn i den forrige oppgaven. En vanlig strategi for å beregne volum av slike figurer er å tenke seg lag med klosser, enten horisontalt eller vertikalt inndelt. Så multipliserer vi med antall lag. Figuren er såpass omfattende at elevene fort kan gjøre en slurvefeil når det gjelder størrelsen, og dermed få for mange lag innover. Dette kan også skyldes eventuell erfaring med å se på slike rette prismer som terninger.

Oppgaveeksempel 24: Oppgave 5 Måling 5 – 7 og oppgave 15 Måling 8 – 10

Henholdsvis 27 % av elevene i 6. årstrinn og 50 % i 9. årstrinn ser for seg hvordan klossen er bygd opp. De svarer 48, som er korrekt. Noen finner dette svaret ved å multiplisere $4 \cdot 4 \cdot 3$. Andre ser for seg horisontale eller vertikale lag som de adderer. Omtrent 5 % på begge trinn har svart 64. Trolig har disse regnet med fire lag med terninger innover. Disse elevene har i så fall hatt en riktig betraktningsmåte. Det er 14 % på 6. årstrinn og omtrent 9 % på 9. årstrinn som enten svarer 40 eller 80. Tallet 40 får man ved å telle de synlige rutene. 80 får man ved også å se for seg rutene på baksiden. Disse elevene har dermed gjort en beregning av overflaten til klossen.

Noen elever har svart 30, henholdsvis 3 % og 2 %. Disse elevene kan ha telt alle de synlige terningene. En problemstilling å ta opp med disse elevene er om de oppfatter at det kan være et hulrom inne i klossen.. Hvis en slik tankegang forfølges, ville korrekt svar kunne være 42 eller 44.

Det er vanskelig å finne en god forklaring på hvorfor henholdsvis 3 % og 4 % på de to årstrinnene svarte 96. Det kan være at de først multipliserer $4 \cdot 4 \cdot 3$ og får 48, og at de deretter blander inn overflateberegning og kompenserer for den usynlige delen ved å multiplisere med 2? Vi ser at en stor del av elevene på begge årstrinn viser tegn til manglende oppfatning av volum når det er en oppbygd gjenstand. Den neste oppgaven tar for seg et hulmål slik at elevene skal forestille seg at de fyller det med standardenheter.



Oppgaveeksempel 25 Oppgave 4 Måling 5 – 7 og oppgave 14a Måling 8 – 10
Oppgaveeksempel 26: Oppgave 14b Måling 8 – 10

Elevene kan henge seg opp i spørsmålet om de oppgitte målene for esken er innvendige eller utvendige. Hvis de er utvendige og veggene i esken har en tykkelse, vil 3 være riktig svar. De skriftlige svarene på hvordan elevene tenkte, ga få indikasjoner på et slikt resonnement. I klassen kan læreren forklare at vi enten må se bort fra tykkelsen, eller at de oppgitte målene er å regne som innvendige mål.

Oppgave 4 Måling 5 – 7 Oppgave 14a Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	7	8
16 (**Riktig svar**)	36	65
4	5	2
8	17	9
12	7	3
20	4	3
24	6	3

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 3 Måling 5 – 7 og oppgave 14a Måling 8 – 10

Henholdsvis 36 % og 65 % svarte korrekt, 16. Det vanligste feilsvaret var 8. Det tyder på at elevene ”fylte bunnen”. Men tallet kan også komme fram ved at elevene adderer tallene på figuren. Tallet 12 kan komme fram ved at man beregner arealet av den skraverte delen (overflaten). Elevene kan ha forskjellige forklaringer på tallene 4, 20 og 24.

I oppgave 14b Måling 8 – 10 skal elevene fylle den store esken med terninger med sidekanter som er halvparten av sidekantene til oppgave 3 Måling 5 – 7 og oppgave 14b Måling 8 – 10.

Oppgave 14b Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	8
«Åtte ganger 14a» 128 (**Riktig svar**)	14
«To ganger 14a»	50
«Fire ganger 14a»	14

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Oppgave 14b Måling 8 – 10

Når vi sammenligner hvordan de enkelte elevene svarer på oppgavene 14a og 14b ovenfor, legger vi merke til at de fleste elevene multipliserer det svaret de fant i oppgave 14a, med 2, 4 eller 8. Doblingen svarer til at vi bare vurderer en dimensjon, fire ganger så mange vil si at vi vurderer to dimensjoner, og de som multipliserer med åtte, vurderer alle de tre dimensjonene. En videre analyse viser at hele 95 % av de elevene som multipliserer med 8 i 14b-oppgaven, også hadde gitt et korrekt svar i 14a-oppgaven. Motsatt er det 49 % av dem som ga riktig svar på 14a-oppgaven, som nå multipliserer med 2, og 19 % som multipliserer med 4.

4.2 Direkte begrep om volum

Det er vanskelig for elevene å ha en direkte forståelse av volumenheter hvis de har problemer med å forestille seg volum. Oppgaven nedenfor er et forsøk på å prøve om elevene har en klar forestilling om volumenheten liter.

Oppgaveeksempel 27: Oppgave 15 Måling 5 – 7 og oppgave 29 Måling 8 – 10

En rask vurdering tilsier at kurven er omtrent like bred øverst som den er høy. Nederst er den noe smalere.

Hvordan tenker elevene når de vurderer svarene? Noen velger trolig å fjerne ett eller flere av alternativene gjennom praktiske sammenligninger.

- Vil kurven være full hvis vi legger en literskartong med melk i den? Hva med fem kartonger?
- Ville vi kunne løfte kurven hvis den var fylt med vann?

Forholdsvis få elever viser at de gjør et overslag, for eksempel ved å se på papirkurven som en sylinder.

Oppgave 15 Måling 5 – 7 Oppgave 29 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	3	16
20 liter (**Riktig svar**)	22	30
5 liter	48	36
1 liter	20	6

Tabell 30: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 Måling 5 – 7 og oppgave 29 Måling 8 – 10

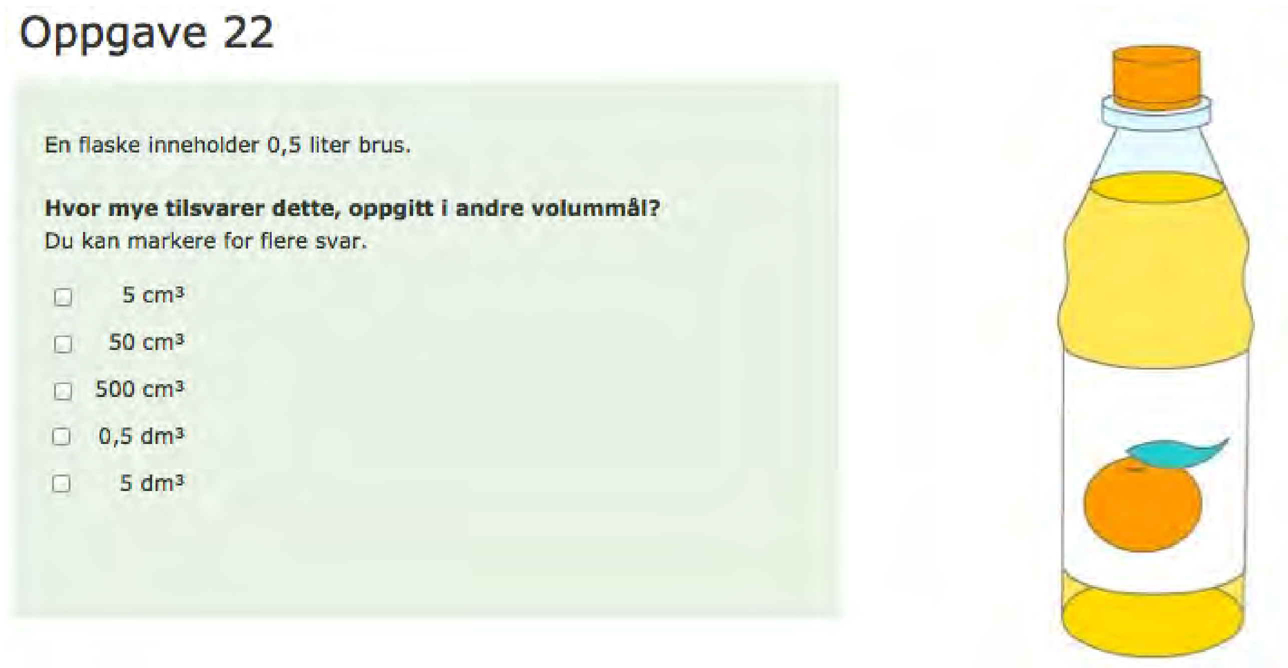
20 liter er det korrekte svaret. Omtrent 22 % på 6. årstrinn og 30 % på 9. årstrinn svarte riktig. Det er interessant å merke seg at selv voksne (lærere) i første omgang bestrider at 20 liter kan

være riktig svar. Svært mange heller til at volumet er omtrent 10 liter, og at oppgaven derfor er misvisende.

Hele henholdsvis 48 % og 36 % svarte 5 liter. Det er ikke oppsiktsvekkende langt fra det riktige, spesielt når en del av disse elevene begrunner svaret med at papirkurven er omtrent like stor som en vaskebøtte. På den andre siden er papirkurver noe vi omgås med i det daglige. Burde vi ha et bedre forhold til størrelsen? Elevene som svarer 1 liter, har en dårlig forestilling om størrelsen av en liter. Det gjelder henholdsvis hele 20 % og 6 % av elevene på disse årstrinnene.

4.3 Forholdet mellom volumenheter

Også når det gjelder volum, kan sammenhengen mellom enhetene være vanskelig å lære. Barn har gjerne omfattende erfaring med brusflasker. En vanlig størrelse på en brusflaske er 0,5 L. Oppgaven nedenfor prøver om elevene kan angi dette volumet i andre enheter.


Oppgave 22

En flaske inneholder 0,5 liter brus.

Hvor mye tilsvarer dette, oppgitt i andre volummål?
Du kan markere for flere svar.

- ☐ 5 cm^3
- ☐ 50 cm^3
- ☐ 500 cm^3
- ☐ 0,5 dm^3
- ☐ 5 dm^3

Oppgaveeksempel 28: Oppgave 22 Måling 8 – 10

Omtrent 35 % av elevene har svart enten 500 cm^3, 0,5 dm^3 eller begge deler.

Oppgave 22 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	12
Både 500 cm^3 og 0,5 dm^3 **(Riktig svar)**	6
500 cm^3 **(Riktig svar)**	5
0,5 dm^3 **(Riktig svar)**	26
5 cm^3	9
50 cm^3	13
5 dm^3	12

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave 22 Måling 8 – 10

Når 26 % svarer at 0,5 L er 0,5 dm^3 (og ingen gale svar i tillegg), tyder det på at en betydelig del av elevene har lært seg sammenhengen: 1 L = 1 dm^3. De fleste synes likevel usikre på dette. Usikkerheten er imidlertid større når det gjelder sammen-hengen mellom cm^3 og dm^3.

Omtrent 11 % svarte både 500 cm^3 og 0,5 dm^3. Av disse krysset nesten havparten også av på et galt svar. Omtrent 10 % ga ett av de riktige svarene og minst ett svarfeil.

4.4 Konservere volum

Den direkte forståelsen av størrelsen til de vanligste volumenhetene ser ut til å være mangelfull hos en del av elevene. En annen prøve på dette er gitt i oppgaven nedenfor. I denne oppgaven utfordres også elevene til å konservere volum. Oppgaven setter ikke krav til formen som kassen har, men når flest mulig ungdommer skal inn i den, er det enklest å velge en høyde på omtrent 180 cm. Det fører igjen til at lengde og/eller bredde i grunnflaten må tilpasses tilsvarende.

Oppgave F Måling 8 – 10 (ikke med)

To ungdomsklubber konkurrerer om å få flest ungdommer inn i en kasse som rommer $1m^2$. Medlemmene snekrer kassa selv.

a. Tegn hvordan en kasse på 1 m^2 kan se ut (sett på mål).
b. Omtrent hvor mange ungdommer tror du kunne få plass i kassa?

Oppgaveeksempel 29: Oppgave F

Omtrent 35 % av elevene på 9. årstrinn har tegnet prismer med mål som angir korrekt volum. 5 % har gitt kassen kroppshøyde og tilpasset grunnflaten. Omtrent 18 % har ikke forsøkt å tegne en kasse. 20 % har tegnet figurer som ikke viser volum, eller som langt fra har form som et rett prisme.

Oppgave Fa Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	27
Prisme med kroppshøyde	5
Kubisk prisme	30
Andre kasser med feil eller uten mål	14

Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave Fa

Ved å sammenligne med volumet til et menneske kan vi få fram om elevene forstår hvor stor 1 m^3 er. Mer enn 28 % svarer at det ikke er plass til noen ungdommer i en kasse på 1 m^3. Disse elevene kan neppe ha forstått hvor stor en kubikkmeter er. En person som veier mellom 50 kg og 100 kg, har et volum på omtrent 50 – 100 dm^3 (0,05 – 0,1 m^3). Når vi regner med at det må være noe luft mellom ungdommene, vil om lag ti ungdommer i kassen være en god prestasjon.

Oppgave Fb Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	3
0	28
1 – 3	30
4 – 6	17
7 – 9	6
10 – 12	6
13 – 15	2
16 – 18	2
19 – 21	3
Mer enn 21	4

Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave Fb

Omtrent 12 % av elevene på 9. årstrinn ga opp tall fra 7 til 12 på spørsmålet om hvor mange som kunne komme inn i kassen. Omtrent 17 % av elevene svarte 4 – 6. Regner vi også med elevene som svarte 13 til 18, får vi at ca. 33 % av elevene ga et svar som viser et rimelig skjønn.

4.5 Måling

En viktig side ved volumbegrepet er at størrelsen til en gjenstand er avhengig av både høyde, bredde og dybde (tre dimensjoner). Det gjelder også hulmål. Oppgaven nedenfor tar for seg forståelsen av dette.

Også når vi måler volum, er gode måleredskaper avgjørende for nøyaktigheten. Smale måleglass gir større nøyaktighet i avlesningen siden utslaget blir større enn på brede måleglass.

Oppgave F Måling 8 – 10

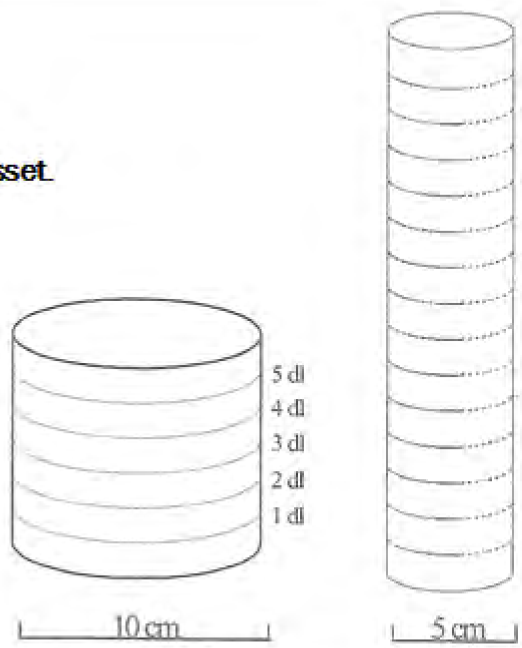
Her ser du måleglass.

a. Merk av for 3 dL på det høye måleglasset.

Anne skal måle opp 3 dL vann

så nøyaktig som mulig.

b. Hvilket måleglass bør hun bruke?



Oppgaveeksempel 30: Oppgave G

Oppgave Ga Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	14
Den tolvte streken **(Riktig svar)**	2
Midt på glasset	2
Den sjette streken	51
Den tredje streken	19

Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave Ga

Omtrent 2 % av elevene på 9. årstrinn merket av for 3 dl på den tolvte streken på det smale måleglasset i oppgaven ovenfor. Det betyr at bare omtrent en elev i annenhver klasse klart ser sammenhengen mellom volum, areal og lengde.

I det brede måleglasset er radius 5 cm og volumet blir $V = \pi \cdot 5^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot h$

I det smale måleglasset er radius 2,5 cm og volumet blir $V = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot h$

Dersom det smale måleglasset skal ha samme volum som det brede glasset (3 dL), ser vi at vannet i det smale måleglasset, må stå fire ganger så høyt som vannet i det brede måleglasset (jfr. formlene ovenfor).

51 % av elevene har merket av på den sjette streken. Det viser at de har forstått at søylen må være høyere. Langt på vei synes disse elevene å ha tatt hovedutfordringen: For å beholde volumet må vi øke høyden når grunnflaten (eller lengden og bredden) blir mindre. Problemet til elevene er at de ikke ser at halvert diameter gir en grunnflate på en firedel. Omtrent 19 % har merket av på den tredje streken. Det tyder på at de ikke ser at volumet er avhengig av grunnflaten. Noen elever (ca. 2 %) ser ut til å ha trodd at måleglassene har like store volum, og siden 3 dL er midt på det brede (lave), merker de av for 3 dL midt på det smale (høye) også.

Valget av måleglass er ikke selvsagt når kravet er at vi skal måle nøyaktig. På det ene måleglasset er det tegnet inn sirkler rundt glasset, mens det andre måleglasset har mye enklere markeringer.

Omtrent en tredjedel av elevene mener at Anne bør bruke det smale måleglasset for å måle så nøyaktig som mulig. Nesten halvparten, 47 %, mener at hun bør bruke det brede måleglasset. Mange forklarer ikke hvorfor de velger som de gjør. En svært stor del av forklaringene henviser til avmerkingen på måleglassene (sirkler mot streker; påførte mål). I klassesammenheng kan forklaring for valg av måleglass være gjenstand for en god samtale.

- På hvilken måte virker avmerkingen inn på avlesningen, og hvilken rolle spiller flaten?
- Kan vi i naturfagsrommet finne måleredskaper som er slik laget at de måler bestemte volum særlig nøyaktig?

Kapittel 5 Tid

Tidsbegrepet kan være vanskelig å fatte og å formidle fordi det virker lite håndfast, lite konkret.

Viktige egenskaper ved tid er:

- Tidspunkter er å anse som en (uendelig) lang serie som ligger på en kontinuerlig linje.
- Tid knytter seg til bevegelser på en systematisk måte.
- Tid knytter seg til biologisk utvikling.

Det er sammenhengen med bevegelse, *mekanikk*, som definerer tidsenhetene:

- Et år er omtrent den tida som jorda bruker på å fullføre en runde i sin bane rundt sola
- En måned er omtrent den tida det tar fra fullmåne til neste fullmåne.
- Et døgn er omtrent den tida som jorda bruker på å rotere en rundt sin egen akse.

Inndelingen av døgnet i timer, minutter og sekunder er mer "tilfeldig" eller kulturbestemt (jfr. det babylonske 60-tallssystemet). I dag ville vi trolig delt døgnet inn i dekadiske enheter, eller vi hadde tatt utgangspunkt i atomfysikken og en frekvens knyttet til svingninger i et bestemt atom.

Kalendere og klokker er konstruert slik at de er i overensstemmelse med definisjonen av tidsenhetene. Men definisjonene har blitt mer og mer kompliserte og enhetene tilsvarende mindre direkte etterprøvbare. Det gjør trolig også oss voksne noe usikre når de skal forklare barn om tidsenhetene. Forklaringene blir dermed gjerne mindre overbevisende eller forståelige. Bruk av tidsenheter og tidsmåling er viktig i dagliglivet allerede fra barnsben av. Dermed får barna ganske tidlig erfaringer med tidsmålinger og tidsangivelser. Begrepene som dannes, kan enten bli korrigert, fordi de ikke er funksjonelle, eller de kan bli styrket.

Nye utfordringer får vi når vi skal formalisere tidsbegrepene og bruke dem i beregninger. Vi har dekadiske enheter for sekunder og mindre enheter. Men for større enheter er det nærmest et virvar.

- 60 er sentralt når det gjelder overgangen fra sekunder til minutter og til timer
- Men teller vi 12 eller 24 timer før vi starter med å telle timer på nytt?
- Hvor mange døgn er det i en uke? Her får også tallet 7 inn i bildet.
- Hvor mange uker er det i en måned? Nei, det går ikke opp, men omtrent 4.
- Hvor mange døgn er det i en måned? Det kommer an på hvilken måned.
- Men det er alltid 12 måneder i ett år
- Antall døgn i et år er heller ikke så greit å angi. Er det 364 eller 365 eller 364,25 eller et tall med enda flere desimaler?

5.1 Misoppfatninger

Noen misoppfatninger knyttet til tidsenheter og tidsmålinger skyldes trolig at feltet er såpass komplisert. Vi forenkler og regner fire uker i en måned eller antar at alle månedene er like lange. Klokkeslett etter middag kan skape problemer for enkelte. Skrivemåten kan også bidra til forvirringen. Når vi angir tidspunktet kl. 23.25, oppfatter noen dette som et desimaltall på grunn av utseendet. Det hjelper lite å skille mellom punktum og komma, siden begge tegnene brukes som desimaltegn, også i Norge.

5.2 Dag, måned og år

I oppgaven nedenfor kan elevene vise om de forstår hvordan alder henger sammen med angivelsen av fødselsdato. Året er viktigst, dernest måneden og dagen. Men vet alle elevene rekkefølgen til månedene når de gis med navn? Svarene kan indikere en viss usikkerhet her.

Oppgave 29

Fru Hansen har fem barnebarn.

Kari ble født 14. mai 1984.
Per ble født 20. april 1983.
Rolf ble født 23. mars 1984.
Åse ble født 12. august 1983.
Torill ble født 2. juni 1984.

a) Hvem av barnebarna er eldst?

Svar:

b) Hvem av barnebarna er yngst?

Svar:

c) Hvem er den neste som skal feire fødselsdag etter Per?

Svar:

Oppgaveeksempel 31: Oppgave 29 Måling 5 – 7 og oppgave 26 Måling 8 – 10

Oppgave 29a Måling 5- 7 Oppgave 26a Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	3	6
Per (**Riktig svar**)	66	84
Kari	5	2
Rolf	12	4
Åse	6	2
Torill	7	2

Tabell 35: Prosentvis fordeling. Oppgave 29a Måling 5 – 7 og oppgave 26a Måling 8 – 10

Vi ser av tabellen over at henholdsvis 66 % og 84 % på de to årstrinnene finner den eldste personen. Hvis det var usikkerhet med hensyn til hvilken måned som kommer først, april eller august, kan vi velge Åse. Hvis vi tror at høyt fødselsårstall gir høy alder, bør vi svare enten Kari, Rolf eller Torill. Rolf er det hyppigste valget blant feilsvarene. Han ble født først av de som ble født i 1984. Men han ble også født først på året av alle. Kanskje neglisjerer enkelte årstallet og ser bare på måned og dag?

Oppgave 29b Måling 5- 7 Oppgave 26b Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	6
Torill (**Riktig svar**)	45	65
Kari	6	4
Per	11	3
Rolf	21	17
Åse	13	5

Tabell 36: Prosentvis fordeling. Oppgave 29b Måling 5 – 7 og oppgave 26b Måling 8 – 10

Når vi skal svare på hvem som er yngst, kommer tilsvarende betraktninger inn som på spørsmål a, men antallet riktige svar ligger ca. 20 prosentpoeng lavere i begge gruppene. Forskjellen i antall riktige svar på oppgave a og b kan delvis skyldes at «yngre» er et vanskeligere begrep å forholde seg til enn «eldre». Hvis det er forvirring med hensyn til hvilken måned som kommer først, april eller august, kan vi velge Rolf eller Kari.

Hvis vi tror at lavt fødselsårstall gir lav alder, bør vi svare enten Per eller Åse. Rolf er også på dette spørsmålet det hyppigste valget blant feilsvarene. Han ble født først av de som ble født i 1984, men han ble også født først på året av alle. Åse ble født sist på året av alle. Kanskje enkelte neglisjerer årstallet og bare ser på måned og dag?

Oppgave 29c Måling 5- 7 Oppgave 26c Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	6
Kari (**Riktig svar**)	42	57
Rolf	7	5
Åse	43	28
Torill	3	3

Tabell 37: Prosentvis fordeling. Oppgave 29c Måling 5 – 7 og oppgave 26c Måling 8 – 10

Året gjentar seg med stort sett de samme datoene. Merkedagene kommer stort sett i samme rekkefølge hvert år. Unntak er de bevegelige helligdagene. Spørsmål c kommer inn på denne forståelsen. Elevene skal både ignorere årstallet og vurdere rekkefølgen av datoer. Feil svar kan komme av en svikt på ett av disse feltene. Når det er flere elever som svarer Åse enn Kari, skyldes nok dette at de ser at hun er den som ble født nærmest etter Per. De overser at både Kari og Toril fyller år før Åse. Elever som svarer Rolf, kan ta feil av rekkefølgen av månedene.

5.3 Kalenderen

Noen av vanskene med kalenderen er at månedene ikke er like lange, at månedene ikke rommer hele uker, og at månedene ikke er like med hensyn til ukedag og dato. Det gjør kalenderen lite oversiktlig, og ikke alle elever forstår systemet. Det er viktig å kunne lese av kalenderen. Forståelsen av at ukene går sin jevne gang uavhengig av om månedene er ulike, her også betydning. Oppgaven nedenfor tar for seg disse to problemstillingene.

Oppgaveeksempel 32: Oppgave 16 Måling 5–7 og oppgave 9 Måling 8–10

Oppgave 16a Måling 5 – 7 Oppgave 9a Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	1
Onsdag (**Riktig svar**)	90	97
En av de andre dagene	2	0

Tabell 38: Prosentvis fordeling. Oppgave 16a Måling 5 – 7 og oppgave 9a Måling 8 – 10

Nesten alle elevene på 9. årstrinn leser av riktig ukedag. På 6. årstrinn svarer ca. 90 % riktig.

Oppgave 16b Måling 5 – 7 Oppgave 9b Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	9	3
Lørdag (**Riktig svar**)	71	86
En av de andre dagene	14	7

Tabell 39: Prosentvis fordeling. Oppgave 16b Måling 5 – 7 og oppgave 9b Måling 8 – 10

29 % på 6. årstrinn og 14 % på 9. årstrinn svarer ikke riktig dag for 1. mars. Halvparten av elevene svarer en av de andre dagene, resten angir ingen ukedag eller unnlater å svare. Det tyder på at forholdsvis mange ikke behersker kalenderen på annen måte enn at de kan lese av riktig.

Oppgave 16c Måling 5 – 7 Oppgave 9c Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	14	3
5 (**Riktig svar**)	34	53
4	14	38

Tabell 40: Prosentvis fordeling. Oppgave 16c Måling 5 – 7 og oppgave 9c Måling 8 – 10

Spørsmål c er mer sammensatt enn de to forrige. Her må eleven både vite at det er mer enn 28 dager i mars, og legge til side forestillingen om at «det er (ca.) fire uker i måneden». Henholdsvis 33 % og 53 % klarer dette. Som ventet er 4 det hyppigste feilsvaret.

5.4 Klokka

Vi må kunne lese av klokka for å holde styr på de daglige gjøremålene. Ikke alle elever kan orientere seg på klokka, enten det gjelder analoge eller digitale klokker. En vanske er at språkbruken varierer ved at tidspunkt noen ganger angis ut fra en analog og andre ganger ut fra en digital klokke. Det vanligste i våre dager er å bruke formen 13.45 skriftlig, men *kvart på to* muntlig. Uttrykk som *kvart på* og *fem over halv* viser til langviserens bevegelse over urskiva. Forståelsen av at både lilleviseren og langviseren er i en kontinuerlig bevegelse, kan også være forskjellig hos elevene.

Oppgaveeksempel 33: Oppgave 9 Måling 5 – 7

Oppgave 9 Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	1
Riktig plassert lilleviser	79
Lilleviser på 7	2
Lilleviser på 8	17
Riktig plassert langviser	95
Andre stillinger på langviser	4

Tabell 41: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 Måling 5 – 7

Denne oppgaven ble bare gitt på 6. årstrinn. 79 % plasserer lilleviseren nogenlunde midt mellom 7 og 8. 17 % lar lilleviseren peke på 8. Noen få lar viseren peke mot 7 eller i en annen retning. De aller fleste lar langviseren peke på 6 når klokka er h*alv et eller annet.* Men det er noen få som velger andre stillinger.

Oppgaveeksempel 34: Oppgave 10 Måling 5 – 7 og oppgave 18 Måling 8 – 10

Oppgave 10 Måling 5 – 7 Oppgave 18 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	1
Riktig plassert lilleviser	24	29
Lilleviser på 5	62	63
Riktig plassert langviser	81	83
Andre stillinger på langviser	16	16

Tabell 42: Prosentvis fordeling. Oppgave 10 Måling 5 – 7 og oppgave 18 Måling 8 – 10

De aller fleste lar lilleviseren peke mot 5 eller i nærheten av dette tallet. Men forholdsvis få lar viseren gå litt forbi femtallet. 16 % av elevene på begge trinn lar lilleviseren peke i andre retninger. Litt mer enn fire av fem elever har noenlunde riktig plassering på langviseren. Omtrent hver sjette elev har feil plassering.

Oppgaveeksempel 35: Oppgave 19 Måling 8 – 10

Denne oppgaven ble bare gitt til 9. årstrinn, og ca. 20 % plasserer lilleviseren feil, mens bare halvparten så mange plasserer langviseren feil.

Oppgave 19 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	1
Riktig plassert lilleviser	80
Lilleviser på 2	4
Lilleviser på 3	11
Riktig plassert langviser	90
Andre stillinger på langviser	9

Tabell 43: Prosentvis fordeling. Oppgave 19 Måling 8 – 10

Er elevene like kjent med digitale som analoge klokker? De ble bedt om å angi klokka halv åtte slik at de kunne bruker siffer.

Oppgave 13


Omar har en digital klokke som viser tiden med tall. For eksempel:

15 : 25

a) Neste morgen er klokken halv åtte.
Skriv tallene for timer og minutter slik tiden vises på klokken til Omar.

Svar: :

b) Klokken er ti over halv fire om ettermiddagen.
Skriv tallene for timer og minutter slik tiden vises på klokken til Omar.

Svar: :

Oppgaveeksempel 36: Oppgave 13 Måling 5 -7 a og b, og oppgave 21 Måling 8 – 10

Oppgave 13a Måling 5 – 7 Oppgave 21 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	1
07:30 (Riktig svar)	69	91
08:30	18	5
08:00	2	2

Tabell 44: Prosentvis fordeling. Oppgave 13a Måling 5 -7 og oppgave 21 Måling 8 – 10

69 % i årstrinn klasse gir riktige siffer. Det er noe lavere enn ved bruk av visere. For begge årstrinn er den vanligste feilen å skrive 08.30. Men en del skriver også 08.00. For øvrig forekommer det en rekke ulike skrivemåter, men ingen av disse samler mange elever. I bokmålsutgaven godkjennes også 7.30 pga. at det bare er mulig å skrive sifre i svarruten.

Oppgave b ble bare gitt på 6. årstrinn.

Oppgave 13b Måling 5 – 7	6. årstrinn
Ubesvart	4
15:40 (Riktig svar)	54
16:40	12
(0)3:40	3
16:10	9

Tabell 45: Prosentvis fordeling. Oppgave 13b Måling 5 - 7

Litt over 54 % skriver riktig svar. Den vanligste feilen er 16.40. Her mestrer elevene to av tre vansker: 40 (minutter) og større enn 12. 3 % av elevene svarer 3.40. Disse har ikke fått med seg hvordan tidspunkt om ettermiddagen skrives. Kanskje har de selv klokker som er innstilt slik at de viser «britisk» skrivemåte? 16.10 forekommer svært hyppig. Disse elevene har ikke fått med seg hvordan vi justerer for den halve timen.

5.5 Timer og minutter

Noen ganger angir vi timetallet i et klokkeslett fra 0 til 24, andre ganger fra 0 til 12. Barn som har problemer med å gå fra den ene angivelsen til den andre, kan også ha problemer med å beregne timetall ut over ett døgn. Oppgave 21 Måling 5 – 7 og oppgave 23 Måling 8 – 10 kan gi en indikasjon på slike problemer. Feil svar kan også komme av at elevene som har problemer med å lese teksten, ikke vet hvor mange timer det er i døgnet. Disse elevene har vansker med å regne eller er unøyaktige i arbeidet med oppgaven.

Oppgaveeksempel 37: Oppgave 21 Måling 5 – 7 og oppgave 23 Måling 8 – 10

Spørsmål b tar for seg problemer med tidsangivelse i timer og minutter. Selv barn som kan si at det er 60 minutter i en time, har en tendens til å oppfatte klokkeslett som desimaltall. Dette kan vi i noen grad oppdage når vi ber elevene om å beregne tidsrommet mellom to klokkeslett.

Oppgave 21a Måling 5 – 7 Oppgave 23a Måling 8 - 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	5
35 timer (Riktig svar)	19	50
11 timer	9	5
23 timer	25	18

Tabell 46: Prosentvis fordeling. Oppgave 21a Måling 5 – 7 og oppgave 23a Måling 8 – 10

Av feilsvar forekommer 23 timer hyppigst på begge årstrinn. Dette svaret tilsier manglende oppmerksomhet eller forståelse av at vi først må ta 24 timer, (ikke 12 timer,) for å komme til samme tidspunkt neste dag, for deretter å telle ytterligere 11 timer. En annen forklaring kan være at noen elever overser at det andre klokkeslettet var om kvelden. Dette kan imidlertid igjen indikere at eleven ikke er tilstrekkelig oppmerksom på at klokka er sju to ganger i døgnet. Tenkemåten hos den enkelte elev kan best avdekkes ved å be om en muntlig forklaring. En del elever vil da selv oppdage feilen og korrigere den.

Elever som svarer 11 timer har antagelig oversett at det var klokka sju neste dag. Tall som 34 og 36 kan avsløre «tellefeil», når elevene «teller seg fram på klokka». I kategorien andre svar er ingen feilsvar dominerende.

Oppgave 21b Måling 5 – 7 Oppgave 23b Måling 8 - 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	26	14
325 minutter **(Riktig svar)**	16	41
525 minutter	2	1
5,65 minutter	2	1

Tabell 47: Prosentvis fordeling. Oppgave 21b Måling 5 – 7 og oppgave 23b Måling 8 – 10

Forholdsvis mange elever, særlig på 6. årstrinn, finner denne oppgaven så vanskelig at de ikke gir noe svar. Bare 16 % på dette årstrinnet finner riktig svar. Antallet riktige svar på 9. årstrinn er betydelig høyere med 41 %. Rundt regnet halvparten av elevene gir svar som vi ikke uten videre kan finne grunnen til, ved bare å se på svaret. (Siden en del elever foretok beregningen i margen på oppgavearket under den landsomfattende standardiseringen, ble det illustrert at mange gjorde regnefeil og mange gjorde mer enn en feil i beregningene. Det er derfor ingen «typiske» feilsvar som går særlig hyppig igjen.)

Vi har plukket ut tre svar som kan indikere at elevene er usikre på om det er 60 eller 100 minutter i en time. Vi ser at denne feiltypen forekommer oftere blant de noe yngre elevene.
Elever som regner 100 minutter i en time, kan få svaret 525 minutter, hvis de ikke gjør andre feil i tillegg. Andre tall vi i den forbindelse kunne se etter, er for eksempel 565 (500 + 55 + 10). Elever som får 5,65, har subtrahert som ved desimaltall. 565 kan også forekomme her ($5{,}65 \cdot 100$). Elever som får 335, kan regne om fem timer til 300 minutter på riktig måte, men "glemmer" at kvarteret fra 8.45 til 9.00 er 15 minutter, ikke 25.

5.6 Måling av tid

Vi måler tid ved å telle enheter. Når vi regner ut alderen til en person, tar vi utgangspunkt i kalenderen. Tallene for fødselsdagen og dagen i dag sammenlignes. Vi teller hele år, måneder og dager. Behovet for nøyaktighet avgjør om vi trenger å ta med dagene, eventuelt timene. Når vi tar tida under et idrettsarrangement, går vi over til egentlig måling ved å bruke klokker. Avhengig av hvor nøyaktig klokkene er, teller vi timer, minutter, sekunder og deler av sekunder.

Ingen målinger kan bli helt nøyaktige, heller ikke tidsmålinger. Det er en del av målingenes vesen (se kapittel 1). Dette henger sammen med at det er grenser både for hvor nøyaktig vi kan definere den størrelsen som skal måles, hvor nøyaktig måleinstrumentet er, og hvor nøyaktig vi er i stand til å utføre målingene. I idretten har vi blitt stadig mer nøyaktig i beskrivelsen av det å komme i mål. Vi utvikler elektroniske måleinstrumenter som skal være mest mulig uavhengige av menneskelig unøyaktighet. Det betyr at måleusikkerheten reduseres til et nivå som vi for tida kan akseptere.

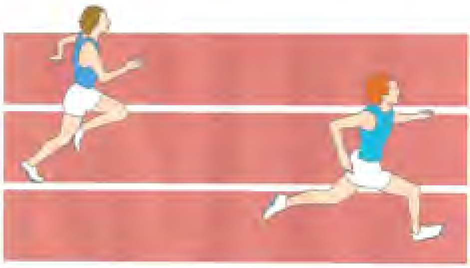
Elevenes forståelse av at enhver måling er beheftet med en usikkerhet, og at denne usikkerheten kan tallfestes, utvikles etter hvert. Oppgave H Måling 8 – 10 kan gi et innblikk i hvor langt elevene har kommet i denne utviklingen. Det første spørsmålet gjelder i hvilken grad elevene ser sammenhengen mellom fart, tid og strekning. Oppgaven er ikke med.

Oppgave H Måling 8 – 10 Ikke med

I et idrettsstevne har Kåre to meter igjen av 60-meteren når Per går i mål. De har hver sin tidtager. Begge oppgir tida 7,9 sekunder!

Omtrent hvor stor var egentlig forskjellen?

s



Oppgaveeksempel 38: Oppgave H Måling 8 – 10

Oppgave H Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	14
0,1 - 0,4 (Riktig svar)	24
0,5 – 0,9	15
1,0 – 1,9	18
2(,0)	14
Mer en 2 sekunder	9

Tabell 48: Prosentvis fordeling. Oppgave H Måling 8 – 10

Det riktige svaret ville være ca. 0,2 s. Det vil vi få hvis vi beregner gjennomsnittsfarten eller gjør et grovt overslag. Erfarne tidtakere og idrettsutøvere ville også si dette uten å gjøre noen form for beregning. Vi har likevel «godtatt» 0,1 - 0,4 s som riktige svar. Omtrent en firedel av elevene anga et slikt svar. Langt flere har angitt ett sekund eller mer. Det tyder på at deres kvalitative begrep om fart og tid er svært usikkert.

Det var ikke lett å kode svarene på det opprinnelige ekstraspørsmål 20b: ”Hvordan kan slike feil skje?” En velvillig vurdering resulterte i ar ca. 20 % av elevene forsto at slik feil kan skje ved tilfeldige unøyaktigheter som i alle andre målinger.

Oppgave H Måling 8 – 10 ”Hvordan kan slike (måle)feil skje?”	9. årstrinn
Ubesvart	25
Målefeil, tilfeldige feil	20
En av tidtakernes feil	28
Villet feil av tidtaker	2
Unøyaktige klokker	8
Løperens feil	4

Tabell 49: Prosentvis fordeling. Oppgave H Måling 8 – 10. ”Hvordan kan slike (måle)feil skje?”

Noen flere elever hevdet at en av tidtakerne var skyld i feilen. En del av disse elevene mente at det var en villet feil. Noen ga en av løperne skylden for feilen! Omtrent 8 % mente at feilen skyldtes unøyaktige klokker. Svært få svarte på enda et ekstraspørsmål Hc: ”Kom med forslag til hvordan vi kan forbedre tidtakingen.” Delvis knyttet forslagene seg til svarene på Hb. Spørsmålene Hb og Hc kan være et godt utgangspunkt for gruppe- og klassesamtaler for å bevisstgjøre elevene om at all måling er beheftet med feil, og at størrelsen på målefeil kan reduseres.

5.7 Hvor lang tid tar det å bevege seg en gitt strekning?

Hvilken forståelse elevene har av fart, knytter seg til spørsmålet om hvor lang tid det tar å bevege seg en gitt retning. Ovenfor har vi vist at mindre enn hver fjerde elev på 9. årstrinn gir en realistisk vurdering av hvor lang tid det tar å løpe 2 m i et sekstimetersløp. Et par tilsvarende spørsmål gir et noe mer positivt inntrykk.

Oppgaveeksempel 39: Oppgave 18 Måling 5 – 7 og oppgave 4 Måling 8 – 10

Oppgave 18 Måling 5 – 7 Oppgave 4 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	2
1500 m (Riktig svar)	39	56
100 m	9	4
400 m	32	27
5000 m	9	8
10 000 m	0	0

Tabell 50: Prosentvis fordeling. Oppgave 18 Måling 5 – 7 og oppgave 4 Måling 8 – 10

Vi ser at 56 % i 9. årstrinn og 39 % i 6. klasse svarer 1500 meter, som er det forventede svaret. 400 meter er det vanligste feilsvaret i 9. årstrinn. Dette svarer til normal gangfart på 400 meter.

Oppgaven ovenfor har en naturlig fortsettelse i Oppgave 19 Måling 5 – 7 og oppgave 5 Måling 8 – 10:

Oppgaveeksempel 40: Oppgave 19 Måling 5 – 7 og oppgave 5 Måling 8 – 10

Oppgave 19 Måling 5 – 7 Oppgave 5 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	28	19
227,5 (**Riktig svar**)	35	63
347,5	4	2

Tabell 51: Prosentvis fordeling. Oppgave 19 Måling 5 – 7 og oppgave 5 Måling 8 – 10

I denne oppgaven har vi sett at mange elever på begge klassetrinn har vansker med å regne timer og minutter om til minutter. I tabellen ser vi at svært mange elever finner denne oppgaven så vanskelig at de ikke svarer på spørsmålet. Litt over 1/3 av elevene på 6. årstrinn og nesten 2/3 av elevene på 9. årstrinn klarer likevel å finne riktig svar.

En del elever får svaret 347,5. De regner med 100 sekunder i minuttet. Noen få elever får 208,5. De skriver tida som 3.47,5 minutter og multipliserer med 60 som om det er et desimaltall. For øvrig er det en rekke ulike regnefeil og feilstrategier i kombinasjon som gir svært mange feilsvar.

I neste oppgaveeksempel møter elevene en tilsvarende utfordring som i oppgavene ovenfor.

Oppgaveeksempel 41: Oppgave 17 Måling 5 – 7 og oppgave 24 Måling 8 – 10

Oppgave 17 Måling 5 – 7 Oppgave 24 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	3
20 minutter (**Riktig svar**)	53	56
5 minutter	4	2
1 time	30	30
2 timer	3	4

Tabell 52: Prosentvis fordeling. Oppgave 17 Måling 5 – 7 og oppgave 24 Måling 8 – 10

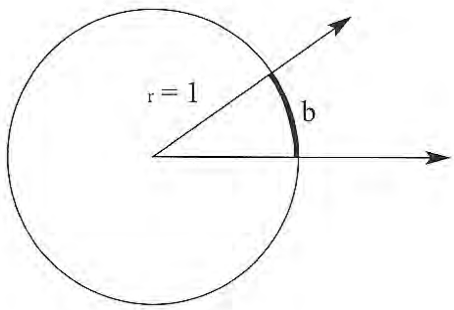
Elevene på de to klassetrinnene har svært lik svarfordeling. Litt over halvparten gir det forventede svaret på 20 minutter. Noen elever synes å ha regnet med at Andersen til sammen sykler 10 km og at spørsmålet er hvor lang tid han bruker på denne strekningen. Da vil 20 minutter være i minste laget og svaret bør være 1 time. Oppgaven bør formuleres slik at det ikke er noen tvil. Valget av 1 time kan også være aktuelt, hvis vi tenker seg en forholdsvis forsiktig person, som sykler i gangfart. Opplysningen om at han er pensjonist er unødvendig og kan forvirre noen.

Kapittel 6 Vinkler

Erfaring fra samarbeid med lærere viser at mange føler usikkerhet når det gjelder vinkelbegrepet og hvordan det skal formidles til elevene. Tilnærmingene kan være forskjellige i lærebøker og oppslagsverk.

Tradisjonelt har to definisjoner av størrelsen på en vinkel.

Definisjon 1
Lengden av buen på en sirkel med radius 1 og med sentrum i vinkelens toppunkt. Siden vi vet omkretsen av en sirkel er $2 \cdot \pi \cdot r$, vil størrelsen på en vinkel være mellom 0 og 2π. Enheten kalles *radian*.



Vi går fra radianer til grader ved å multiplisere med $\frac{360}{2\pi}$.

Definisjon 2
Vi definerer en hel omdrening til $360°$ (360 grader). En mindre dreining vil gi et forholdsvis mindre gradtall.

Vi går fra grader til radianer ved å multiplisere med $\frac{2\pi}{360}$.

På kalkulatorer og regneark vil forståelse av de to enhetene (og en omdrening) være en aktuell problemstilling. Elevene kommer fort i situasjoner hvor de to måleenhetene kan skape forvirring.

Elevene arbeider med vinkler i ulike situasjoner. På papiret er det vanlig enten å måle vinkler med en gradskive eller å tegne/konstruere vinkler. Dreining av figurer et gitt antall grader kan også være aktuelt. Hvilken definisjon av vinkler bør vi bruke? Erfaringsmessig skaper den første definisjonen forvirring når det gjelder å forstå størrelsen av vinkelen. Hvis vi fokuserer på vinkelbeina, kan det oppstå en misoppfatning om at det er "lengden" av strålene (tegnet lengde) som avgjør hvor stor vinkelen er.

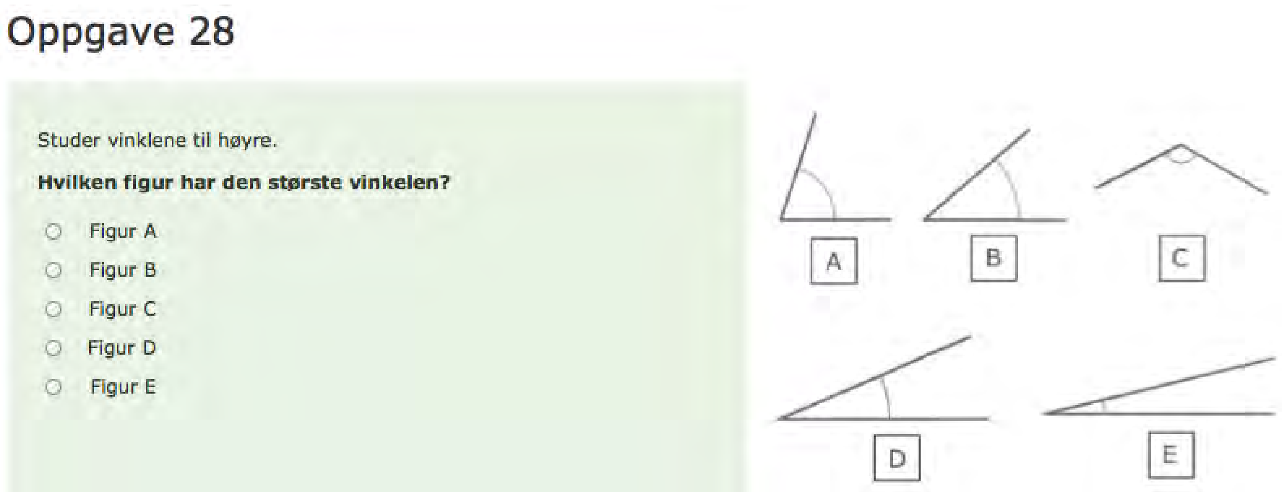
Den andre definisjonen skulle tilsi at vi måler arealet innenfor enhetssirkelen, ikke buen. Det ville gi halvparten så store måltall, og betegnelsen *radianer* passer heller ikke. På den andre siden blir vinkelen større etter hvert som området blir større. Slik sett er definisjonen brukbar.

- Hvis vi fokuserer på arealet, kan vi få en misoppfatning om at størrelsen knytter seg til området *slik det kommer fram på tegningen innenfor buen og mellom de tegnede strålene*.
- Hvis vi fokuserer på buen, kan det tilsvarende oppstå en misoppfatning knyttet til *buelengden på tegningen*.

Den tredje ”definisjonen” knytter seg til dreining eller rotasjon. Men hvordan måler vi dreining? Må vi ikke også her innom ”enhetssirkelen” for å finne et mål?

6.1 Hva viser størrelsen på en vinkel?

Oppgave 28 Måling 5 – 7 og oppgave 10 Måling 8 – 10 har til hensikt å avsløre misoppfatningene som vi har nevnt ovenfor, hos elever på 6. årstrinn og 9. årstrinn.



Oppgaveeksempel 42: Oppgave 28 Måling 5 – 7 og oppgave 10 Måling 8 – 10

Oppgave 28 Måling 5 – 7 Oppgave 10 Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	1
Figur C (Riktig svar)	45	87
Figur A	15	7
Figur B	6	1
Figur D	3	0
Figur E	24	2

Tabell 53: Prosentvis fordeling. Oppgave 28 Måling 5 – 7 og oppgave 10 Måling 8 – 10

Vinkelen i figur C er riktig svar. De fleste elevene på 9. årstrinn (87 %) krysser av for dette svaralternativet, mens bare 45 % gjør det samme på 6. årstrinn. For 9. årstrinn er vinkel i figur A det vanligste feilsvaret. Denne vinkelen har lengst bue. Henholdsvis 15 % og 7 % av elevene på disse årstrinnene synes å legge vekt på lengden av den inntegnede bue. For 6. årstrinn er vinkel E det vanligste feilsvaret. 24 % på dette årstrinnet velger vinkelen hvor det er tegnet lengst vinkelbein, til tross for at den ”spriker” minst. Svært få gjør dette valget på 9. årstrinn. På 6. årstrinn er det også en betydelig andel som velger vinkel i figur B (størst areal innenfor buen) og vinkel i figur D (lengst avstand mellom buen og toppunktet).

6.2 Sammenheng mellom størrelsene på vinkler

Vinkler måles med gradskiver eller mer avanserte redskaper. Men i geometrien arbeider vi mye med vinkelberegninger basert på definisjoner eller bevis.

Oppgaveeksempel 43: Oppgave 11 Måling 8 – 10

Oppgave 11 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	3
30°, 30 (Riktig svar)	67
45°	7
60°	6
Mellom 35° og 50°, (unntatt 45°). Vinkelmåling	8

Tabell 54: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 Måling 8 – 10

Omtrent to tredeler av elevene i 9. årstrinn «ser» at vinkelen må være 30° for at summen skal bli 180°. Hvis vi måler, vil vi finne et tall som er større enn 35. Det kan derfor antas at en god del av de 8 % som angir mellom 35° og 50°, har målt. I tillegg kommer ca 7 % som svarer 45°. Disse kan ha målt eller valgt en kjent vinkel som omtrent er like stor som vinkelen det er spurt om.

Oppgaveeksempel 44: Oppgave 27 Måling 8 – 10

Oppgave 27 Måling 8 – 10	9. årstrinn
Ubesvart	11
80°, 80 (Riktig svar)	67
60°	5
90°	3

Tabell 55: Prosentvis fordeling. Oppgave 27 Måling 8 – 10

Det er omtrent to tredeler av elevene på 9. årstrinn som gir riktig svar. Vinkel A må være 80° for at summen skal bli 180°. Hvis vi måler, vil vi få ca 78° eller 79°. Svært få elever angir dette tallet. Derimot velger 5 % 60° og 3 % 90°, som er "kjente" vinkler.

6.3 Dreining

I oppgave 3 Måling 5 – 7 og oppgave 12 Måling 8 – 10 er det flere fallgruver. Noen elever ser en vinkel (mellom viserne) og kan oppfatte at vi spør om hvor stor denne vinkelen er. Andre elever har et så fjernt forhold til vinkler at de leter etter tall på figuren. Dermed svarer de med en tidsangivelse. Ytterligere en vanske ligger i at utgangspunktet ikke er tegnet på figuren. Hvor stod langviseren klokka 5? Hvor stod lilleviseren klokka 4? Elevene må se for seg en dreining med et utgangspunkt og et sluttpunkt.

Oppgaveeksempel 45: Oppgave 3 Måling 5 – 7 og oppgave 12a og b Måling 8 – 10

Spørsmål a i oppgaven ovenfor ble gitt til begge årstrinnene. Spørsmål b ble bare gitt på 9. årstrinn. Hensikten med oppgaven var å finne ut om elevene forbinder noe måltall med en vinkel som kommer fram ved en kvart omdreining. Trolig har ikke alle oppfattet situasjonen, hvis de ikke til vanlig betrakter vinkler også som et mål for dreining. Det viser at det store flertallet av elevene selv har ment at de har forstått spørsmålet.

Oppgave 3 Måling 5 – 7 Oppgave 12a Måling 8 – 10	6. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	9	4
90°, 90 (Riktig svar)	32	62
15°, 15, 15 min	24	5
3	7	3
45°, 45	34	10
60°, 60	2	3

Tabell 56: Prosentvis fordeling. Oppgave 3 Måling 5 – 7 og oppgave 12a Måling 8 – 10

Det er kraftig økning av riktige svar fra 6. til 9. årstrinn. Kan det tenkes at elevene i 9. årstrinn gjennom matematikkundervisningen har blitt kjent med det dynamiske vinkelbegrepet, det at vinkelen *dreies* 90°, i tillegg til det statiske vinkelbegrepet?
Feilsvarene sprer seg over en rekke tall. I 6.årstrinn går tallet 15 igjen i en eller annen forbindelse. Her synes noen å blande tidsmåling og vinkler sammen (det er gått 15 minutter). På 9. årstrinn er dette problemet mindre utbredt (5 %). Langviseren peker mot tallet 3. 7 % på 6. årstrinn velger dette tallet. Betydelig færre elever på 9. årstrinn gjør det samme.

"Kjente" vinkler går igjen også i denne oppgaven. På 9. årstrinn svarer 10 % 45 eller 45°, og 3 % svarer 60 eller 60°. Tilsvarende tall for 6. årstrinn er 34 % og 2 %. Har noen elever bare valgt blant "kjente vinkler", eller kan disse svarene ha en annen forklaring?

Dreiningsvinkelen til den lille viseren er betydelig vanskeligere å finne enn svaret på den andre oppgaven om vinkler. Enklest er det å beregne hvor stor dreining en time representerer ($360°/12 = 30°$). Dernest legger vi ¼ av $30°$ ($7{,}5°$). Bare 4 % av niendeklassingene klarer å løse denne oppgaven.

Oppgave 12b Måling 8 - 10	9. årstrinn
Ubesvart	10
$37{,}5°$, 37,5 (Riktig svar)	4
$30°$, 30	12
$40°$, 40	9
$45°$, 45	5
Mellom $5°$ og $25°$	17
Tall mellom $30°$ og $45°$, unntatt $37{,}5°$ og $40°$	10

Tabell 57: Prosentvis fordeling. Oppgave 12b Måling 8 – 10

Omtrent 26 % gir tallene 30, 40 eller 45, som synes å være resultat av et overslag eller en gjetning. Ytterligere ca. 10 % av elevene foreslår andre tall mellom 30 og 45. 17 % svarer mellom 5 og 25. Det kan tyde på at de tror utgangspunktet for dreiningen var klokka 5. Omtrent hver fjerde elev gir tall som ligger utenfor området 5 – 45.

DEL 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste *misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av måling og enheter*. Disse vanskene har stått sentralt i første del av denne veiledningen.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi først ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner. Deretter tar vi for oss en del aktiviteter som er rettet mot problemene og misoppfatningene som er drøftet i første del.

Vanlige misoppfatninger hos elevene innenfor *Måling*:

- Størrelsen til omkretsen bestemmer størrelsen til arealet
- All måling/matematikk er nøyaktig
- Blander sammen omkrets og areal
- Størrelser som måles i sammensatte enheter må betraktes som mindre grunnleggende enn størrelsene som, måles i grunnenhetene
- Det er "lengden" til strålene (lengde) som avgjør hvor stor vinkelen er.
- Størrelsen til vinkelen knytter seg til området *slik* det kommer fram på tegningen innenfor buen og mellom de tegnede strålene.
- Størrelsen til buelengden definerer vinkelen
- Romsyn

Kapittel 7 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget blir meningsfullt for elevene, må elevene ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.*

Tradisjonell undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil lærere assosiere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Det å be barn presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og at disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte elev.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere disse. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor blir det pekt på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klasser.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det uforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er riktig eller feil. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist har vist at klasser gjør det klart bedre på prøver når læreren ikke for tidlig prøver å ”avslutte” diskusjonene med å peke på riktige svaret eller på den riktige måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det riktige tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som

- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta,
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte eleven som snakker,
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn,
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer.

”Hør hva Anne sier.” ”Tak Helge! Nå, hva mener du, Marit?” ”Hvordan reagerer du på det, Åse?” ”Er det andre ideer her?” ”Kan du gjenta det du sa, Petter?”

2 Noen ganger være en ”utspørrer ” eller ”provokatør” som

- introduserer en ny ide når diskusjonen er laber,
- følger opp et synspunkt,
- spiller ”djevelens advokat”,
- fokuserer på et viktig begrep,
- unngår å spørre multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar.

”Hva ville skje dersom …?” ”Hva kan du si om svaret, når du multipliserer to tall?”

3 Ikke være en dommer eller ”vurderer” som

- Vurderer hvert svar med ”ja”, ”godt” eller ”interessant” eller lignende. Slikt hindrer ofte andre fra å komme fram med alternaive ideer og oppfordrer til en ”ytre akseptabel” framførelse i stedet for en utforskende samtale.

Læreren bør unngå uttrykk som ”Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene.” ”Du er nesten framme.” ”Ja, det er riktig.” ”Nei, du skulle ha sagt …” ”Kan noen se hva som er feil med det Gunnar sier?”

Denne listen er ikke ment å vise at det alltid er upassende å evaluere et elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med ”spørsmålsgjetting”, der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende samtale, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, forlater elevene timen argumenterende og tenkende.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, så kan disse ta mange former og ha ulike formål. Det vil for eksempel være forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der elevene skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når de har arbeidet med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor vil vi peke på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger vil det være spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsninger de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å avdekke misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som:

- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? Vi kan så vel sammenligne på tvers av oppgaver som elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor.

Kapitel 8 Undervisningsaktiviteter

8.1 Kontinuerlige variabler

Teoretisk er kontinuitet et vanskelig begrep. Barn kan likevel utvikle en viss forståelse av variable som kontinuerlige i den forstand at:

- Verdiene følger etter hverandre i en ordnet rekkefølge.
- Mellom hvilke som helst par av verdier kan vi tenke oss en ny verdi.
- For en hvilken som helst verdi kan vi tenke oss en ny verdi så nær som vi bare måtte ønske.

Elevene trenger erfaringer som viser at å måle til nærmeste millimeter likevel ikke gir et "nøyaktig" riktig svar. Men er svaret nøyaktig nok for den aktuelle problem-stillingen?

Utstyr

- Metermål, papirremse på 1 m og kalkulator

Oppgave

- Sitt sammen to og to.
- Brett papirremsa slik at dere får like lange deler.
- Gjett hvor lang hver del blir.
- Mål remsa og skriv tallet.
- Regn ut lengden ved å dividere hele lengden på antall deler.
- Sett 1 poeng på den som har gjettet best
  (hvis begge har samme tall, får begge 1 poeng).

Antall deler	Gjetning Elev 1	Gjetning Elev 2	Målt lengde	Utregnet lengde	Poeng Elev 1	Poeng Elev 2
2						
3						
4						
5						
6						
7						
				Sum poeng:		

Drøft i klassen

- Hvorfor blir det mange desimaler på noen av de lengdene dere regner ut?
- Hvor mange desimaler trenger du for å se hvem som har gjettet best?
- Kan alle brøker skrives nøyaktig ved hjelp av desimaltall?

Aktivitet 2. Kontinuerlige variabler

8.2 Hvor stor er 1 m^2 ?

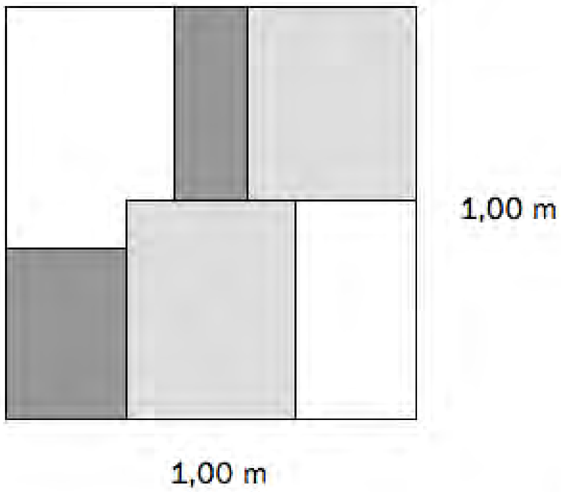
Elever får ikke et ordentlig inntrykk av måleenheten 1 m^2 uten å ”kunne ta og føle” på den. En aktuell måte er å bruke enheter som elevene er kjent med. Mest nærliggende er det å bruke A4-ark (16 A4-ark er nøyaktig 1 m^2, men formen blir er ikke kvadratisk). Vi velger i stedet aviser. Aviser har forskjellige størrelser, men de kan likevel brukes.

Utstyr

- Saks, lim eller limbånd, aviser og metermål

Oppgave A

- Klipp opp en avis i hele ark.
- Legg arkene delvis oppå hverandre slik at de danner et kvadrat med sidelengder 1,00 m. Arealet blir da 1,00 m^2.
- Lim arkene sammen.



Oppgave B

- Prøv hvor mange elever som kan stå på arket samtidig, uten at noen tråkker ut over kanten
- Legg arket inntil et hjørne. Er det plass til like mange nå?

Oppgave C

- Forsøk å lage 1 m^2 ved å bruke så få ark som mulig. Mål lengde og bredde og tegn en figur som viser løsningen.

Aktivitet 3. Hvor stor en 1 m^2?

Oppgave A gir et inntrykk av hvor stor 1 m^2 er, både sammenlignet med arealet til en avisside og absolutt. Oppgave B gir erfaringer om størrelsen av 1 m^2 i forhold til eleven selv. Oppgave C inviterer til å lage en ikke-kvadratisk flate. Den gir erfaringer med at 1 m^2 er en størrelse, ikke en bestemt form. Når bredden øker, reduseres lengden av rektanglet på 1 m^2. Hvis vi ønsker å komme inn på størrelsen av A4-arket, er det aktuelt nå.

Som en utfordrende ekstraoppgave kan vi be elevene omforme et A4-ark til et kvadrat (med samme areal) ved hjelp av saks og limbånd.

8.3 Hvor stor er 1 m^3?

Denne oppgaven har mye til felles med oppgaven i kapittel 8.2. Hele klassen bør samarbeide, slik at det blir seks stive kvadrater på 1 m^2 hver. Nå skal kubikkmeteren utforskes.

Utstyr

- Saks, lim eller kraftig limbånd, kartong fra noen store esker og metermål

Oppgave A

- Klipp opp eskene i størst mulige biter.
- Lag seks kvadrater hver med sidekant 1,00 m.
- Sett kvadratene sammen til en terning.
- Drøft i klassen hvor mange elever som kan få plass i terningen.
- Prøv.

Oppgave B

- Tegn et rutemønster (dm^2) på et stort ark og legg arket i et hjørne av klasserommet.
- La elever stille seg opp i hjørnet ved at det stadig kommer til en ekstra elev. Vurder når elevene har fylt opp en tenkt eske på 1 m^3.
  Hvor høy må denne esken være?
- Tegn ytterkantene av grunnflaten til den tenkte esken på papiret.
  Hvor stor kan denne grunnflaten være?
- Hvordan kan du kontrollere om esken rommer ca 1 m^3?
- Tegn en figur av den tenkte esken og sett på mål.

Aktivitet 4. Hvor stor en 1 m^3 ?

Oppgave A gir elevene inntrykk av hvor stor 1 m^3 er, både sammenlignet med elevene selv og absolutt. Oppgave B inviterer til å betrakte 1 m^3 som en størrelse, uavhengig av formen.

Omkrets er ikke areal
Det er en vanlig misoppfatning at areal og omkrets er knyttet sammen slik at samme omkrets alltid rammer inn områder med like store areal. I denne oppgaven utfordres elevene på dette punktet.

Eleven velger trolig både kjente geometriske former og mer uregelmessige former. Dermed blir det behov for både å telle og å beregne arealet. Ved telling er det for enkelte elever et spørsmål om hvordan deler av ruter (cm^2) skal behandles.

Utstyr

- Snor bundet i en sløyfe på ca. 40,0 cm
- Ruteark med ruter på $1cm^2$.

Oppgave

- Arbeid sammen to og to.
- Legg snora på rutepapiret og la den danne ulike figurer. Tegn av figurene langs snora.
- Se på hver figur. Hvor stor er omkretsen? Hvor stort er arealet?
  Skriv svarene inni hver av figurene.
- Hvilken form tror du figuren bør ha for at den skal få størst mulig areal? Hvor stort er dette arealet?

Aktivitet 5. Omkrets er ikke areal

8.4 Lengde, areal og volum i klasserommet

Lengder, arealer og volum er mål på den fysiske virkeligheten omkring oss. I barne-hagen og småskolen er det vanlig å feste ”merkelapper” på gjenstander for at elevene skal knytte ordbilder til ord. Når elevene blir eldre, gjentas denne metoden for innlæringen av engelske ord. Vi kan delvis bruke denne metoden også i matematikkundervisningen.

Oppgave

1 La elevene gjette målene på en del lengder:
- Bredden til døra (vinduet)
- Høyden til døra (vinduet)
- Bredden (lengden, høyden) til klasserommet
- Bredden (lengden, høyden) til skapet, krittesken, papirkurven etc.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

2 La elevene gjette målene på en del arealer:
- Arealet til døra (vinduet)
- Arealet til klasserommet
- Arealet til tavla
- Arealet til siden på krittesken, papirkurven etc.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

3 La elevene gjette volumet på en del gjenstander:
- Volumet til klasserommet
- Volumet til en melkekartong
- Volumet til krittesken, papirkurven etc.

La elevene måle og sette på lapper med målene.

Aktivitet 6. Lengde, areal og volum i klasserommet

Like viktig kan det være å gå ”motsatt vei”. Vi kan be elevene se nøye på inventar og bygningsdetaljer og gi som oppgave å finne lengder på 1,00 m, 1,0 dm, 1,0 cm og 1 mm.

Tilsvarende kan vi be elevene finne flater som har arealer 1,00 m^2, 1,0 dm^2, 1,0 cm^2 og 1 mm^2 eller gjenstander som har volum 1,00 m^3, 1,0 dm^3, 1,0 cm^3 og 1 mm^3.

Referanser

Alseth, B. (1998), *Matematikk på småskoletrinnet*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Bakke, B. Nygjelden Bakke, I. (996). *Grunntall 8*. Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Breiteig, T., Pedersen P.I. & Skoogh L. (1996), *Matematikk 8*. Oslo: Aschehoug

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics*. London: Holt Education

Kerry, T. (1981). Talking: The teacher´s role. I C. Sutton (ed.): Commmunicating in the Classroom. London: Hodder & Stoughton

Nortvedt, G.A. (1998). *Hva kan teksten fortelle? Tekstskriving som diagnostisk redskap for å kartlegge sjette- og niendeklassingers volumbegrep*. Oslo: Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet. ILS, UiO.

Thomson, J. & Martinsson, T. (1997). *Matematikkl*