Utdanningsdirektoratet

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Statistikk
Sannsynlighet
Kombinatorikk

Bokmål

INNLEDNING

Dette ressursheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til Læringsstøttende prøver for læreplanens hovedområde *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* og begreper innefor dette emnet.

Disse oppgavene er prøvd ut på elever på 8. og 10. årstrinn etter Kunnskapsløftet LK06 ved et utvalg av ungdomsskoler fra ulike deler av Norge februar/mars 2010..

Del 1 i dette ressursheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i kartleggingsprøven, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatninger som kan ligge til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger basert på utprøvingen av oppgavene.

Oppgavene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved elevens forståelse av forskjellige sider ved statstikk, sannsynlighetsregning og enkel kombinatorikk i grunnskolen. Analysen peker på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisningen, slik at elevene kan utvikle en så solid begrepsforståelse som mulig innenfor dette feltet.

Analysen er likevel ikke fullstendig. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdannelse innenfor temaet statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer som retter seg mot de vansker som de diagnostiske oppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan diagnostiske oppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg på bakgrunn av de vanskene som elevene har.

Del 1 Analyse av oppgavene i læringsstøttende prøver

Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk

I denne delen blir ulike begreper knyttet til statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk analysert og diskutert. De diagnostiske oppgavene innenfor dette hovedområdet er nye.

Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen er følgende:

Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk:
385 på 8. årstrinn og 398 på 10. årstrinn

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med tilknytning til ulike aspekter ved statistikk, sannsynlighetsregning og opptelling/kombinatorikk og ut fra bestemte misoppfatninger. Vi finner vanligvis spor av de ulike vanskene i flere oppgaver.

Det er flest oppgaver innenfor sannsynlighet og statistikk, mens kombinatorikk prøves med to oppgaver.

Kapittel 1 Elevers begreper i sannsynliglighet og statistikk

Statistikk og sannsynlighet – under fellesbetegnelsen *stokastikk* (usikkerhet) – er på vei inn i den norske skolen og dens læreplaner. Trenden er den samme internasjonalt hvor rammeverket til TIMSS-undersøkelsen inneholder et område som kalles ”Data and Change Science” i grade 8 (elever på 8. årstrinn). En av PISA-undersøkelsens sentrale ideer og nettopp ”Usikkerhet”. Den amerikanske matematikklærerforeningens anbefalte læreplaner (NCTM Curriculum and Evaluation Standards) understreker også denne utviklingen og trenden. Sannsynlighet og usikkerhet kom inn i læreplanen L97 og er videreført i Kunnskapsløftets læreplaner, LK06, i matematikk under hovedområdet *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk*. Trolig blir kravet om innsikt i statistikk og stokastisk tenkning som elevene vil møte som samfunnsborgere bli stadig viktigere i framtiden.

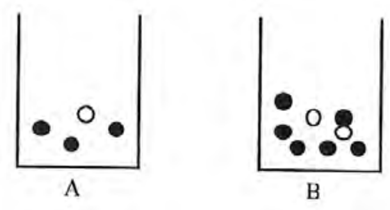
1.1 Stokastiske begreper

Mye av forskningen på stokastiske begreper i USA har skjedd med noe eldre elver og studenter. Dette henger sammen med den svake posisjonen emnet tradisjonelt har hatt i USA. Mye av det vi kjenner til om elevers utvikling av stokastiske begreper, kommer fra forskning gjort i Europa, der sannsynlighet og statistikk har en viktigere rolle i skolen. I Norge har det også vært lite forskning rundt de norske elevenes prestasjoner og utvikling innenfor dette emnet. I så henseende er utprøvingen av de diagnostiske oppgavene i statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk, et viktig bidrag i denne avdekkingen av norske ungdomsskoleelevers begrepsforståelse av for eksempel sannsynlighet (stokastiske begreper).

David Green undersøkte rundt 1980 over 3000 elever i Storbritannia i alderen 11 – 16 år for å kartlegge deres utvikling innenfor dette området. Han brukte oppgaver om trediagram, trekking av kuler, lykkehjul, visuell representasjon av tilfeldighet, språkbruk om sannsynlighet og lignende.

Eksempel

To krukker med svarte og hvite kuler

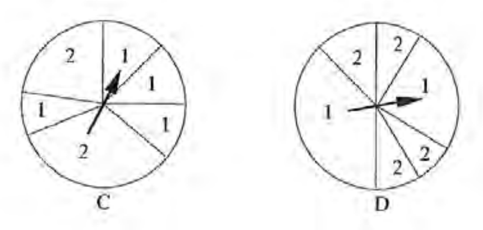


Hvilken krukke gir størst sjanse til å trekke ut en svarte kule? Hvorfor?

Halvparten av elevene svarte at krukka B ga størst sjanse for svart, og 39 % av elevene begrunnet det med at *det er flere svarte kuler der*. Dette er en vanlig misoppfatning hos elevene. Forholdsbegrepet, svært viktig i grunnleggende sannsynlighet, er ikke forstått av disse elevene. Green fant heller ikke stor forbedring med alderen på denne oppgaven. Oppgave 2 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 - 10 i kartleggings-prøven er en lignende oppgave som den ovenfor.

Eksempel

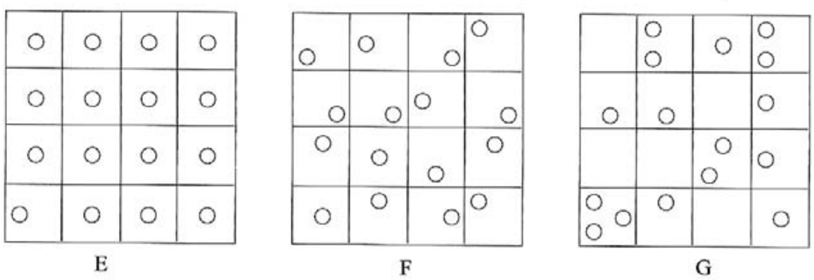
To lykkehjul med sektorer markert. En pil snurres på hvert hjul.



Du ønsker å få 1. Er da ett av hjulene bedre enn det andre, eller er det, det samme? Hvis lykkehjulene ikke gir samme sjanse for å få 1, hvilket av de to vil du helst satse på? Hvorfor?

Bare 50 % av elevene valgte riktig hjul, og brukte en arealmodell, dvs. en visuell støtte, til å forklare sitt resonnement. Nær 25 % av dem valgte hjul C, fordi det hadde *flere områder markert med 1*. Andre valgte C fordi *de aktuelle sektorene ligger nær hverandre*. Her ser vi altså to vanlige misoppfatninger som elevene kan ha når det gjelder slike oppgaver. Oppgave 11 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10 ligner på oppgaven om lykkehjulet ovenfor.

Ellers hadde elevene store problemer med å oppfatte *tilfeldighet*. Et av Greens eksempel var her følgende: Det starter å snø. Snøflakene faller tilfeldig ned og treffer en kvadratisk plate. Hvilken av de tre platene tror du mest sannsynlig viser hvordan de 16 første snøflakene treffer:



Elevene trodde at det skulle komme *et mønster og en symmetri* til syne. Dette kan være misoppfatning som elevene har omkring hva som er tilfeldig. Denne oppgaven i Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 - 10 i den læringsstøttende pøven er en lignende oppgave som den ovenfor, men som ikke er med i den elektroniske prøven.

Vi kan argumentere med at E, F og G er like sannsynlig og at det er tilfeldig fortandersen i et lite antall snøflak. Det finnes et mønster, men det framtrer først ved et større antall, for eksempel for 1000 snøflak.

1.2 Strategier ved sannsynlighetsvurdering

Psykologene Daniel Kahneman og Amos Tversky (se Shaughnessy) har satt fram en teorietisk ramme for å undersøke læring av sannsynlighet og statistikk. Deres tese er at mennesker som er uten erfaring, refleksjon og innsikt i statistikk, bruker visse strategier eller prinsipper for å bedømme sannsynlighet, slik som *representativitet* og *tilgjengelighet*.

1.2.1 Representativitet

Folk gjør overslag over sannsynlighet for fordelingen i et utvalg, basert på hvor godt utvalget passer til den totale populasjonen. *De tror gjerne at også små utvalg skal representere den fordelingen som finnes i populasjonen*; at en slags skjevhet rettes opp på kort sikt fordi representativiteten skal oppnås. For eksempel tror mange at i en familie med seks barn, er rekkefølgen GJJGJG mer sannsynlig enn GGGGJG. Den første synes mer representativ for fordelingen mellom antallet gutter og jenter som fødes, som er tilnærmet 50 – 50. De tror også at rekkefølgen GJJGJG er mer sannsynlig enn GGGJJJ. Den første virker mer representativ for tilfeldigheten i den prosessen som skjer i denne sammenhengen. De tror at dersom det er lenge siden tallet *t* er trukket ut i Lotto, er sjansene større for at det skal trekkes i neste spilleomgang.

Et annet eksempel på hvordan troen på representativitet gjør seg gjeldende, er gjennom neglisjering av utvalgets størrelse; det påvirker ikke bedømmelsen av sannsynlighet. Man kan tro at ved kast med en mynt er sjansen for å få 2 kron på 3 kast den samme for å få 200 kron på 300 kast.

Eksempel

> Anta at sjansen for å få gutt er den samme som for å få jente.
> På hvilket sykehus tror du det flest dager i løpet av ett år ble
> født minst 60 % gutter?
>
> a) Et stort sykehus med mange fødsler
> b) Et lite sykehus med få fødsler
> c) Det er ingen forskjell

Kahneman og Tversky brukte denne oppgaven på elever i college, som hadde lest/studert sannsynlighet og statistikk. Det samme gjorde Shaughnessy, som fant at noe over halvparten av elevene valgte ”ingen forskjell”. Begrunnelsen var at sjansen for å få gutt er den samme ved begge sykehusene. De øvrige elevene fordelte seg likt på stort og lite sykehus. Nøkkelfaktoren er her utvalgets størrelse. Har elevene forstått loven om store tall?

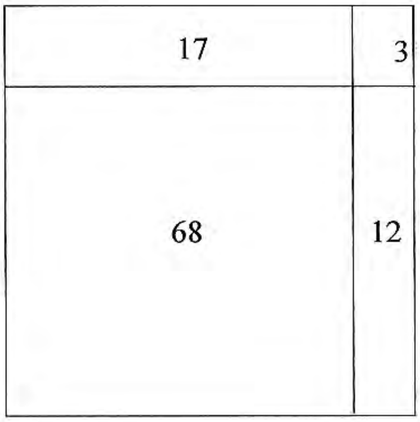
En annen konsekvens av bruk av representativitet er at mange kan neglisjere effekten av et gitt basisforhold. Taxi-problemet er et velkjent eksempel for å illustrere dette:

Eksempel

> I en by er det to taxiselskap. Det ene har blå biler og det andre har grønne.
> I alt er 15 % av taxiene i byen blå og 85 % er grønne.
>
> En natt skjedde det et innbrudd i en forretning. Et vitne så en taxi som kjørte bort fra stedet etterpå. Dette vitnet forklarte i retten at hun hørte glass som singlet og så en taxi som kjørte vekk. Denne taxien mente hun var blå. Forsvareren til taxiselskapet hevdet at siden det var mørkt, kunne hun ha tatt feil farge. Hun ble så testet mange ganger for å skille en blå fra en grønn bil i mørkret. Hun valgte riktig farge i 80 % av tilfellene.

Elevene skal så ta stilling til om bilen hun virkelig observerte, var grønn eller blå.

Undersøkelser indikerer at folk har en tendens til å se bort fra basisraten. Vi møter *the base rate fallacy*. Situasjonen er denne: En relativ pålitelig test er brukt. Den gir utslag på en sjelden type av objekt. Utslaget kan da skyldes at testen ikke er helt pålitelig, snarere enn at den sjeldne typen virkelig var til stede. I dette taxieksemplet er den biltypen som får positivt utslag av vitnet, en noe sjelden bil. 15 % er nemlig blå, noe som indikerer at det er lite sannsynlig at den tilfeldig taxi er en blå taxi. Mange vil likevel se bort fra dette forholdet. De ser bare på at vitnet er ganske pålitelig (velger riktig farge i 80 % av tilfellene). De fester lit til utsagnet og mener at sannsynligheten for at observasjonen er riktig, er stor. Dette kan forklares ut fra at noen tror at også dette ene tilfellet skal representere vitnets pålitelighet; altså at strategien om representativitet påvirker vurderingen.



Vitnet tar feil

Vitnet er pålitelig

Grønn Blå

Av 100 tilfeller vil bilen virkelig være grønn i 85 tilfeller, i 15 tilfeller blå. Av disse 85 vil henholdsvis 68 tilfeller (80 % av 85) oppfattes riktig, og 17 tilfeller bli oppfattet feil. Sett nå at vitnet observerer blå. Da er det større sjanse for at dette er en feil-observasjon av en grønn taxi, enn at det er en riktig observasjon av en blå.

Representativitet er også brukt for å forklare fenomenet som kalles *the negative recency effect* eller *the gambler´s fallacy* – spillerens mistak. Noen tror at hvis de har kastet flere "kron" etter hverandre, er det større sannsynlighet for å få "mynt". 50 – 50-sjansen ved myntkast skal balansere seg og vise seg gjennom at utvalget "strever mot" å gjengi en slik fordeling. De tror at dette også gjelder ved små utvalg. Oppgave 23 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 - 10 i kartleggingsprøven er ment å prøve det samme som er nevnt her om *spillerens mistak*.

1.2.2 Tilgjengelighet

Når folk bedømmer hvor sannsynlig en hendelse er ut fra hvor lett det er å huske spesielle tilfeller av denne hendelsen, benytter de en tilgjengelighetsstrategi. Egne, nære erfaringer og personlige perspektiver påvirker den subjektive oppfatningen av hvor sannsynlig denne hendelsen er.

Eksempel

1) Hvor sannsynlig er det at et tilfeldig ord slutter på *-ene*?
2) Hvor sannsynlig er det at et tilfeldig ord har som nest siste bokstav *n*?

Her er det lett å anslå 1) som større enn 2) fordi det vanligvis er lettere å gjenkalle slike ord.

1.2.3 Resultatorientering

Likevel vil mange svar på eksemplet med taxiproblemet vanskelig kunne forklares ut fra at de spurte bruker strategien om representativitet. Noen bedømmer saken anner-ledes. Folk som svarer at bilen *helt sikkert* er blå, tenker øyensynlig på en annen måte. De legger et *outcome approach* på situasjonen, et resultatorientert perspektiv. De tror at oppgaven er å si *helt sikkert* hvilket utfall forsøket gir, altså å finne de årsaker som kan bestemme utfallet. Det gjenspeiler en oppfatning av at utfallet kan forutses, som ved en deterministisk prosess. Så lenge elever tror at det finnes en måte ved hvilken de kan vite sikkert om en hypotese er riktig, vil trolig storparten av statistisk tenkning og sannsynlighetsteori ikke kunne gå inn hos dem.

Den øvrige skolematematikken handler for det meste om deterministiske prosesser, mens sannsynlighet er noe annet enn dette.

1.2.4 Konjunksjonsfeilen

Sannsynligheten for at to ulike hendelser inntreffer samtidig er mindre enn sannsynligheten for at en av hendelsene inntreffer. Dette er loven om konjunksjon. Forskningen viser at folk ikke alltid følger denne loven når de skal anslå sannsynlighet. For eksempel fant Kahneman og Tversky at studenter i college kunne estimere andelen av mennesker over 55 år som har hatt hjerteinfarkt som større enn andelen av mennesker som har hatt hjerteinfarkt. De fant også at folk kunne oppfatte beskrivelsen av en kvinne gitt som "hun er lys, enslig, 31 år, utadvendt, opptatt av sosial rettferdighet" som mer sannsynlig en karakteristikk av en bankkasserer og feminist enn av en bankkasserer. I studier utført kort tid før folkeavstemmingen om EU-tilknytning i 1994, sa mange at det er større sjanse for at Sverige og Norge sier ja til medlemskap, enn det er for at Norge sier ja.

Det er flere mulige årsaker til hvorfor folk svarer slik. I tilfellet med alder og hjerteinfarkt, kan noen knytte disse sammen og se alder som en årsak til infarkt. Kanskje erfaringer viser at i de fleste tilfeller vi kjenner til, var det eldre mennesker som ble rammet. Vi kan altså bruke en årsaksmekanisme, eller vi kan bruke en tilgjengelighetsstrategi. Det kan også skyldes selve tolkningen av et slikt spørsmål. Noen kan blande sammen med *konjunksjon av to hendelser* med en *betinget sannsynlighet* for den ene, gitt den andre. I infarkteksemplet kan enkelte tenke: Sannsynligheten for hjerteinfarkt, gitt at personen er over 55 år. I avstemmings-eksemplet kan noen tenke: Sannsynligheten for at Norge sier ja, gitt at Sverige sier nei.

1.2.5 Vanskeligheter med betinget sannsynlighet

Begrepene betinget sannsynlighet og uavhengighet er spesielt vanskelige for elevene å forstå. Taxiproblemet er komplisert, og trolig er ikke representativitet tilstrekkelig for å forklare elevenes problem her.

Det knytter seg problemer til det å forstå sannsynligheten av den hendelse A betinget av en annen hendelse B. Det gjelder altså sjansen for A gitt B. En av de mest kjente misoppfatningene i forskningslitteraturen oppstår når betingelsen, hendelsen B, har skjedd i tid etter at A har inntruffet. Et velkjent eksempel er *Falks problem*.

Eksempel

> Fra en krukke med 2 svarte og 2 hvite kuler trekkes to etter hverandre *uten å legge tilbake*. Falk ga oppgavene:
>
> a) Hvor stor er sjansen for at den andre kula er hvit, gitt at den første også er det?
> b) Hvor stor er sjansen for at den første kula er hvit, gitt at den andre også er det?

Det viste seg at det var relativt enkelt å innse at i a) blir svaret 1/3. Problemene kan analyseres ved trediagram. Vi kan se at når en hvit er trukket ut, er det igjen en hvit av i alt tre kuler. Langt verre er det å forstå at dette blir svaret i b). I b) vil mange peke på at hvis den andre kula er hvit, har det ingen innflytelse på trekningen av den første. Den har jo allerede skjedd. Ved trekningen av den første er sannsynligheten for hvit 1/2. De ser at det ikke er noen årsakssammenheng mellom resultatet for andre trekning og første trekning. Likefullt er det en sannsynlighetssammenheng. Denne sammenhengen er det ikke alle som ser.

Montys dilemma er mye omtalt i litteraturen, som et eksempel på problemet knyttet til en betingelse, til *hva* som er kjent og *når*.

Eksempel

> I et TV-show viser programlederen deltakeren tre dører. Bak den ene er det en stor premie: en bil. Bak hver av de to andre ligger en trøstepremie: en appelsin. Hvilken dør som skjuler bilen vet bare programlederen. Deltakeren skal velge en dør og får da den premien som skjuler seg bak denne. Når deltakeren har valgt en dør, svarer programlederen med å åpne en av de to andre, og denne er tom og skjuler alltid bare trøstepremien. Så spør han: *Vil du endre eller holde fast på ditt valg?* Hva bør deltakeren gjøre?

Mange elever tror at når programlederen åpner døren, stiger vinner-
sjansene automatisk fra 1/3 til ½, så sant vi velger på nytt mellom to uåpnede dører. Det er to dører, to muligheter. En av disse skjuler premien, altså er sjansen for å vinne 1/2. For disse blir det interessant å se hva som skjer hvis de simulerer dette spillet. De kan for hver av strategiene

a) holde fast på valget,
b) endre valget,
c) kaste en mynt og hvis den gir "kron", endre valget

for eksempel 100 ganger, med et lykkehjul og en mynt, teste ut vinnersjansen ved denne strategien. En slik simulering viser en dramatisk endret oppfatning. Da kan de innse at strategi b) gir størst vinnersjanse, og at den er 2/3. Elevene blir da mer åpne for en logisk forklaring: Ved starten er det tre valgmuligheter. Bruker de strategien om å endre valget, vil de vinne bil i to av tilfellene, nemlig der de ved starten velger feil dør. De vil tape bare om de ved starten velger den riktige døra.

Simulering og utforskning i forbindelse med sannsynlighetsregningen må anses som et svært viktig undervisningsprinsipp.

1.3 Hvordan påvirke elevenes stokastiske oppfatninger og begreper?

Når vi underviser stokastikk, møter ikke elevene med totalt blanke ark. De har en rekke stokastiske begreper ut fra sine erfaringer eller mangel på slike. Vi ønsker å gi elevene mulighet til å bygge opp en brukbar matematisk modell for sannsynlighet. Så finner vi at de ofte stiller med mange misoppfatninger.

Forskere, som Shaughnessy, har undersøkt effekten av undervisningsopplegg, der elevene ble konfrontert med egne misoppfatninger. I en rekke aktivitetsbaserte oppgaver fikk elevene først gjette sannsynligheten for de uilke utfallene. Så utførte elevene eksperimenter, data ble samlet inn og analysert. Utfallet som da kom fram, ble sammenlignet med elevenes gjetting, og resultatet ble diskutert. Først nå ble det gjort forsøk på å innføre en teoretisk eller matematisk modell for problemet.

Etter en sekvens av slik undervisning, ble klassene testet og sammenlignet med andre ”vanlige” klasser som var undervist etter tradisjonelle måter. En klar forskjell ble påvist. Forsøksklassene viste at de brukte representativitet og tilgjengelighet i klart mindre grad, og brukte tilsvarende mer korrekte resonnementer. Noe tilsvarende ble ikke påvist i kontrollklassene med en tradisjonell undervisning.

Til tross for slike undersøkelser, viser det seg at mange elever ofte holder fast på tidligere oppfatninger om sjanse. *Misoppfatninger kan være vanskelig å bli kvitt.*

Kapittel 2 Statistikk

Dette ressursheftet inneholder oppgaver innenfor statistikk som kartlegger elevenes forståelse av de mest grunnleggende begrepene innenfor statistikk. På ungdomstrinnet forventer vi at elevene mestrer sentralmålene gjennomsnitt og median, og typetall. Det finnes to oppgaver (16 og 28) som direkte prøver om elevene forstår gjennomsnittsbegrepet. Videre prøver oppgavene 6 og 17 om elevene forstår medianbegrepet. Oppgave prøver elevene i om de har forstått forskjellen mellom median og gjennomsnitt. Oppgave 25 er den eneste oppgaven som prøver elevene i begrepet typetall. Til slutt innenfor emnet statistikk prøver oppgavene 10 og 19 elevene i det å kunne avlese, tolke, analysere og presentere diagrammer.

2.1 Læreplanen LK06

Læreplanen for matematikk etter 10. årstrinn for statistikk sier at målet for opplæringen er at eleven skal kunne

- *gjennomføre undersøkingar og bruke databasar til å søkje etter og analysere statistiske data og vise kjeldekritikk*
- *ordne og gruppere data, finne og drøfte median, typetal, gjennomsnitt og variasjonsbreidd, og presentere data med og utan digitale verktøy*

2.2 Sentralmål – gjennomsnitt og median

Det ble gitt seks oppgaver i den læringsfremmende prøven i Sta*tistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* 8 – 10, som vi kan plassere i kategorien sentralmål, nærmere bestemt gjennomsnitt og median.

2.2.1 Gjennomsnitt

Oppgave 16

Gjennomsnittshøyden for 4 gutter i en speiderpatrulje er 150 cm. En ny speider blir med i patruljen. Han er 170 cm høy.

Hvor stor blir gjennomsnittshøyden for speiderne nå?

Svar: ______ cm

Oppgaveeksempel 1: Oppgave 16 SSK 8 – 10. Gjennomsnitt

Oppgave 16 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	11	12
154 **(Riktig svar)**	26	40
160 (tar gjennomsnitt av 150 og 170)	29	28
320 (legger sammen 150 og 170)	4	1
64 (160·4): 10	4	1
155, 156, 157, 158 eller lignende	7	5
170 (høyeste verdi)	2	0
164 eller 165	3	2
Andre svar	13	10

Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 SSK 8 – 10. Gjennomsnittshøyde på speidere.

Mange elever regner ut det nye gjennomsnittet slik: $\bar{x} = \frac{(150+170)}{2} = 160$ og vekter gjennomsnittshøyden til de fire speiderne og høyden til den femte like mye.

Her avdekkes en misoppfatning om gjennomsnitt idet mange elever ikke har oppfattet at vi må først finne samlet høyde for *alle* de fem speiderne og deretter dividere med antall speidere, slik:

$$\bar{x} = \frac{(4 \cdot 150 + 170)}{5} = 154$$

Oppgave 27

I friidrettsgruppen er det 5 jenter og 10 gutter. Gjennomsnittshøyden for jentene er 150 cm, og gjennomsnittshøyden for guttene er 165 cm.

Hvor stor blir gjennomsnittshøyden for alle i friidrettsgruppen?

Svar: ______ cm

Oppgaveeksempel 2: Oppgave 27 SSK 8 – 10. Gjennomsnitt

Oppgave 27 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	17	15
160 **(Riktig svar)**	22	38
157,5 (gjennomsnitt av 150 og 165)	25	23
Andre tall mellom 157 - 159	5	9
21	4	0
315 (legger sammen 150 og 165)	5	1
Andre svar	21	14

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Oppgave 27 SSK 8 – 10. Gjennomsnittshøyde for friidrettsgruppe.

Mange elever viser samme sviktende forståelse for gjennomsnitt. Situasjonen ligner den i oppgave 16. Forholdsvis mange elever tar gjennomsnittet av de to gjennom-snittshøydene slik:

$$\bar{x} = \frac{(150+165)}{2} = 157{,}5$$

Men igjen er det slik at vi må beregne samlet høyde for alle og dividere på antall slik:

$$\bar{x} = \frac{(5 \cdot 150 + 10 \cdot 165)}{15} = 160$$

Elevenes løsningsfrekvens på både oppgave 16 og 28 kan tyde på at denne typen oppgaver er noe uvant for mange elever. De fleste klarer nok å regne ut et gjennomsnitt ut fra gitte verdier, mens oppgavene 16 og 28 prøver en dypere forståelse av begrepet gjennomsnitt.

Flere av svarene kan tyde på at elevene har problemer med å vurdere om svaret de får er et rimelig svar, gitt situasjonen. ”Andre svar” som 1,39 og 315 er eksempler på dette.

Oppgave 24

Uten å foreta beregninger skal du sammenligne gjennomsnittet og medianen for disse tallene:

1, 2, 5, 10, 40

Hvilken påstand er riktig?

- Gjennomsnittet er størst
- Gjennomsnittet og medianen er like store
- Medianen er størst

Oppgaveeksempel 3: Oppgave 24 SSK 8 – 10. Gjennomsnitt og median

I denne oppgaven skal elevene ikke foreta beregninger. Elevene skulle heller ikke bruke kalkulator på denne oppgaven. Elevene kan imidlertid tenke seg at gjennomsnittet her må være størst på grunn av ekstremverdien 40.

Medianen er opplagt 5 (den midterste verdien i tallmaterilaet). Gjennomsnittet blir jo 58/5, noe som må være større enn 5. Neppe så mange har problemer med å se at medianen er 5 siden også tallene er ferdig arrangert etter stigende rekkefølge. Da er det nok å se at samlet verdi er over 50 for de fem verdiene, derfor må gjennomsnittet ha større verdi enn medianen på 5.

Oppgave 24 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	6	3
Gjennomsnittet er størst **(Riktig svar)**	64	74
Gjennomsnittet og medianen er like store	17	12
Medianen er størst	13	11

Tabell 3: Prosentvis fordeling. Oppgave 24 SSK 8 – 10. Gjennomsnitt og median.

Tabell 3 ovenfor viser at flertallet av elevene forstår at gjennomsnittet er størst, men en del elever velger de andre alternativene, som indikerer at disse har en manglende forståelse av begrepene ”gjennomsnitt” og ”median” og forskjellen mellom disse.

2.2.2 Median

Oppgaveeksempel 4: Oppgave 6 SSK 8 – 10. Median

Her må elevene sortere verdiene for høydene og deretter identifisere den midterste verdien, som vi kaller *medianen*.

Overraskende mange elever velger *den midterste verdien uten å rangere verdiene* først i stigende eller synkende rekkefølge.

Oppgave 6 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	9	4
141 eller 141,0 **(Riktig svar)**	49	73
133 (tar midtverdi uten å rangere)	18	11
143 eller 144	9	4
715 (legger samme alle verdiene)	2	0
147	2	1
Andre svar	10	7

Tabell 4: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 SSK 8 – 10. Median. Høyde til elever.

Tabell 4 ovenfor avslører en misoppfatning om median hos elevene. De vet at medianen er verdien i midten av et tallmateriale, men de glemmer å rangere tallene etter stigende eller synkende rekkefølge først.

Oppgaveeksempel 5: Oppgave 17 SSK 8 – 10. Median

Mens elevene skulle rangere tall før de fant medianen i oppgave 6, er verdiene i oppgave 17 allerede rangert i stigende rekkefølge. Når antall verdier derimot er et partall (her: 6), dukker medianen opp som et gjennomsnitt av de to midterste verdiene.

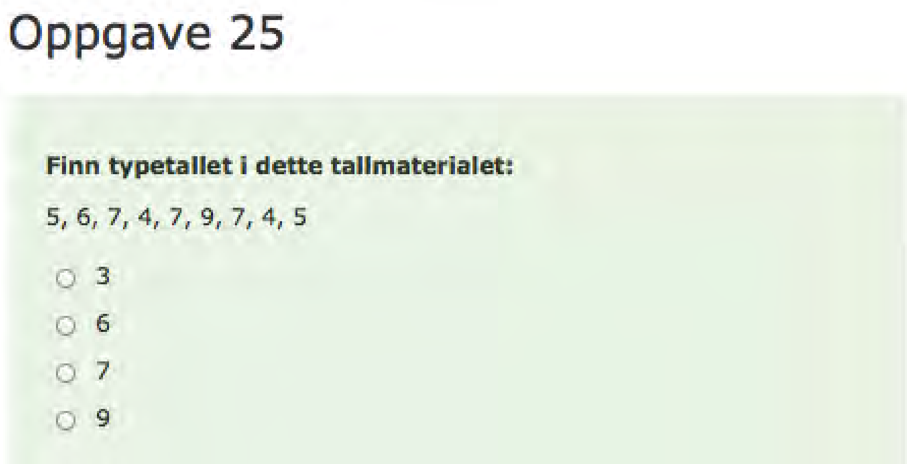
$$\text{Median: } \frac{(8+16)}{2} = 12$$

En del elever svarer ofte ”8 og 16”, ”8, 16” og lignende. Disse elevene har en delvis forståelse av hvordan de skal finne medianen, men kommer ikke helt i mål. De har forstått at medianen er en sentralverdi, Mindre forståelse har de elevene som for eksempel velger den høyeste verdien, 64. Relativt mange elever velger 16 som median da denne verdien ”synes” å ligge i midten, et slags gjennomsnitt.

Oppgave 17 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12	5
12 (Riktig svar)	38	50
16	17	14
"8 og 16" eller lignende	10	12
8	3	4
62 eller 63 eller 64	3	1
Andre svar	17	14

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Oppgave 17 SSK 8 – 10. Median

2.3 Typetall



Oppgaveeksempel 6: Oppgave 25 SSK 8 – 10. Typetall

Typetallet er enkelt forstått som den mest ”typiske” (den hyppigste) observasjonsverdien i et tallmateriale. Vi kan be elevene om å lage en frekvenstabell slik:

Tall	Frekvens
4	II
5	II
6	I
7	III
9	I

Tallet 7 er det tallet som forekommer flest ganger, altså er 7 det vi kaller ”typetallet”, eller det mest ”typiske” tallet om vi vil.

Oppgave 25 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	8	4
3	2	0,5
6 (rangerer tallene og finner median)	7	4
7 **(Riktig svar)**	81	90
9	2	1,5

Tabell 6: Prosentvis fordeling. Oppgave 25 SSK 8 – 10. Typetall.

Tabell 6 ovenfor viser at det store flertallet ikke har problemer med å finne type-tallet i et tallmateriale. Det virker som om elevene har en langt bedre forståelse av dette begrepet enn hva tilfellet er for ”gjennomsnitt” og ”median”.

2.4 Diagram og avlesing

Oppgave 10

Seks elever plukket jordbær. Fem av elevene plukket i to uker. Diagrammene viser hvor mye de plukket hver uke. Ulf plukket bare i den første uken. Han plukket mindre enn Eva og mer enn Ole.

a) Hvilken elev plukket minst i første uke?

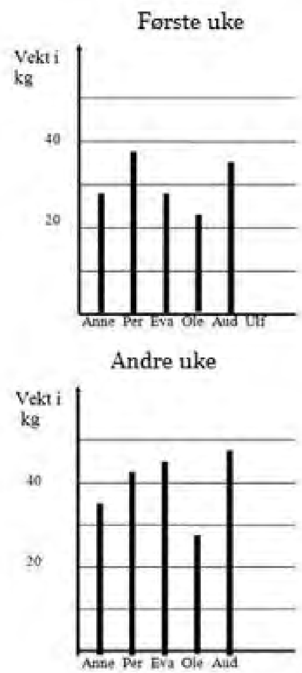
Svar:

b) Hvilken elev økte mest fra første til andre uke?

Svar:

c) Hvordan kan søylen for første uke se ut for Ulf?

Svar:



Oppgaveeksempel 7: Oppgave 10 SSK 8 – 10. Diagram. Avlesing.

Elevene har høy løsningsfrekvens på denne oppgaven, jfr. tabell 7 nedenfor.

Oppgave 10a Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0,5	0,5
Anne	0,5	0
Per	1,5	0,5
Eva	0	0
Ole **(Riktig svar)**	87,5	91
Aud	0	0
Ulf	10	8

Tabell 7: Prosentvis fordeling. Oppgave 10a SSK 8 – 10. Hvem plukket minst i første uke?

I diagrammet i oppgave 10 står Ulf oppført uten noen søyle. Trolig er det flere elever som tolker dette som at Ulf ikke plukket jordbær i det hele tatt i første uke. Dette kan være en forklaring til at noen elever velger Ulf som den som plukket minst i første uke.

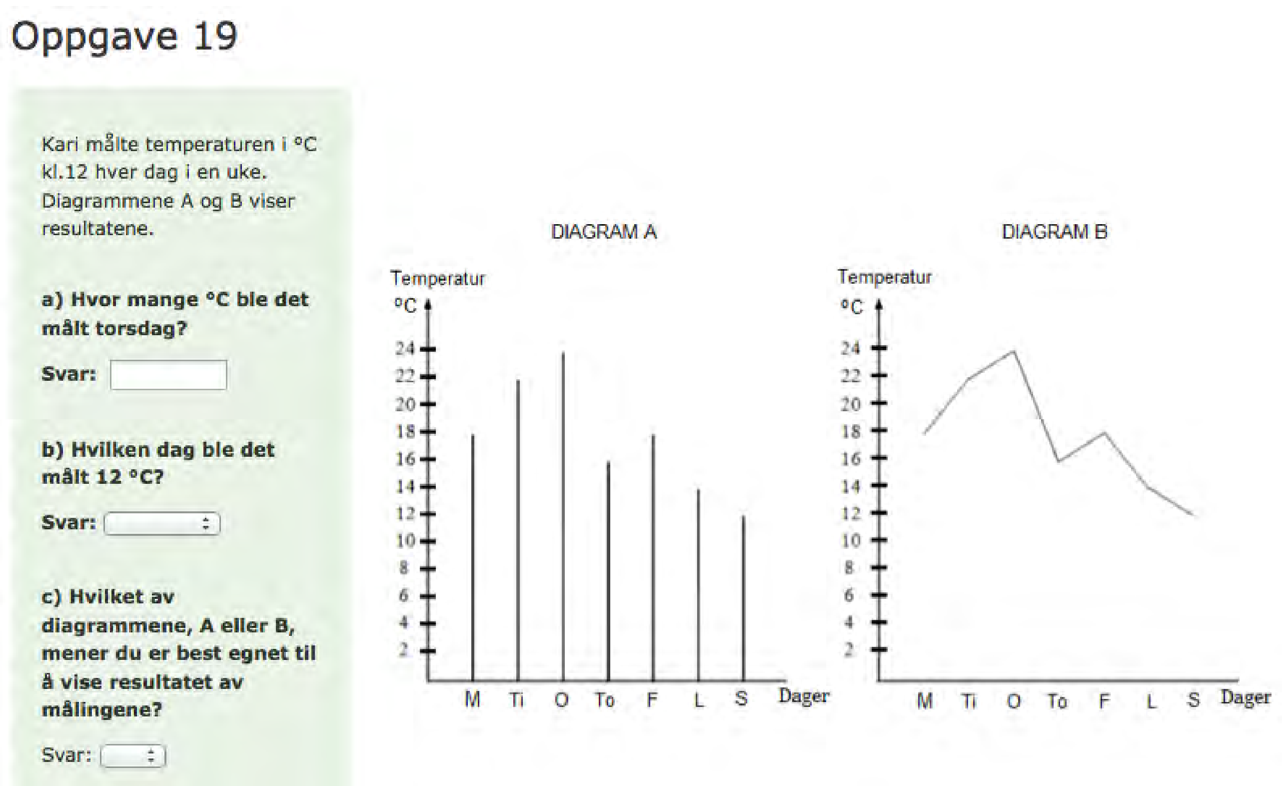
Oppgave 10b Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	1	0,5
Anne	0	1
Per	2	0
Eva (**Riktig svar**)	70	77
Ole	1	0,5
Aud	26	21

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Oppgave 10b SSK 8 – 10. Hvem økte mest fra første til andre uke?

I diagrammet for andre uke er det Aud som har den høyeste søylen av alle. Nesten en fjerdepart av elevene tolker dette som om at Aud har størst framgang fra første til andre uke. Dette er en kjent misoppfatning i forbindelse med avlesning av diagrammer, dvs. i stedet for å se på relasjonen mellom to søyler, ser elevene absolutt på én.

Oppgave 10c Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	*10. årstrinn*
Ubesvart	16	*12*
En søyle mellom Evas og Oles høyde (**Riktig svar**)	81	*87*
Ulfs søyle høyere enn Evas og Oles	1,5	*0,5*
Ulfs søyle lavere enn Evas og Oles	1,5	*0,5*

Tabell 9: Prosentvis fordeling. Oppgave 10c SSK 8 – 10. Hvor mye kan Ulf ha plukket i første uke?



Oppgaveeksempel 8: Oppgave 19 SSK 8 – 10. Diagram. Avlesing.

Oppgave 19a Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2	1,5
12	0	0
14	1	0
16 **(Riktig svar)**	84	89
18	3	1
22	1	0,25
24	0	0,25
Andre svar	8	8

Tabell 10: Prosentvis fordeling. Oppgave 19a SSK 8 – 10. Hvor mange grader? Avlesning.

Oppgave 19b Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2	1
Mandag	0,25	0
Tirsdag	0	0
Onsdag	0	0
Torsdag	0	0
Fredag	0,5	0,25
Lørdag	1	1
Søndag **(Riktig svar)**	96	97

Tabell 11: Prosentvis fordeling. Oppgave 19b SSK 8 – 10. Hvilken dag ble det målt 12 grader?

Oppgave 19c Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	4	4
Diagram A **(Riktig svar)**	73,5	71
Diagram B	22,5	25

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave 19c SSK 8 – 10. Hvilket diagram er best å bruke?

I oppgave 19a er det avlesning fra x-akse til y-akse, mens i oppgave 19b er det omvendt. Noen elever synes å ha problemer med disse avlesningene, men det går greit for det store flertallet av elevene.

Vi kan også diskutere om det bare et diagram A som er det riktige svaret på oppgave 19c. Hvis det for eksempel ble målt temperaturer utover en måned, vil kanskje et linjediagram gi et like bra inntrykk? Det er likevel et poeng å skille mellom punktmåling (diagram A) og kontinuerlig måling (diagram B).

Kapittel 3 Sannsynlighet

Alseth[1] definerer tre ulike typer sannsynlighet: subjektiv sannsynlighet, teoretisk eller geometrisk sannsynlighet og empirisk sannsynlighet.

Subjektiv sannsynlighet
Den subjektive sannsynligheten er avhengig av kunnskapen til den som anslår sannsynligheten. Denne typen har det ikke vært så stort fokus på i norsk skole, men kanskje den typen som likevel blir mest brukt utenfor skolen i dagligdagse sammen-henger og situasjoner, ikke minst av elevene selv, før de møter den mer teoretiske sannsynligheten som skolematematikken ofte har inneholdt. Den subjektive sannsynligheten knytter i større grad enn den teoretiske sannsynlighet og usikkerhet til elevenes hverdagsspråk. Elevene kan kanskje spørre seg og lure på hva er sjansen for å få sol i morgen, hva er sjansen for at vi får lekseprøve i dag (hva er det læreren bærer på? – det var lenge siden sist vi hadde lekseprøve osv).

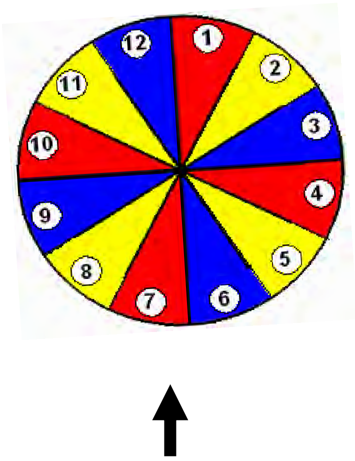
Teoretisk (geometrisk) sannsynlighet
Den teoretiske sannsynligheten er for mange den "egentlige" sannsynligheten, gjerne ledsaget av formler, kanskje ikke så mye i grunnskolen, men med betydelig større innslag i videregående opplæring. Denne typen sannsynlighet knytter seg raskt til andre fagområder gjennom brøk og kombinatorikk, ved at vi definerer sannsynligheten for en hendelse som antall gunstige (ønskede) utfall for hendelsen dividert på antall mulige utfall (utfallsrommet), eller at vi trekker fra deler av (begrenset del av) utfallsrommet (betinget sannsynlighet). Vi lager oss teoretiske sannsynlighetsmodeller for eksempel for et uniformt utfallsrom. Kast med en terning er et eksempel på det.

Empirisk sannsynlighet
Den empiriske sannsynligheten eller den erfaringsmessige sannsynligheten knytter sannsynlighet til statistikk og til forholdsregning. Denne typen sannsynlighet er preget av eksperimentering og simulering, et sentralt emne i LK06, se kapittel 2.1 nedenfor. Et typisk eksempel er knipsing av en tegnestift hvor man registrerer antall ganger tegnestiften lander med spissen ned og hvor mange ganger med spissen opp. Ut fra den erfaringen vi gjør i forsøket, kan vi anslå sannsynligheten for at tegnestiften lander på en spesiell måte. For eksempel kan vi anslå hvor mange ganger tegnestiften lander med spissen opp, dersom vi kaster x antall ganger.

Alseth har eksempler på hvordan vi kan utforske den teoretiske sannsynligheten, og få et bilde av at de teoretiske verdiene som vi ofte opererer med er rimelige. Han nevner et eksempel med et terningkast. Først kaster vi terningen for eksempel seks ganger. Hvor sikker er du på å få minst en sekser? Er det lite sannsynlig? Er det mye sannsynlig? Er det helt sikkert? Først gjetter vi og deretter kan vi gjøre forsøk. Videre kan vi spørre om hvor stor sjansen er for å ikke få en sekser på neste terningkast, og så videre. Vi kommer tilbake til slike forsøk i del 2 i dette ressursheftet.

Det andre eksemplet som Alseth nevner i forbindelse med utforskning av teoretisk sannsynlighet, er knyttet til et typisk "lykkehjul" inndelt i farger (og eventuelt tall i tillegg).

[1] Alseth (2009)



Deretter kan vi gjøre ulike forsøk ved at vi snurrer dette lykkehjulet rundt og registrerer hvilken farge og hvilket tall pilen peker på når hjulet har stoppet. Vi kunne spørre hvor ofte hjulet stopper på rød farge eller på gul eller på blå farge.

Elevene kommer ofte til skolens undervisning i sannsynlighetsregning med oppfatninger om sjanse, usikkerhet, sannsynlighet som de har fått utenom skolen (subjektivt sannsynlighet) og som blir utfordret i møte med skolens mer teoretiske sannsynlighet. I del 2 skal vi se nærmere på lere slike oppgaver. Et typisk eksempel som utfordrer elevene i deres oppfatning om sannsynlighet er trekning av kuler eller lignende fra en boks eller krukke. Det er 4 blå kuler og 2 røde kuler i en krukke. Uten å se trekker vi en kule fra krukken, ser på fargen, og legger så kulen tilbake i krukken (med tilbakelegging). Vi trekker til sammen fire ganger fra krukken. Vi får blå kule alle fire gangene. Vi trekker enda en gang. Hvilken farge er det mest sannsynlig på kulen? Blå? Rød? Er det like sannsynlig med blå som med rød?

I kapittel 2.1.2 har vi tatt med en oppgave hvor elevene utfordres til å vurdere om et spill kan kalles rettferdig eller ikke og hvor elevene må begrunne svaret. Dette kan ofte framprovosere eventuelle f misoppfatninger som elevene har. Oppgaven ligner på et eksempel som Alseth nevner hvor tallene 1, 2, 3 og 4 på brikker ligger i en boks. Spiller A trekker først, deretter spiller B. Dersom summen av de to brikkene er et partall, vinner spiller A. Dersom summen blir et oddetall, vinner spiller B. En vanlig misoppfatning hos elevene nå at de vil se at det er like mange oddetall (1 og 3) som partall (2 og 4) på brikkene, og dermed slutte at det må være rettferdig. S*om alltid er det viktig å få en oversikt over utfallsrommet* på en slik trekning før vi kan trekke slutninger. I denne typen trekning (med tilbakelegging av brikkene før hver omgang) består utfallsrommet av 12 utfall:

1 + 2 = 3	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 3 = 7

Av dette ser vi at det er 8 oddetallsløsninger (rød) og 4 partallsløsninger. Sannsynligheten for å få partall som summen er altså 4/12 = 1/3. Dersom spiller 1 trekker et partall først, vil det være to oddetall og et partall igjen i boksen. Da er det bare 2/6 = 1/3 sjanse for at summen blir et partall (partall + partall). Dersom spiller 1 trekker et oddetall først, vil det være to partall og et oddetall igjen i boksen. Da er det bare 2/6 = 1/3 sjanse for at summen blir et partall (oddetall + oddetall).

3.1 Læreplanen LK06

Læreplanen for matematikk etter 10. årstrinn for sannsynlighet sier at målet for opplæringen er at eleven skal kunne

- *finne sannsyn gjennom eksperimentering, simulering og berekning i daglegdagse samanhengar og spel*
- *beskrive utfallsrom og uttrykkje sannsyn som brøk, prosent og desimaltal*

3.2 Trekning av objekter (kuler, lotteri, kortstokk)

Vi har samlet oppgaver som har med trekning av objekter å gjøre, det vil si trekning av kuler fra krukker, trekning i lotteri og trekning av kort fra en kortstokk, og vil behandle disse under ett i dette kapitlet.

Den andre oppgaven som elevene møter den diagonstiske prøven, oppgave 2, gis det en situasjon hvor vi skal trekke kuler fra krukker med svarte og hvite kuler – faktisk to situasjoner hvor de krukkene har ulikt antall svarte og hvite kuler. Spørsmålet er fra hvilken krukke det er størst sjanse for å trekke en hvit kule. Trekningen er tilfeldig (det er ikke mulig å se kule når vi trekker) og for å beregne sannsynligheten for å trekke en hvit kule, må elevene kjenne til begrepene gunstige (ønskede) utfall og mulige utfall.

Oppgaveeksempel 9: Oppgave 2 SSK 8 – 10. Trekning av objekter. Kuler fra krukker.

I denne oppgaven må elevene finne sannsynligheten for å trekke en hvit kule fra krukke A og krukke B og deretter sammenligne disse brøkene.

Oppgave 2 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0	0,2
A gir størst sjanse	20	14
B gir størst sjanse **(Riktig svar)**	43	57
Det er lik sjanse i begge krukkene	37	29

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave 2 SSK 8 – 10. Krukker. Størst sjanse.

Oppgaven avdekker en vanlig misoppfatning hos elevene: de velger den krukken det er flest hvite kuler. De knytter altså sannsynlighet til antallet hvite kuler og beregner ikke forholdet mellom gunstige utfall (hvite kuler) og mulige utfall (alle kulene) for hver av krukkene:

$$P(\text{Hvit kule})_{\text{Krukke A}} = \frac{3}{5} \qquad P(\text{Hvit kule})_{\text{Krukke B}} = \frac{2}{3}$$

Som vi har nevnt før knyttes sannsynlighetsregning til brøker, slik at elevene må for eksempel som i denne oppgaven, sammenligne to brøker.

Når sannsynlighetsregningen knyttes direkte til brøk på denne måten, er det mange elever som får problemer med å finne ut hva som er mest sannsynlig når de må sammenligne verdien av brøker.

Noen elever svarer at krukke A gir størst sjanse for å trekke en hvit kule. Dette kan komme av misoppfatningen om at det er antallet hvite kuler som alene avgjør spørsmålet, og ikke forholdet mellom gunstige og mulige utfall.

Det andre feilsvaret, at det skal være lik sjanse for å trekke en hvit kule i begge krukkene, kan komme av at elevene har problemer med å sammenligne brøker og at de antar at brøkene har lik verdi – altså lik sjanse.


Oppgave 8

I et lotteri er det 100 lodd. 10 av loddene er vinnerlodd.

Hva er det minste antall lodd du må kjøpe for å være helt sikker på å få minst én gevinst?

Svar:

Oppgaveeksempel 10: Oppgave 8 SSK 8 – 10. Trekning av objekter. Lotteri.

I denne oppgaven prøves elevene i forståelse av antall gunstige (ønskede) utfall og antall mulige utfall. Spørsmålet er hvor mange lodd vi må kjøpe for å være sikker på å vinne *minst* en gevinst. Her kan elevene resonnere seg fram til svaret uten så mange beregninger.

Dersom vi kjøper 90 lodd kan vi i teorien være "uheldig" og kjøpe de 90 loddene som ikke gir gevinst (10 vinnerlodd). Derfor må vi kjøpe *minst* 91 lodd for å være sikker på å vinne én gevinst eller flere.

Oppgave 8 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2,5	4
91 (**Riktig svar**)	25	34
10	37	39
50 eller 50 %	8,5	4,5
90	5,5	3,5
100	6,5	3
Andre svar	15	12

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 SSK 8 – 10. Lodd. Minst en gevinst.

De fleste elevene på begge årstrinn mener at å kjøpe 10 lodd er tilstrekkelig. Trolig blander de sammen med 10 vinnerlodd og har ikke fullt ut forstått problemstillingen.

Oppgave 18

To krukker, A og B, inneholder svarte og hvite kuler. Det er flere svarte kuler i A enn i B. Du skal trekke én kule fra hver krukke.

Hvilken påstand er riktig?

- ◯ Det er større sannsynlighet for å trekke en svart kule fra A enn fra B
- ◯ Sannsynligheten er like stor for å trekke en svart kule fra A som fra B
- ◯ Det er større sannsynlighet for å trekke en svart kule fra B enn fra A
- ◯ Vi vet ikke nok til å kunne avgjøre hvilke påstander ovenfor som er riktige

Oppgaveeksempel 11: Oppgave 18 SSK 8 – 10. Trekning av objekter. Kuler fra krukker.

Denne oppgaven har et flervalgsformat og prøver elevene i sannsynlighet, nærmere bestemt forholdet mellom gunstige og mulige utfall.

Dette er en trekning fra to krukker som begge inneholder både svarte og hvite kule. Det er flere svarte kuler i A enn i B. Men elevene får ikke vite *hvor mange* kuler det befinner seg i krukkene A og B. Det eneste de får vite at det er flere gunstige utfall (svarte kuler) i krukke A. Men for å bestemme sannsynligheten for å trekke svarte kule, må vi vite mulige utfall (totalt antall i hver av krukkene).

Trekningen fra krukke A er uavhengig trekningen fra krukke B. Selv om vi får vite at det er flere svarte kuler i krukke A, vet vi ikke totale antallet kuler, verken i krukke A eller i krukke B. Dermed blir det umulig å beregne sannsynligheter og sammenligne dem (vi må også ha mulige utfall i krukkene).

Oppgave 18 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2	2
Det er større sannsynlighet for å trekke en svart kule fra A enn fra B	62	55
Sannsynligheten er like stor for å trekke en svart kule fra A som fra B	7	5
Det er større sannsynlighet for å trekke en svart kule fra B enn fra A	4	2
Vi vet ikke nok til å avgjøre spørsmålene om sannsynlighet (**Riktig svar**)	25	36

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave 18 SSK 8 – 10. Krukke A og krukke B.

Mange elever har den samme misoppfatning om at sannsynlighet er uansett knyttet til at det er flest svarte kuler i den ene krukken.

De to siste oppgavene innenfor kategorien trekning av objekter, oppgave 21 og 27, handler om trekning av kort fra en kortstokk, men omhandler litt ulike situasjoner.

Oppgave 21

Du har en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Kortene er tilfeldig blandet. Det er 13 kort av hver type - hjerter, spar, kløver og ruter. Du trekker et kort.

Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et kort med kløver fra kortstokken?

Skriv svaret som brøk.

Svar:

Oppgaveeksempel 12: Oppgave 21 SSK 8 – 10. Trekning av objekter. Kortstokk.

Denne oppgaven har et kortsvarsformat og prøver elevene i sannsynlighet, nærmere bestemt sannsynlighetsregning ved trekning og opptelling av gunstige og mulige utfall.

Det er 13 gunstige utfall for denne trekning fra kortstokken: 13 kløverkort.

Det er videre 52 mulige utfall: 52 kort i kortstokken totalt. Vi skal bare trekke én gang fra kortstokken. Derfor blir sannsynligheten:

$$P(\text{Trekke et kløverkort}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Her må vi ikke gå omveien om 13/52, men kan også tenke direkte ”1 av 4” farger.

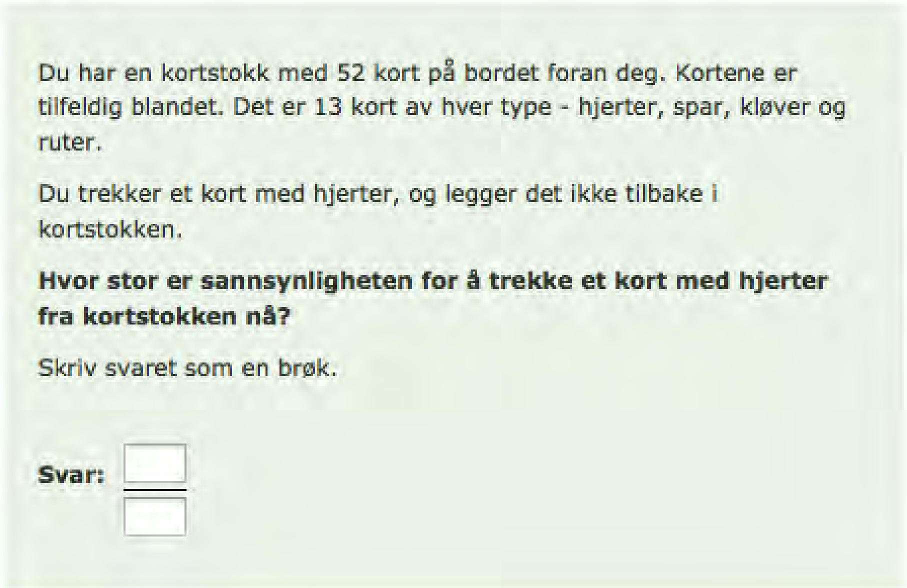
Oppgave 21 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	9,5	5
1/4 eller 13/52 **(Riktig svar)**	63,5	78
1/13	5	4,5
52/13 (Reverserer)	1	1,5
1/2 eller lignende	5,5	1
Andre svar	15,5	10

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave 21 SSK 8 – 10. Kortstokk. Trekke kløver.

Det er relativ høy løsningsfrekvens for denne oppgaven. Oppgaven inviterer elevene til å skrive svaret som en brøk, og det kan synes som om elevene vet at sannsynlighet kan uttrykkes som antall gunstige utfall dividert på antall mulige utfall.

Ut fra løsningsfrekvensen på denne oppgaven, skulle vi kanskje forvente en bedre løsningsfrekvens på oppgave 18 ovenfor. Vi kan derfor stille spørsmål om elevenes forståelse av sannsynlighet som et forhold ofte er situasjonsbestemt, dvs. bestemt ut fra kontekst og basert på en mer overfladisk forståelse av sannsynlighetsregning.
Elevenes oppfatning av sannsynlighet kan også være mekanisk eller kun ferdighets-basert: at sannsynlighet som ”gunstige delt på mulige” er en innlært ferdighet uten at det er grunnleggende forstått som et forhold.

Oppgave 26


Du har en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Kortene er tilfeldig blandet. Det er 13 kort av hver type - hjerter, spar, kløver og ruter.

Du trekker et kort med hjerter, og legger det ikke tilbake i kortstokken.

Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et kort med hjerter fra kortstokken nå?

Skriv svaret som en brøk.

Svar:

Oppgaveeksempel 13: Oppgave 26 SSK 8 – 10. Trekning av objekter. Kortstokk.

Situasjonen i oppgave 26 er annerledes enn i oppgave 21. I oppgave 26 trekker vi først et kort uten å legge det tilbake i kortstokken – uten tilbakelegging – deretter spør vi om sjansen for å trekke et (nytt) kort med hjerter fra kortstokken. Etter at vi allerede har trukket er kort med hjerter, er det 12 kort med hjerter og totalt 51 kort i kortstokken igjen før andre trekning. Sannsynligheten vi skal beregne har altså en betingelse knyttet til seg: Vi har allerede trukket et hjertekort som vi ikke legger tilbake.

Hadde vi derimot lagt tilbake kortet med hjerter – med tilbakelegging – hadde vi fått samme situasjon som i oppgave 21. Vi får altså:

$$P(\text{Trekke et kløverkort}|\text{Trukket et hjertekort}) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

Oppgave 26 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	12,5	7
12/51 eller 4/17 **(Riktig svar)**	6	24
12/52 (glemmer at kortstokken er blitt 1 mindre)	18,5	19
1/4	16,5	9,5
13/ 52	13	11,5
3/13	3,5	4
Andre svar	30	25

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 26 SSK 8 – 10. Kortstokk. Trekke hjerter. Uten tilbakelegging.

Tabell 17 ovenfor viser at elevene sliter med å få med seg at konteksten har en betingelse knyttet til seg: vi har allerede trukket et hjertekort *uten* at vi har lagt det tilbake i kortstokken som nå består av ett kort mindre. Samtidig skal vi finne sannsynligheten for å trekke kløverkort. Situasjonen blir tydeligvis ganske kompleks for mange.

Svaret 12/52 viser at flere elever glemmer at kortstokken er blitt redusert i antall kort, mens svaret 13/52 viser at noen elever ikke har fått med seg at vi *ikke* legger hjerte-kortet tilbake i kortstokken før vi trekker på nytt. Svaret 3/13 kan vi tolke som 12/52 der elevene har forkortet brøken. Svaret 1/4 kan vi tolke som 13/52 forkortet.

3.3 Terningkast

Den diagnostiske prøven i statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk inneholder totalt seks oppgaver som omhandler utfall og sannsynlighet knyttet til terningkast. Denne situasjonen – terningkast – bør ikke være ukjent for elevene.


Oppgave 3

Per kaster en terning én gang, og Ole kaster terningen to ganger.

Hva er mest sannsynlig?

- Per får én sekser
- Ole får to seksere
- Begge utfall er like sannsynlig

Oppgave 3 SSK 8 – 10. Terningkast

Dersom vi skal tallfeste Oles sjanse for å få to seksere etter hverandre, multipliserer vi sannsynligheten for å få sekser på det ene kastet sammen med sannsynligheten for å få sekser på det andre kastet (jfr. produktsetningen for uavhengige hendelser).

Oppgaven avdekker en vanlig misoppfatning hos mange elever: konjunksjonsfeilen.

Per: $P(\text{Sekser på ett kast}) = \frac{1}{6}$

Ole: $P(\text{Sekser på to kast}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Oppgave 3 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0,5	0,5
Per får en sekser **(Riktig svar)**	30,5	41
Ole får to seksere	14,5	8
Begge utfall er like sannsynlig	54,5	50

Tabell 18: Prosentvis fordeling. Oppgave 3 SSK 8 – 10. Terningkast. Seksere.

Tabell 18 ovenfor viser etter vår oppfatning et svært sentralt problem i elevenes sannsynlighetsregning: de har ofte ikke god nok oversikt over *utfallsrommet*. Dette er ofte et problem som går igjen og som læreren bør rette større oppmerksomhet på i undervisningen.

Oppgave 7

Du kaster to terninger samtidig.

Hva er mest sannsynlig?

- ○ Du får to femmere
- ○ Du får en femmer og en sekser
- ○ Begge utfallene ovenfor er like sannsynlige

Oppgaveeksempel 15: Oppgave 7 SSK 8 – 10. Terningkast

Avgjørende for å klare denne oppgaven, er at eleven har oversikt over utfallsrommet som består av 36 utfall. Dersom elevene har et klart bilde av utfallsrommet, er det en liten opptelling som skal til for å kunne sammenligne de to hendelsene: ”Du får to femmere” og ”Du får en femmer og en sekser”.

Hendelse	Antall utfall
”Du får to femmere”	1 det vil si (5, 5)
”Du får en femmer og en sekser”	2 det vil si (5, 6) eller (6,5)

Oppgave 7 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	1,5	0,25
Du får to femmere	6	4
Du får en femmer og en sekser **(Riktig svar)**	24	19
Begge utfallene er like sannsynlige	68,5	76,5

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 SSK 8 – 10. Terningkast. To terninger.

Igjen mener vi at tabell 19 ovenfor avslører at elevene ikke har et klart nok bilde av utfallsrommet for denne situasjonen – kast av to terninger. Det er til og med noen flere som gjør dette feil på 10. årstrinn.

Oppgave 12

Per, Kari og Kim spiller et spill. Spillet går ut på at hver deltaker velger et tall mellom 2 og 12. Så kastes to terninger. Antall øyne på de to terningene legges sammen. Den som har valgt riktig tall, vinner en premie.

Per velger tallet 2, Kari velger 7 og Kim velger 10.

Hvem har størst vinnersjanse?

- ○ Per, som velger 2
- ○ Kari, som velger 7
- ○ Kim, som velger 10
- ○ Alle tre har like stor sjanse til å vinne

Oppgaveeksempel 16: Oppgave 12 SSK 8 – 10. Terningkast

Utfallsrommet i oppgave 12 et det samme som i oppgave 7 og består av 36 mulige utfall. Igjen er det avgjørende å ha et klart bilde av hvor mange utfall vi kan forvente finnes i utfallsrommet dersom vi skal finne summen av de to terningene som blir kastet.

Det betyr at Kari har størst sjanse til å vinne fordi summen 7 har flest gunstige utfall når vi kaster to terninger, (3, 4), (4, 3), (5,2), (2, 5), (1, 6), (6, 1).

Per derimot har valgt tallet 2, og dette har bare ett gunstig utfall: (1, 1).

Kim har større sjanse enn Per, fordi summen 10 har flere gunstige utfall i forhold til summen 2, (4, 6), (6, 4) eller (5, 5), til sammen tre gunstige utfall. Men dette er færre gunstige utfall enn Kari. Derfor har Kari størst sjanse.

$$P(\text{Per vinner med sum } 2) = \frac{1}{36} \qquad P(\text{Kim vinner med sum } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{Kari vinner med sum } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Oppgave 12 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2,5	2
Per, som velger 2	5	3
Kari, som velger 7 **(Riktig svar)**	40,5	46
Kim, som velger 10	17	13
Alle tre har like stor sjanse til å vinne	35	36

Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 12 SSK 8 – 10. Terningkast.

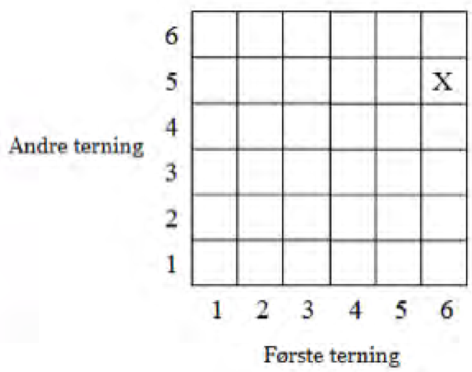
Oppgavene 13, 14 og 15 ble gitt som én oppgave under utprøvingen.

Oppgave 13

Diagrammet viser alle mulige utfall når vi kaster to terninger.

Hvilket utfall er representert ved X?

Svar: Første terning viser ☐ og andre terning viser ☐

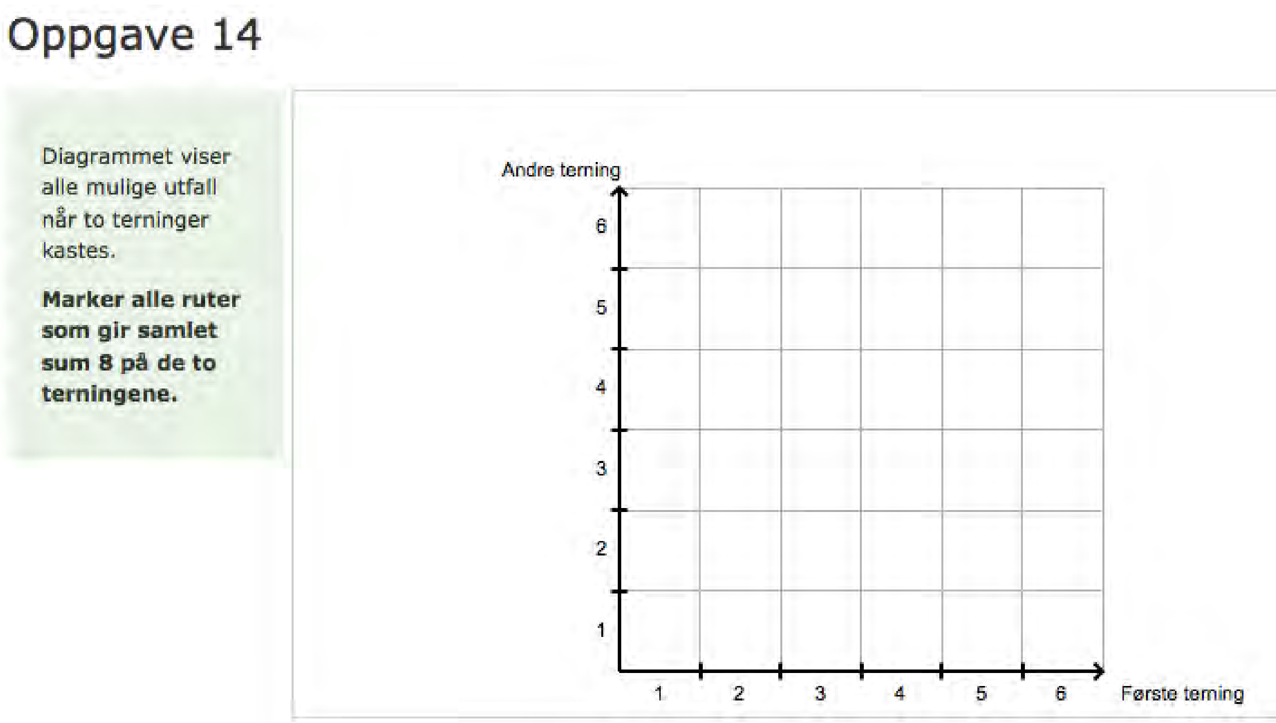


Oppgaveeksempel 17: Oppgave 13 SSK 8 – 10. Terningkast. Utfall.

Her skal elevene lese av diagrammet. Bra mestring.

Oppgave 13 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	6	5
Første terning 6 og andre terning 5 **(Riktig svar)**	76	84
Første terning lik 5 og andre terning lik 6	12	8
Andre svar	6	3

Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 13 SSK 8 – 10. Terningkast. Utfall.



Oppgaveeksempel 18: Oppgave 14 SSK 8 – 10. Terningkast. Utfall.

Flere elever har problemer med denne oppgaven. En vanlig misoppfatning er at det er kun utfallet (4, 4) som har summen 8. Det finnes mange forskjellige svar og forslag her og mange avdekker at de ikke har forstått oppgaven. Det er svært vanskelig å lage flere kategorier for feilsvar da disse er så sprikende.

Oppgave 14 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	24	15,5
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) og (6, 2) **(Riktig svar)**	49	68,5
Bare (4, 4)	6	3
Andre svar	21	13

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave 14 SSK 8 – 10. Terningkast. Utfall.


Oppgave 15

To terninger kastes.

Finn sannsynligheten for at de to terningene viser samme antall øyne.

Skriv svaret som en brøk.

Svar:

Oppgaveeksempel 19: Oppgave 15 SSK 8 – 10. Terningkast.

Igjen er det utfallsrommet på til sammen 36 utfall når to terninger kastes som er i fokus. De elevene som sliter med å forstå oppgave 13, 14 og 15, sliter også med denne oppgaven. De gunstige utfallene for at de to terningene skal vise samme antall øyne, er seks i tallet: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) og (6, 6).

$$P(\text{De to terningene viser samme antall øyne}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Oppgave 15 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	26	19
1/6 eller 6/36 **(Riktig svar)**	21	25
2/12 (gjelder både de som forstår og ikke forstår)	4	12,5
1/2 og lignende	4	7
5/6	7	2,5
1/12	6	3
Andre svar	32	31

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave 15 SSK 8 – 10. Terningkast. Sannsynlighet samme antall øyne

Igjen vil vi understreke at uten en klar oversikt over utfallsrommet, er det vanskelig for elevene å finne ut hvor mange gunstige utfall som finnes i forhold til mulige utfall.

3.4 Myntkast

Den læringsstøttende prøven har også to oppgaver som knytter kast med mynt til sannsynlighetsregning.

Oppgave 1

En lærer kaster kron og mynt med to kronestykker uten at du ser resultatet, men læreren sier at det ble minst én kron.

Hvor stor er sannsynligheten for at det ble kron på begge kronestykkene?

- ○ $\frac{1}{4}$
- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ $\frac{2}{3}$

Oppgaveeksempel 20: Oppgave 1 SSK 8 – 10. Myntkast

Dette har vært en vanskelig oppgave for elevene. Igjen: oppgaven blir vanskelig fordi vi ikke har full oversikt over utfallsrommet.

Antall mulig utfall når vi kaster kron og mynt med to kronestykker er fire totalt. Utfallet (Mynt, Mynt) er her uaktuelt siden læreren sier at det er minst en krone på utfallet av kastet.

Antall med kron i utfallet er tre, altså disse gunstige utfallene med kron:

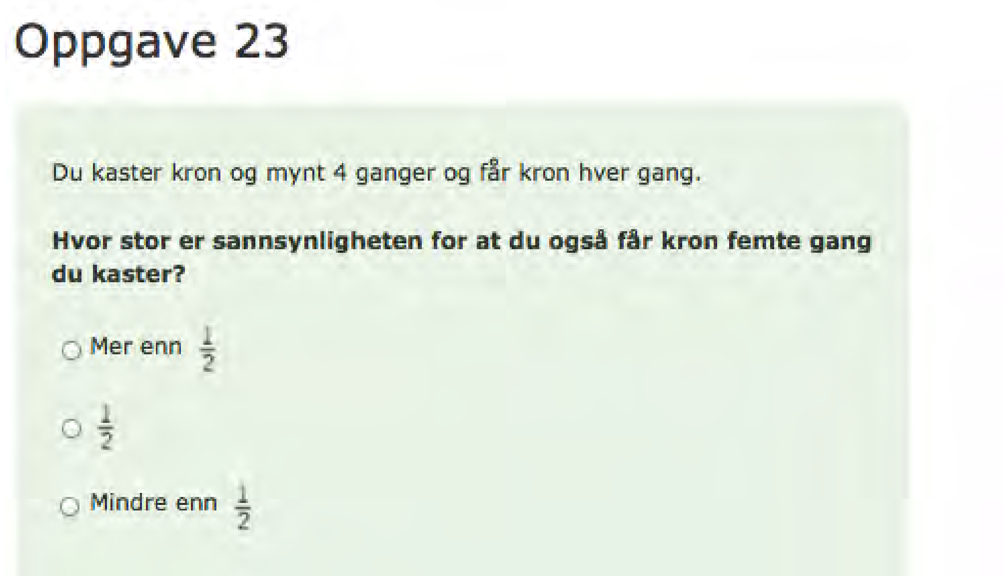
Oppgaven spør om sannsynligheten for at det ble kron på begge kronestykkene, dersom læreren sier at det ble minst én kron.

Kron på begge myntene er 1 av 3 utfall, derfor må sannsynligheten bli 1/3.

Oppgave 1 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	6	3
1/4	16	30,5
1/3 (**Riktig svar**)	9	8
1/2	63	55,5
2/3	5	3

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 1 SSK 8 – 10. Myntkast. Kron på begge myntene.

Oppgaven synes å være vanskelig for elevene etter den lave løsningsfrekvensen å dømme. Oppgaven inneholder en innskrenkning av utfallsrommet i og med at betingelsen ”minst en kron” er involvert. Etter dette er det bare tre mulige utfall, mens vi har bare ett gunstig. Ellers kan man merke seg en interessant forskjell i svarene på de to årstrinnene.


Oppgave 23

Du kaster kron og mynt 4 ganger og får kron hver gang.

Hvor stor er sannsynligheten for at du også får kron femte gang du kaster?

- Mer enn $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- Mindre enn $\frac{1}{2}$

Oppgaveeksempel 21: Oppgave 23 SSK 8 – 10. Myntkast

Selv om du kaster kron og mynt fire ganger, må hvert av de fire kastene anses som *uavhengige* av hverandre. Sannsynligheten i første kast påvirker altså ikke sannsynligheten i andre kast, og så videre.

Derfor er sannsynligheten for å få kron i hvert kast lik 1/2. Og nettopp derfor er sannsynligheten for å få kron i femte kast også lik 1/2.

Oppgave 23 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2,5	2
Mer enn 1/2	8,5	6,5
1/2 (**Riktig svar**)	78	78
Mindre enn 1/2	11	13,5

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 23 SSK 8 – 10. Myntkast. Kron på femte kast.

Bra løsningsfrekvens på denne oppgaven. Men noen elever mener at det at vi har fått 4 ”kron” på rad, vil påvirke sannsynligheten på det femte kastet.

Det er omtrent lik løsningsfrekvens for begge årstrinnene.

3.5 Hendelser og forventning

Kartleggingsprøven har tre oppgaver som knytter forventning, hendelser og sannsynlighet sammen.

Oppgave 4

"Du kommer til å bli minst 100 år gammel."

Hvor stor er sannsynligheten for at påstanden kommer til å bli oppfylt?

- ○ Helt sikkert
- ○ Svært sannsynlig
- ○ Lite sannsynlig
- ○ Umulig

Oppgaveeksempel 22: Oppgave 4 SSK 8 – 10. Hendelser og sannsynlighet.

Oppgaven prøver elevenes praktiske forståelse av usikkerhet omkring hendelser og sannsynligheten til disse.

Oppgave 4 Du blir minst 100 år gammel. Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0	0,25
Helt sikkert	6,5	2
Svært sannsynlig	7	6,5
Lite sannsynlig **(Riktig svar)**	81	84
Umulig	4,5	7

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 4 SSK 8 – 10. Hendelser. Du blir minst 100 år gammel

Av frekvenstabellene ovenfor kan det vært på sin plass å framheve at elevene på begge årstrinn har en nokså god forståelse av slike hverdagslige enkelthendelser

Oppgave 5

Du skal kaste en terning 90 ganger.

Hvor mange ganger kan du forvente å få:

a) Et partall **Svar:**

b) En femmer **Svar:**

c) En sekser **Svar:**

Oppgaveeksempel 23: Oppgave 5 SSK 8 – 10. Terningkast. Forventningsverdi. Partall.

Oppgave 5a Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	6	11
45 (Riktig svar)	39	45
10	2	0,75
20	2	1
30	9	10,5
40	5	2
50, 50 % eller lignende	9	9
Andre svar	28	20,5

Tabell 27: Prosentvis fordeling. Oppgave 5a SSK 8 – 10. Terningkast. Forventningsverdi. Partall.

Vi merker oss de mange og ulike feilsvarene i oppgave 5a, som også i oppgave 5b og 5c nedenfor.

De mange feilsvarene kan skyldes at elevene ikke har et godt nok bilde av utfallsrommet og ikke har jobbet godt nok med dette. En annen grunn kan være at elevene i for liten grad kan brøkregning og kan knytte denne til sannsynlighetsregning.

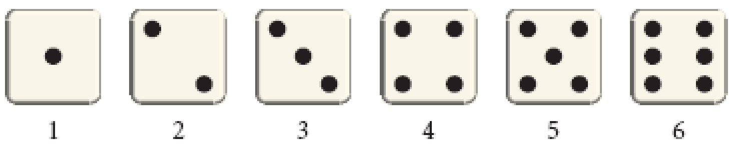
Oppgave 5b Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	7	12,5
15 (Riktig svar)	26	39,5
10	6	4
18	6	8
20	11	5,5
30	10	5,5
40	3	1
Andre svar	31	23

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 5b SSK 8 – 10. Terningkast. Forventningsverdi. Femmer.

Oppgave 5c Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	7	10,5
15 (Riktig svar)	32,5	45
10	9	5
18	1	3
20	8,5	6
25	2,5	1
30	9	5
40	1,5	0,5
Andre svar	29	24

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Oppgave 5c SSK 8 – 10. Terningkast. Forventningsverdi. Sekser.

Utfallene for et kast med én terning bør være klart:



Utfall som viser et partall av øyne er 3, dvs. halvparten av utfallene. Derfor må vi kunne forvente at halvparten av de 90 terningkastene, altså 45, gir et utfall som viser et partall av øyne.

Sannsynlighet for å få en femmer (fem øyne) er som kjent 1/6. Derfor må vi kunne forvente at 1/6 av de 90 utfallene også viser en femmer.

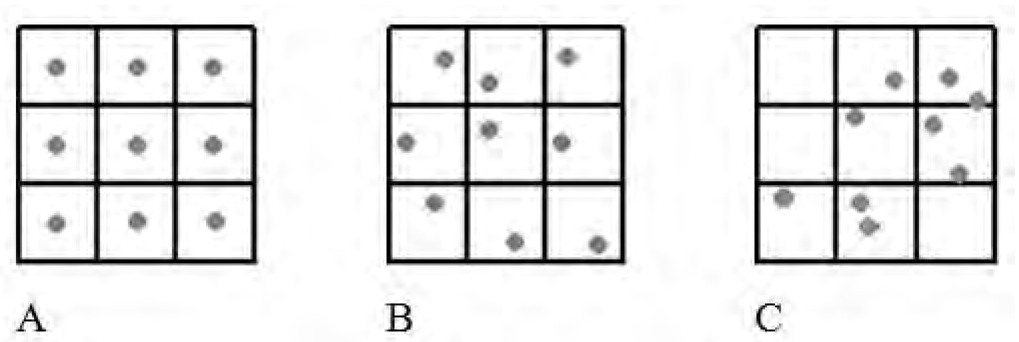
En elev skriver som svar: $\frac{1}{6} \cdot 90$, noe som er korrekt. Men eleven klarer altså ikke regne ut hva det etterspurte antallet av femmere blir. Igjen kan vi stille spørsmål om ikke brøkregningen svikter her i forbindelse med sannsynlighetsregningen.

Det samme resonnementet gjelder også for oppgave 5c (sekser).

Oppgave A Ikke med. Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10

En gutt har lekt med treklosser ute og satt sammen ni klosser til et kvadrat. Det begynner å regne. Du skal nå tenke på hvor de ni første regndråpene som treffer klossene kan havne. Til høyre er det tegnet tre mulige forslag.

Hvilken av de tre forslagene ser mest ut slik du vil forvente?



○ A ○ B ○ C

Oppgaveeksempel 24: Oppgave A SSK 8 – 10. Hendelser og sannsynlighet

Oppgave A Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	3,5	3
A	8,5	6
B	47,5	53,5
C	40,5	37,5

Tabell 30: Prosentvis fordeling. Oppgave A SSK 8 – 10. Terningkast. Forventningsverdi. Sekser.

I forslag A faller alle regndråpene midt i alle 9 klossene. Sannsynligheten for at dette skal skje, må vi anta er svært liten, vil mange elever kunne tenke. Det å få ni ”fulltreffere” på denne måten synes for elevene ”lite sannsynlig” og derfor vil de derfor ikke forvente dette.

I forslagene B og C virker det som om regndråpene faller mer tilfeldig på klossene. I B faller det regndråper på hver kloss, men tilsynelatende litt tilfeldig innenfor hver kloss. I C faller regndråpene også tilsynelatende mer tilfeldig selv om det er tre klosser som det ikke kom regndråper på.

Ut fra det vi realistisk kan forvente oss er sannsynlig, godkjennes både B og C som riktige svar. Men igjen kan vi innvende at med et lite antall regndråper er både A, B og C like sannsynlige hendelser. Først med større antall regndråper kan vi eventuelt kunne se et mønster. Dette bør læreren gjøre elevene oppmerksom på.

Innledningsvis refererte vi til Greens undersøkelse fra Storbritannia hvor mange elever hadde problemer med å oppfatte *tilfeldighet*. På bakgrunn av tabell 33 nedenfor kan vi ikke si det samme om norske elever i alderen 13 – 15 år per 2010.

3.6 Sannsynlighet og areal

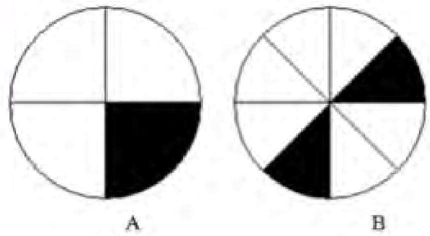
Det er to oppgaver som knytter sannsynlighet til areal, oppgave 11 og 20, gjennom en typisk kontekst, nemlig lykkehjulet.

Oppgave 11

Både lykkehjul A og B gir gevinst når viseren stopper på svart felt.

Hvilken påstand er riktig?

- ○ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A
- ○ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B
- ○ Du har like stor vinnersjanse med lykkehjul A som med lykkehjul B



Oppgaveeksempel 25: Oppgave 11 SSK 8 – 10. Sannsynlighet og areal. Lykkehjul.

$$\text{P(Vinne på lykkehjul A)} = \frac{1}{4} \quad \text{P(Vinne på lykkehjul B)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Oppgave 11 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0,5	1
Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A	21	17
Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B	10	5
Du har like stor vinnersjanse med begge lykkehjulene (**Riktig svar**)	68,5	77

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 SSK 8 – 10. Sannsynlighet og areal. Lykkehjul.

I forbindelse med slike lykkehjul er det er nokså vanlig misoppfatning hos elever at jo mer sammenhengende en "gunstig" sektor er, jo mer sannsynlig er det å vinne på et slikt lykkehjul. Disse elevene finner vi igjen blant de som velger lykkehjul A i denne oppgaven.

En annen misoppfatning er at jo flere gunstige sektorer, jo mer øker vinnersjansene. Elevene som har denne misoppfatningen tenderer til å velge lykkehjul B i oppgave 11.

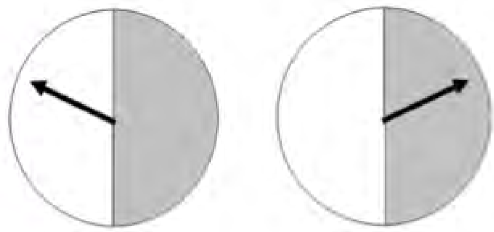
Men det store flertallet av våre elever knytter den samlede størrelsen på sektorene til den gunstige fargen til sannsynlighet for å få denne fargen og dermed vinnersjanse hvis denne fargen gir gevinst.

Oppgave 20

Et lykkehjul på tivoli er slik at det blir gevinst hvis begge pilene stopper på grått felt. Arne mener at han har 50 % sjanse til å vinne.

Er du enig med Arne?

- ○ Ja, Arne har rett
- ○ Nei, Arne tar feil
- ○ Spørsmålet kan ikke avgjøres



Oppgaveeksempel 26: Oppgave 20 SSK 8 – 10. Sannsynlighet og areal. Lykkehjul.

Dette er en typisk oppgave som framprovoserer den såkalte og før nevnte konjunksjonsfeilen.

Vi må anta at Arne har 50 % sjanse for *hvert* av lykkehjulene. Vi må videre anta at lykkehjulene snurrer rundt uavhengig av hverandre. Dermed blir sannsynligheten for å vinne (hvis begge pilene stopper på grått felt) det samme som $0{,}50 \cdot 0{,}50 = 0{,}25$, dvs. 25 %. Dette betyr at Arne tar feil.

Oppgave 20 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	2	1
Ja, Arne her rett	74	61
Nei, Arne tar feil **(Riktig svar)**	20	34
Spørsmålet kan ikke avgjøres	4	4

Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave 20 SSK 8 – 10. Sannsynlighet og areal. Lykkehjul.

Sannsynligheten for at to ulike hendelser inntreffer samtidig er mindre enn sannsynligheten for at en av dem inntreffer. Dette er loven om konjunksjon. Forskningen viser at det å anslå sannsynlig av kombinerte hendelser er gjennomgående vesentlig vanskeligere enn av enkelthendelser. Det viser svarfrekvensene i tabell 35 ovenfor også. Bare en tredjedel av elevene på 10. årstrinn velger riktig alternativ på oppgaven.

Det som kan synes vanskelig for mange elever er hvorfor skal vi multiplisere sammen sannsynlighetene for de uavhengige hendelsene? Dette er det som kalles produktsetningen for to uavhengige hendelser.

Eksemplet med terningkast med to terninger samtidig sammenlignet med terningkast med én terning hvor vi kaster terningen to ganger etter hverandre, kan illustrere for en del elever hvorfor det må være korrekt.

$$\text{P(To seksere)}_{\text{To terninger samtidig}} = \frac{1}{36} \quad \text{(Ett gunstig utfall: (6, 6)).}$$

$$\text{P(To seksere)}_{\text{Én terning to ganger etter hverandre}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Men det er likevel ikke nødvendig å multiplisere for å avgjøre om Arne her tar feil. Vi kan sette opp utfallrommet for disse lykkehjulene og ut fra dette få en ide om Arne tar feil eller ikke.

Lykkehjul 1	Lykkehjul 2
Hvitt felt	Hvit felt
Hvit felt	Grått felt
Grått felt	Hvit felt
Grått felt	Grått felt

Vi har altså til sammen fire utfall. Ett av utfallene (grått felt på begge lykkehjulene) gir gevinst. Derfor er sannsynligheten til å vinne lik 1/4, og Arne tar dermed feil.

Kapittel 4 Kombinatorikk

Kombinatorikk i grunnskolen er preget av opptellinger uten preg av formler og begreper som ”fakultet”, ”kombinasjon” og ”permutasjon”. Likevel bør elevene kjenne til ”multiplikasjonsprinsippet” der antall valgmuligheter for ulike objekter multipliseres sammen for å få det totale antallet som vi kan kombinere objektene på.

Elevene bør bli presentert for ”enkle” (se læreplanmål i kapittel 3.1 nedenfor) kombinatoriske problem på en slik måte at de kan se hvordan systematisering og opptelling kan gi svarene de søker.

Kombinatorikk handler om, som navnet tilsier, ulike måter å kombinere for eksempel ulike objekter på. Kombinatorikk er på mange måter et meget praktisk emne og logisk for mange elever, men samtidig er det likevel mange som finner dette temaet både utfordrende og vanskelig fordi det finnes flere fallgruver å gå i. Derfor bør elevene få jobbe mest mulig praktisk med dette temaet og så konkret som mulig. I del 2 skal vi forsøke å vise noen slike konkrete elevaktiviteter.

4.1 Læreplanen LK06

Læreplanen for matematikk etter 10. årstrinn for kombinatorikk sier at målet for opplæringen er at eleven skal kunne

- *vise med døme og finne dei moglege løysingane på enkle kombinatoriske problem*

Det viser seg at mange elever har problemer med kombinatorikk. Utfordringen kan være, som også med sannsynlighetsregning, å få et klart bilde og forestilling av situasjonen. Hvilken metode skal vi bruke? Kombinatorikk er knyttet til opptelling og som navnet tilsier: hvordan kan vi kombinere, ”snu om på objekter”, for eksempel rekkefølger m.v.

I kartleggingsprøven er det kun to oppgaver som prøver kombinatorikk direkte. Oppgave 9 nedenfor har falt vanskeligst for elevene. På den andre oppgaven har elevene, på begge årstrinn, omtrent dobbelt så stor løsningsfrekvens.

4.2 Opptelling

Oppgave 9

Fire jenter starter en tennisturnering. Alle skal spille mot alle.

Hvor mange kamper blir det?

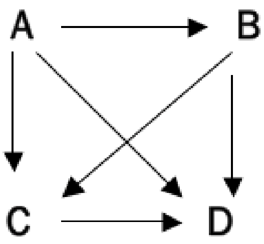
Svar:

Oppgaveeksempel 27: Oppgave 9 SSK 8 – 10. Kombinatorikk

Fire jenter (A, B, C og D) skal lage en turnering hvor alle skal spille mot hverandre. Vi må anta at de bare skal spille en gang mot hverandre.

Antallet må da bli: AB, AC, AD, BC, BD og CD (altså 6 kamper må spilles i turneringen)

Vi kunne også presentere tankegangen slik:



Deretter teller vi opp antall piler som indikerer kamper.

Oppgave 9 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	1,5	1,5
6 **(Riktig svar)**	35,5	40
4	13,5	5
8	7,5	3,5
12	12	15,5
16	13	19,5
Andre svar	17	15

Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 SSK 8 – 10. Tennisturnering.

Elever som velger å svare 4, blander trolig sammen med antall deltakere i turneringen. Dette er det en del elever som gjør på 8. årstrinn.

Elever som svarer 8 kan tenke at de 4 jentene skal spille mot hverandre, altså blir det 4 + 4 kamper.

Elever som svarer 12 kan i utgangspunktet tenke riktig – at alle de fire jentene skal møte de tre andre, men at vi da får det dobbelte antallet. For eksempel at Kari skal møte Maja, er det samme som om Maja møter Kari.

På 10. årstrinn er det mange som svarer 16 (ca 20 % av elevene). Disse kan tenke at det er 4 jenter og dermed $4 \cdot 4$ kamper.

4.3 Multiplikasjonsprinsippet


Oppgave 22

Vilde skal på håndballtrening. Hun skal kle på seg en trøye og en shorts og kan velge mellom 5 trøyer og 3 shorts.

Hvor mange kombinasjoner finnes?

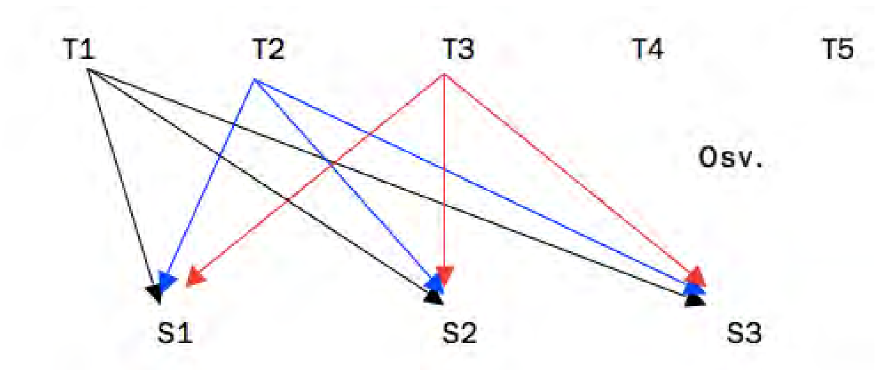
Svar:

Oppgaveeksempel 28: Oppgave 22 SSK 8 – 10. Kombinatorikk

Det er snakk om i denne oppgaven hvor mange måter kan Vilde kle på seg en trøye og en shorts, når hun har 5 trøyer og 3 shorts å velge blant.

Multiplikasjonsprinsippet sier oss at vi kan multiplisere sammen antall valgmuligheter for trøyer med antall valgmuligheter for shorts, dvs. $5 \cdot 3 = 15$ måter

Dette kan også illustreres slik:



Altså: For hver 1. trøye Vilde kler på seg, kan hun velge 3 shortser. Det gjelder naturligvis også for 2. trøye, 3. trøye, 4. trøye og 5. trøye. Derfor finnes det $5 \cdot 3 = 15$ kombinasjonsmuligheter totalt for hvordan Vilde kan kle på seg, T1-S1 er en mulig måte, T2-S1 en annen osv.

Oppgave 22 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	4	5
15 **(Riktig svar)**	58	73,5
1 (en av hver, en shorts og en trøye – en måte)	2	0,5
3	8,5	3
5	3	3
8 (5 trøyer + 3 shorts)	9,5	6
9	1,5	0,5
Andre svar	13,5	8,5

Tabell 34: Prosentvis fordeling. Oppgave 22 SSK 8 – 10. Vilde. Antall måter å kle seg på.

Vi ser at en del elever bruker addisjon til å finne ut hvor mange måter Vilde kan kle seg på (8 = 5 + 3). Dette er en viktig misoppfatning og det er typisk at den er den mest utbredte.

Feilsvaret 3 kan også skyldes at elevene ikke ser på dette som et kombinatorisk problem, men tenker for eksempel at ”Vilde har tre ulike shortser, og så tar hun én trøye til hver shorts, altså 3 antrekk.” Dette blir løsningen dersom hun legger alle klærne fram på sengen, og så får hun to trøyer til overs.

Del 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen presenterer vi en samling undervisningsaktiviteter som tar opp noen utfordringer i forbindelse med det å utvikle en god forståelse av særlig sannsynlighet.

Utbredte problemer og misoppfatninger har stått sentralt i diskusjonen av oppgavene i den første delen av denne veiledningen.

Matematikksenteret har flere lenker til leverandører av konkretiseringsmateriell innefor dette emnet.

Eksempler på konkretiseringsmateriell til bruk i sannsynlighet

Kapittel 5 Undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter/oppgaver som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste *misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av begrepene innenfor statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk*. Disse vanskene har stått sentralt i første del av denne veiledningen.

Elevene møter undervisningen i for eksempel sannsynlighet med rekke subjektive forestillinger og egne erfaringer som gjør at elevene kan dermed møte til undervisningen med visse misoppfatninger om statistikk, sannsynlighetsbegrepet og kombinatorikkbegrepet. Undervisningsaktivitetene vil i første rekke være rettet mot disse misoppfatningene.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi først ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner. Deretter tar vi for oss en del aktiviteter som er rettet mot problemene og misoppfatningene som er drøftet i første del.

5.1 Organisering med sikte på diskusjoner

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening for dem, må de ha anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

> *Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.*

Dette innebærer at de i de matematikktimene som omhandler begrepsdanning, må legge opp til en variert og bevisst bruk av språk, slik det er framhevet i innledningen til del 2. Lærerens oppgaver er å skape en atmosfære i klassen som bidrar til åpne og reflekterende diskusjoner, og å organisere dette på en måte slik at alle elevene deltar aktivt. En undervisning med en lærerdominert stil og med hovedvekt på individuelt arbeid vil holde både mengden og kvaliteten på diskusjoner på et lavt nivå; noen lærere assosierer elevdiskusjoner med et høyt støynivå og mangel på disiplin.

Ulike måter å organisere arbeidet på kan ha sine fordeler og ulemper. Det viktige er at læreren er bevisst på og utnytter dette til å legge forholdene til rette slik at alle elevene kan få varierte erfaringer når det gjelder å reflektere rundt matematiske begreper. Læreren bør utnytte den dynamikken som ligger i å veksle mellom ulike måter å organisere arbeidet på, slik dette er beskrevet nedenfor.

Individuelt arbeid
Individuelt arbeid skal gi elevene mulighet til å tenke over og utvikle sine egne ideer knyttet til en matematisk problemstilling eller oppgave. Læreren bør la elevene få nok tid til å tenke igjennom en gitt situasjon eller problemstilling individuelt før de blir bedt om å prøve ut tankene sine i par eller i gruppe. Hvis arbeidet starter direkte i grupper, kan det lett bli slik at de flinkeste eller de mest verbale elevene "kjører over" den eller dem som de skal samarbeide med. Ofte kan det være nyttig at elevene setter ned noe skriftlig som en del av dette individuelle arbeidet, som de kan ta med seg til partneren eller gruppen sin.

Arbeid i par
Det å la elevene diskutere to og to legger forholdene til rette for at alle skal kunne være aktive i diskusjoner i matematikk uten at det oppleves som truende. Dette er spesielt viktig fordi man vet at mange elever har liten erfaring med å diskutere matematikk og lett føler seg usikre. Å arbeide i par er også en organiseringsform som kan brukes uten store forberedelser fra lærerens side.

Arbeid i grupper
Gruppediskusjoner er viktige for at elevene skal lære å uttrykke og klargjøre sine matematiske ideer ved å prøve dem ut på flere andre. I en gruppe vil det vanligvis bli større variasjon i innfallsvinkler enn i parvise diskusjoner, og elevene lærer å snakke matematikk mens flere hører på. Diskusjoner i en gruppe vil også oftere få en mer argumenterende stil enn diskusjoner mellom to elever. Før en eventuell klassediskusjon kan vi vurdere å la to grupper sammenligne og diskutere sine konklusjoner.

Klassediskusjoner
Ved å la hvert par eller hver gruppe presentere sine forslag for klassen kan elevene få innblikk i ulike måter å angripe et problem på. Det å oppleve en slik variasjon i innfallsvinkler kan bidra til at elevene utvikler mer solide begreper og blir mer fleksible i sin måte å analysere et problem på. At et er deres egne forslag som blir tatt opp og diskutert, virker også motiverende.

Nedenfor har vi foreslått for det første oppgaver som kan danne utgangspunkt for både aktiviteter i klassen og til diskusjon. Vi har også foreslått en del forsøk og simuleringer som elevene kan gjøre for å få en bedre forståelse av for eksempel sannsynlighetsbegrepet. Vi har først og fremst lagt vekten på emnet sannsynlighet.

Når det gjelder statistikk får elevene gjerne et nærmere forhold til statistikken dersom elevene selv får, som læreplanen også sier, *"gjennomføre undersøkingar og bruke databasar til å søkje etter og analysere statistiske data og vise kjeldekritikk".* Samtidig kan elevene forsøke å ordne (og gruppere) det statistiske materialet de har samlet inn og ut fra dette diskutere hva som er hensiktsmessige måter å presentere dette materialet på. Elevene bør også diskutere og drøfte median i forhold til gjennomsnitt og hvilke av disse størrelsene som forteller mest om datamaterialet. Elevene bør få trening i å presentere det statistiske materialet både med og uten digitale verktøy.

Når det gjelder emnet kombinatorikk, bør elevene få jobbe så konkret som mulig. Vi skal nedenfor forslå noen praktiske aktiviteter som gjør at elevene kan få en dypere forståelse av opptelling og det å kombinere objekter og sette sammen objekter på ulike måter.

5.2 Oppgaver som utgangspunkt for diskusjon

Nedenfor foreslår vi noen oppgaver og simuleringer som kan være utgangspunkt for en klasseromsdiskusjon i emnet statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk, med hovedvekt på sannsynlighetsbegrepet. Oppgavene forsøker å utfordre elevene omkring deres begrepsforståelse i for eksempel sannsynlighet. Oppgavene kan konkret vises i klasserommet også for å gjøre situasjonen mer konkret for elevene.

5.2.1 Oppgaver i statistikk

Oppgave 1

Lag grupper på ca 5 elever i klassen.

Elevene måler hverandres høyde.

Hvor stor blir gjennomsnittshøyden i gruppen?

En gruppe oppløses og en elev kommer fra denne og til vår gruppe.

Hvor stor blir den nye gjennomsnittshøyden i gruppen nå?

Hvorfor?

Oppgave 2

Lag to grupper med 4 jenter i den ene og 5 gutter i den andre.

Elevene måler hverandres høyde.

Hvor stor blir gjennomsnittshøyden i gruppen for jenter og i gruppen for gutter?

Hvor stor blir gjennomsnittshøyden for alle 9 elevene dersom vi slår sammen de to gruppene?

Hvorfor?

Oppgave 3

I en gruppe på 4 elever er gjennomsnittet kjent, $\bar{x}$ = ____________ cm

Elevene har målt hverandres høyde.

Elev nr 1 er ______________ cm høy.

Elev nr 2 er ______________ cm høy.

Elev nr 3 er ______________ cm høy.

Hvor høy må da elev nr 4 være?

Hvorfor?

Oppgave 4

Lag en gruppe på 5 elever.

Elevene måler hverandres høyde og skriver opp høydene i tilfeldig rekkefølge.

Hvor stor blir medianhøyden?

En ny elev kommer til gruppen. Eleven blir målt som de andre.

Hvor stor blir medianhøyden nå?

Hvorfor?

Oppgave 5

Lag en gruppe på 5 elever.

Elevene måler hverandres høyde og skriver opp høydene i tilfeldig rekkefølge.

En ganske høy elev i forhold til de andre kommer til gruppen. Denne eleven blir også målt.

Hva gir et best bilde av høydene på elevene i gruppen?

Gjennomsnittshøyden?

Medianhøyden?

Hvorfor?

5.2.2 Oppgaver i sannsynlighet til diskusjon

Oppgave 1

I klassen er det 13 gutter og 16 jenter. Klassen har fått to gratisbilletter til en konsert. Klassen vil trekke lodd om billettene. Hver elev får sitt navn skrevet på en lapp. Lappene legges oppi en boks, og læreren trekker ut to lapper uten å se.

- O Det er størst sjanse for at den første som trekkes ut er en gutt.
- O Det er størst sjanse for at den første som trekkes ut er en jente.
- O Det er størst sjanse for at det blir gutt og jente som trekkes ut, enn for at det blir to jenter.

Hvorfor?

Oppgave 2

Eva og Torbjørn spiller med tre like mynter, merket med tallene 2, 3 og 4. De putter myntene i en pose og trekker ut to av dem uten å se. Eva vinner hvis summen av de to tallene er et oddetall. Torbjørn vinner hvis den er et partall.

a. Er dette spillet rettferdig?

O Ja   O Nei   O Vet ikke

Hvorfor? Hvorfor ikke?

b. De vil spille i alt 15 ganger. Hvor mange ganger tror du Eva vil vinne?

Svar: ________________

Hvorfor?

Oppgave 3

Denne boksen inneholder blå og hvite kuler.

Vi blander og trekker ut en kule uten å se.

Hvilken farge er det størst sjanse for at vi får?

O En blå kule   O En hvit kule   O Like stor sjanse

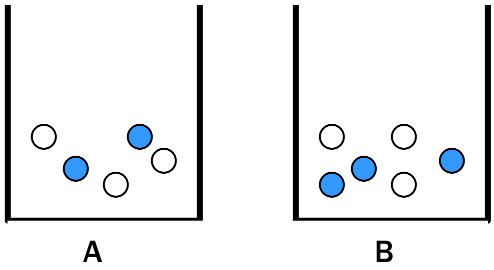
Forklar hvorfor.

Oppgave 4

På tivoli skal Petter trekke en kule fra en boks uten å se. Han får premie hvis han trekker en hvit kule. Petter skal hver gang velge hvilken boks han vil trekke fra.

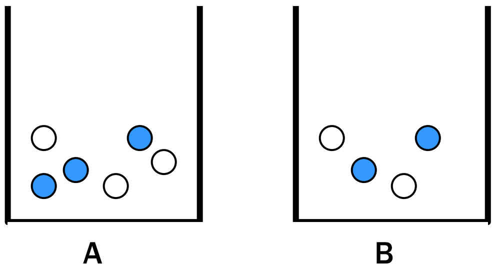
Hvit kule = gevinst

a. Hvilken boks (A eller B) er det lurest å trekke fra?



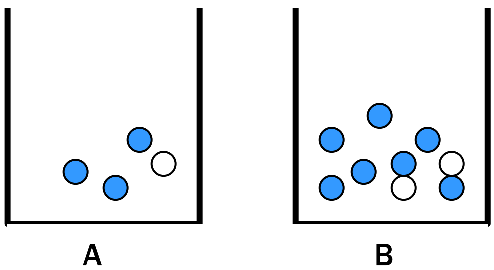
Hvorfor?

b. Hvilken boks (A eller B) er det lurest å trekke fra?



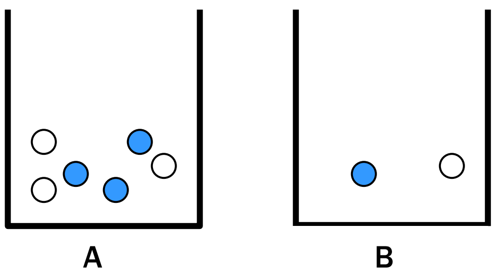
Hvorfor?

c. Hvilken boks (A eller B) er det lurest å trekke fra?



Hvorfor?

d. Hvilken boks (A eller B) er det lurest å trekke fra?

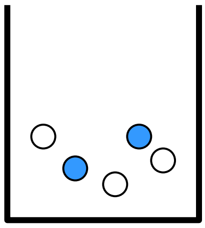


Hvorfor?

Oppgave 5

Petter spiller 10 omganger på denne boksen. Hver gang trekker han en kule. Kula legges så tilbake i boksen og blandes med de andre kulene.

Hver spilleomgang koster 5 kroner. Trekker vi en hvit, er premien 7 kroner.



a. Av de 10 trekningene, er det størst sjanse for at han vinner i

- O 3 spill
- O 5 spill
- O 6 spill
- O 8 spill

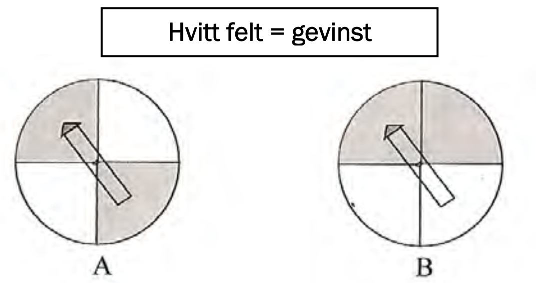
b. Hvor mye penger er det rimelig å tro at Petter vil vinne eller tape på 10 spill?

Hvorfor?

Oppgave 6

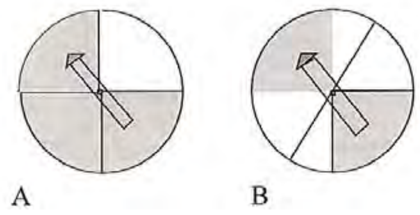
Hvilket hjul gir størst vinnersjanse?

Hvorfor?



Oppgave 7

Hvitt felt = gevinst



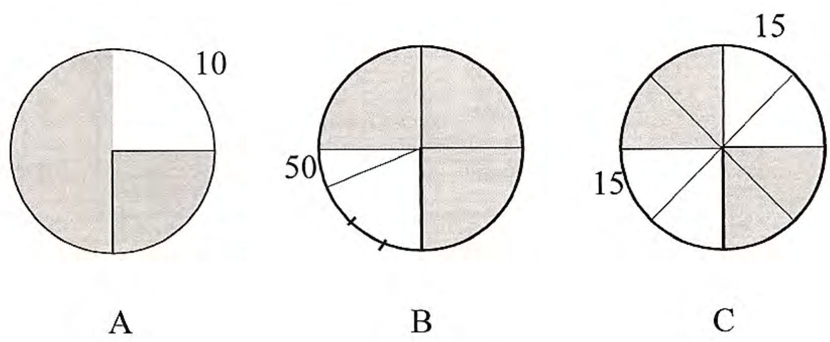
Hvilket hjul gir størst vinnersjanse?

Hvorfor?

Oppgave 8

Du kan spille 100 ganger på ett av disse hjulene.

Hvitt felt = gevinst Premiene er: 10, 50 og 15 kroner



Hvilket hjul vil du velge, A, B eller C, for å få størst premie?

Hvorfor?

Oppgave 9

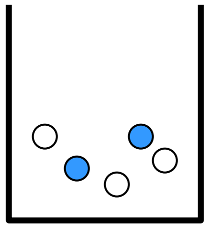
Vi trekker ut kuler fra en krukke. Vi noterer fargen, legger kula tilbake i krukka og blander kulene. Dette gjentar vi. Vi har trukket ut noen kuler, og skal til å trekke igjen.

Hvilken farge tror du det er størst sjanse for å få i hvert av disse tilfellene?

a. Vi har trukket: **Hvit – Blå – Hvit – Hvit …**

Nå er det størst sjanse for

- ○ Hvit
- ○ Blå
- ○ Like stor sjanse for begge

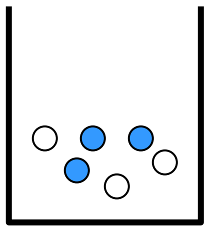


Hvorfor?

b. Vi har trukket: **Hvit – Hvit - Blå – Hvit – Blå …**

Nå er det størst sjanse for

- ○ Hvit
- ○ Blå
- ○ Like stor sjanse for begge

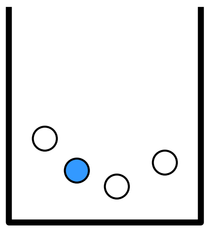


Hvorfor?

c. Vi har trukket: **Hvit – Hvit - Blå – Hvit – Blå …**

Nå er det størst sjanse for

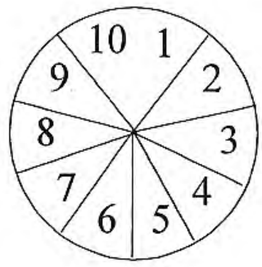
- ○ Hvit
- ○ Blå
- ○ Like stor sjanse for begge



Hvorfor?

Oppgave 10

Arne skal snurre pila på dette hjulet 50 ganger. Hvor er pila? Vanligvis er det hjulet som snurrer!



Hvor mange ganger tror du det blir partall?

Siv gjorde dette og fikk 23 partall og 27 oddetall.
Hun vil så snurre igjen 50 ganger.

Hvor mange ganger tror du det blir partall?

Oppgave 11

I en by er det to taxiselskap. Det ene har blå biler og det andre grønne biler. I alt er 15 % av taxiene i byen blå og 85 % er grønne.

En natt skjedde det et innbrudd i en foretning. Et vitne så en taxi som kjørte bort fra stedet like etterpå.

Dette vitnet forklarte i retten at hun hørte glass som singlet og så en taxi som kjørte vekk. Denne taxien mente hun var blå. Forsvareren til taxiselskapet hevdet at siden det var mørkt, kunne hun ha tatt feil farge. Hun ble så testet mange ganger for å skille en blå fra en grønn bil i mørkret. Hun valgte riktig farge i 80 % av tilfellene.

a. Det er

- ○ mer sannsynlig at hun virkelig så en blå taxi enn en grønn taxi
- ○ mer sannsynlig at hun virkelig så en grønn taxi enn en blå taxi
- ○ like sannsynlig at hun i virkeligheten så en blå som en grønn taxi

b. Det er

- ○ ca. 80 % sannsynlig
- ○ ca. 40 % sannsynlig
- ○ helt sikkert
- ○ mindre enn 15 % sannsynlig

at hun virkelig var vitne til en blå taxi som kjørte bort fra innbruddsstedet denne natten.

5.2.3Simulering av sjanse ved hjelp av regneark

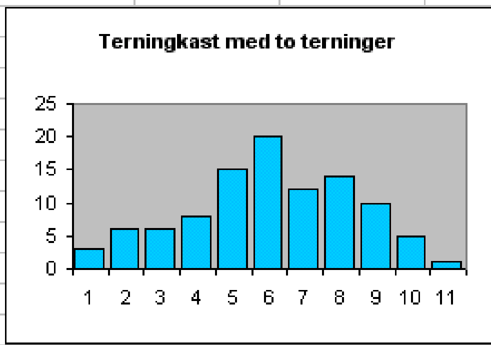
I læreplanen etter LK06 står det at elevene skal kunne finne sannsynlighet gjennom simuleringer. Det finnes mange muligheter for dette. Både forlag og Internett har mange muligheter her. Elevene kan også selv gjøre noen enkle simuleringer "for hånd" også, for å få en mer konkret følelse av hvilke resultater, basert på en relativ frekvens, de kan forvente seg i ulike forsøk.

5.2.3.1 Simulering i regneark - terningkast

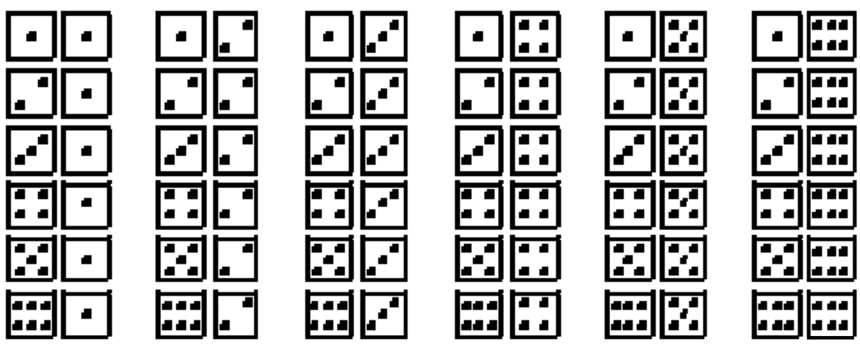
I Tangenten 4/2001 har Anne Berit Fuglestad blant annet vist hvordan vi kan bruke regneark til å simulere terningkast og myntkast. Nedenfor gjengir vi hennes simulering av terningkast med to terninger.

	A	B	C	D	E	F
1	**Terningkast med to terninger**					
2						
3	Terning1	Terning2	Sum		Frekvenstabell	
4	4	4	8		Utfall	Frekvens
5	1	3	4		2	3
6	5	5	10		3	6
7	4	3	7		4	6
8	2	3	5		5	8
9	4	4	8		6	15
10	4	6	10		7	20
11	3	4	7		8	12
12	3	5	8		9	14
13	1	5	6		10	10
14	2	1	3		11	5
15	4	2	6		12	1
16	3	6	9			
17	2	5	7			
18	3	3	6			
19						

Trykk på F9 for å se et nytt forsøk

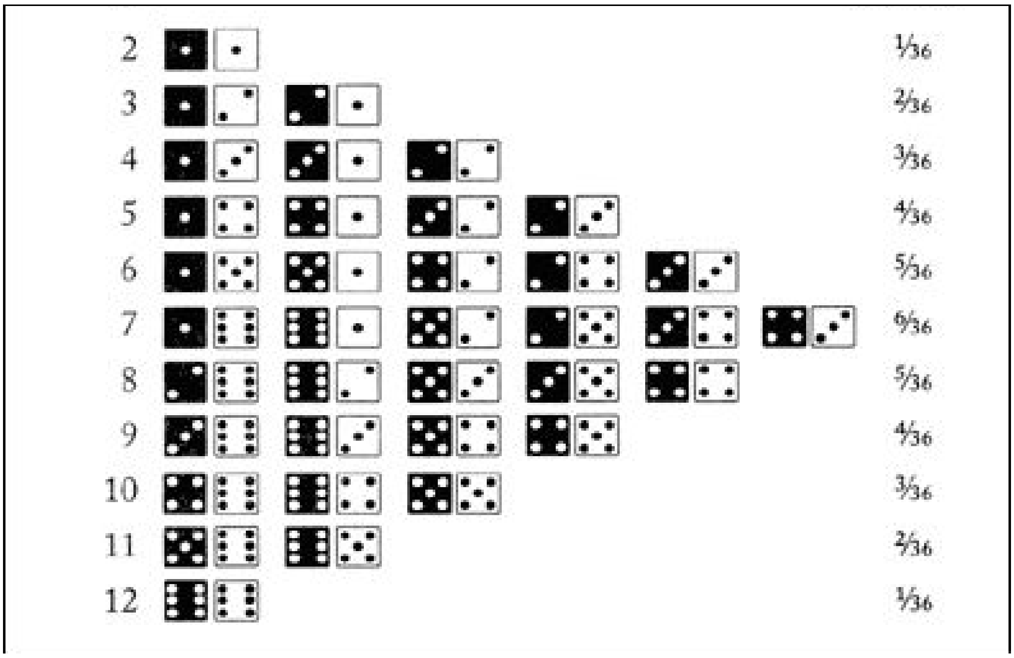


På denne måten kan elevene få et visuelt inntrykk over sannsynlighetsfordelingen og hvilke utfall som er mest eller minst sannsynlige utfall ved terningkast med to terninger. Alle de 36 mulige utfallene bør presenteres for elevene:

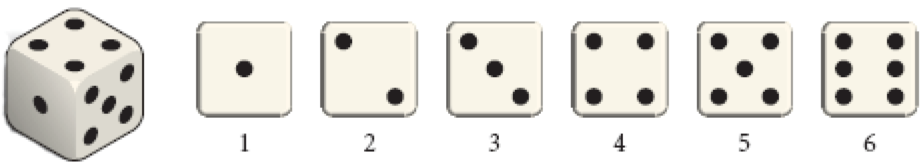


Deretter kan vi se på summen av øynene, finne hvor mange utfall som har like summer osv.

Deretter kan elevene jobbe seg fram til denne oversikten hvor de kan finne de ulike summene av terningenes summer, utfallene og deres sannsynligheter:

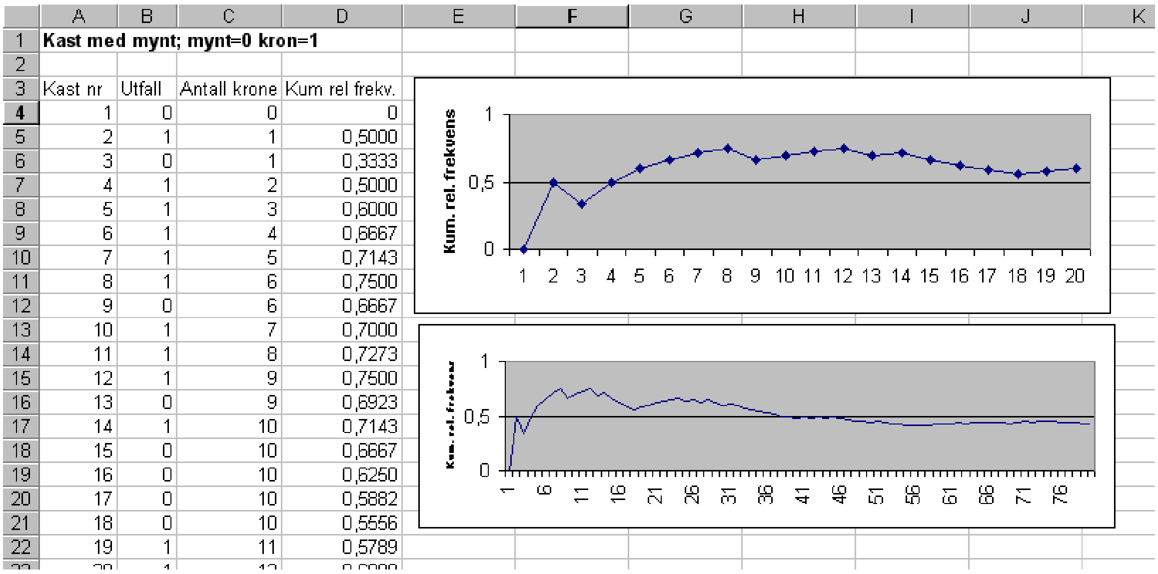


Selvsagt kan forsøket gjentas på samme måte med bare en terning. Her er både utfallsrommet og sannsynlighetsfordelingen langt enklere:



5.2.3.2 Simulere myntkast ved hjelp av regneark

På samme måte kan elevene simulere et forøk hvor de kaster en mynt og ser på hyppigheten av "kron" og "mynt". Dette forsøket kan elevene, gruppevis, gjøre med en enkelt mynt og notere ned sitt resultat og sammenligne med andre. Det skal ikke så mange myntkast til før den relative hyppigheten stabiliserer seg. Dette forsøket med myntkastet kan også være et utgangspunkt for en diskusjon med klassen hvor stor sannsynligheten for eksempel for "kron" vi kan regne med i neste kast og hvorfor.



Kast med mynt; mynt=0 kron=1

Kast nr	Utfall	Antall krone	Kum rel frekv.
1	0	0	0
2	1	1	0,5000
3	0	1	0,3333
4	1	2	0,5000
5	1	3	0,6000
6	1	4	0,6667
7	1	5	0,7143
8	1	6	0,7500
9	0	6	0,6667
10	1	7	0,7000
11	1	8	0,7273
12	1	9	0,7500
13	0	9	0,6923
14	1	10	0,7143
15	0	10	0,6667
16	0	10	0,6250
17	0	10	0,5882
18	0	10	0,5556
19	1	11	0,5789

5.2.4 Bruk av myntkast, spillkort, terninger, krukker og kuler, lykkehjul

I en rekke aktiviteter kan elevene bygge opp et bedre begrepsapparat i sannsynlighetsregning. Ikke minst er det å få et klart og oversiktlig bildet at det såkalte "utfallrommet" viktig. Når elevene har oversikt over dette, kan opptelling brukes til å bestemme sannsynlighet som en brøk (gunstige utfall dividert på mulige utfall).

5.2.4.1 Myntkast med én mynt

Når det gjelder et myntkast med bare en mynt, er det svært enkelt å få en oversikt over utfallrommet. Elevene kan sitte gruppevis og kaste og registrere antall de for eksempel får "kron" og finne den relative frekvensen for "kron" mange ganger, for eksempel 200 ganger. Deretter kan de sammenligne resultatet sitt med andre grupper, legge sammen og finne et gjennomsnitt av alle gruppenes målinger og få et enda bedre anslag for sannsynligheten for å få "kron" i et myntkast.

Etter forsøket med myntkastet, kan læreren vise hvordan brøken antall gunstige utfall (kron = 1 utfall) dividert på antall mulige utfall (utfallsrommet = 2 utfall) og svært nært den brøken som forsøket gir jo flere ganger vi kaster mynten.

Myntkast. De store talls lov:

Diskuter følgende: Vi kaster en mynt 8 ganger og ser hvor mange ganger vi får "kron" og hvor mange ganger vi får "mynt".

Det viser seg at vi får 2 mynt og 6 kron.

Blir da sannsynligheten for å få mynt $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$?

Og er sannsynligheten for å få kron $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$?

Kast mynten flere ganger, og mange ganger. Endrer sannsynligheten for kron og mynt seg? Hvordan? Hva tror du skjer dersom vi kaster mynten veldig mange ganger?

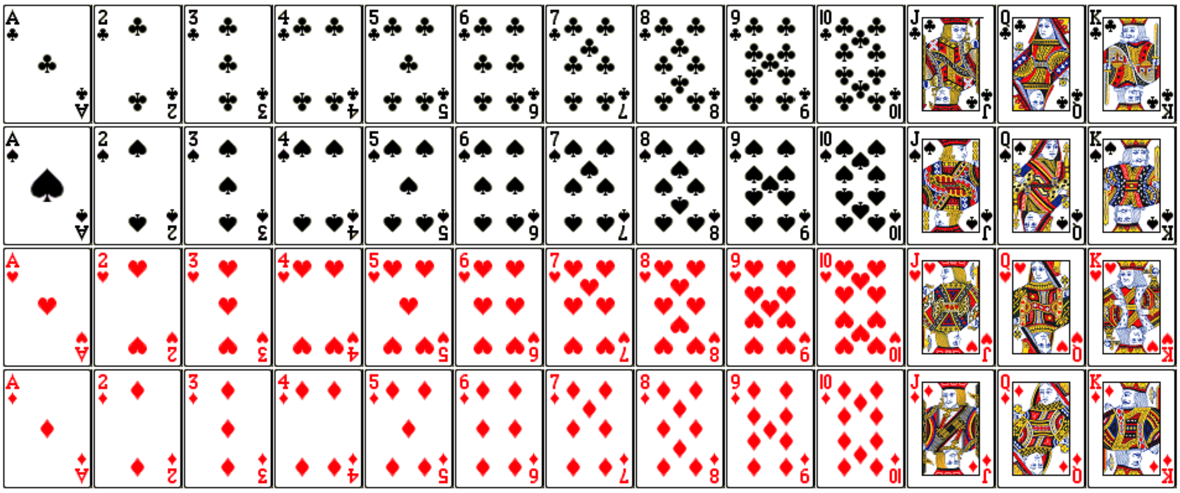
5.2.4.2 Myntkast med to mynter

Utfallsrommet for myntkast bestemmes av valgmulighetene for hver av de to myntene: altså $2 \cdot 2 = 4$ utfall. Elevene bør få se visuelt dette utfallsrommet, akkurat som for kast med bare en mynt.

Når det gjelder forsøk med myntkast med to mynter, kan vi benytte digitalt verktøy til dette.

5.2.4.3 Spillkort

For at elevene skal jobbe med sannsynlighet og trekning for eksempel fra en kortstokk, er det som alltid viktig å ha full oversikt over utfallsrommet for kortstokken, som inneholder altså fire sorter som hver har 13 kort, totalt 52 kort. Resten, som med terningkast med to terninger, er kort og godt opptelling av gunstige utfall i forhold til mulige utfall. Mange elever trenger å få visualisert dette utfallsrommet slik:



Vi kunne legge alle kortstokkens kort utover et bord slik som vist ovenfor.

Deretter kan læreren spørre og resonnere sammen med elevene hva som vil være sannsynlighetene for forskjellige hendelser, for eksempel for å trekke et rødt kort.

- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et rødt kort?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et kort som ikke er rødt?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et hjertekort?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et kort som har verdi større enn 8?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et honnørkort?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et kort med verdi 5?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et rutekort to ganger på rad når vi legger det første kortet tilbake i kortstokken før vi trekker på ny?
- Hvor stor er sannsynligheten for å trekke et rutekort to ganger på rad når vi *ikke* legger det første kortet tilbake i kortstokken før vi trekker på ny?

osv.

5.2.4.4 Andre typer "terninger"

Andre spillterninger

Når det gjelder simulering av kast med en enkel terning med seks sider, kan vi bruke digitalt verktøy til å simulere et slikt terningkast. Eventuelt kan elevene gjøre forsøket gruppevis, notere ned hvor mange ganger de får for eksempel en sekser, finne relativ frekvens og deretter sammenligne med andre grupper.

Etter forsøket med den tradisjonelle terningen, kan elevene får prøve å si noe om hva de kan forvente av utfall og sannsynligheter med andre typer og mer spesielle spillterninger. Nedenfor ser vi noen eksempler på slike "terninger".

5.2.4.5 Sannsynlighet for at frø spirer

Det er vanlig at produsenter av frøposter anslår spireevnen til frøene. Kanskje klassen i løpet av skoleåret kan gjøre et praktisk forsøk og se hvor mange frø i posen virkelig spirer og blir til en urt, en blomst eller lignende. Stemmer det at for eksempel 75 % av frøene spiret? Spirte noen av frøene i det hele tatt?

Deretter kan klassen diskutere hva det betyr at det er 75 % sjanse for at frøene spirer.

Diskusjonsoppgave om frø

På en pakke med blomsterfrø står det at frøenes spireevnen er 75 %.

Hva betyr dette?

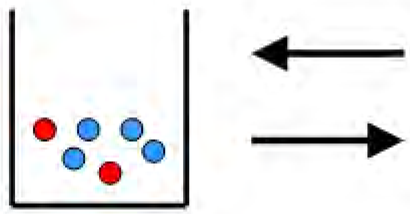
Betyr det at hvert frø har 75 % sjanse til å spire og bli en blomst, eller betyr det at frøene i gjennomsnitt vil spire i 75 % av tilfellene?

5.2.4.6 Trekning av kuler fra krukker. Med tilbakelegging. Trediagram.

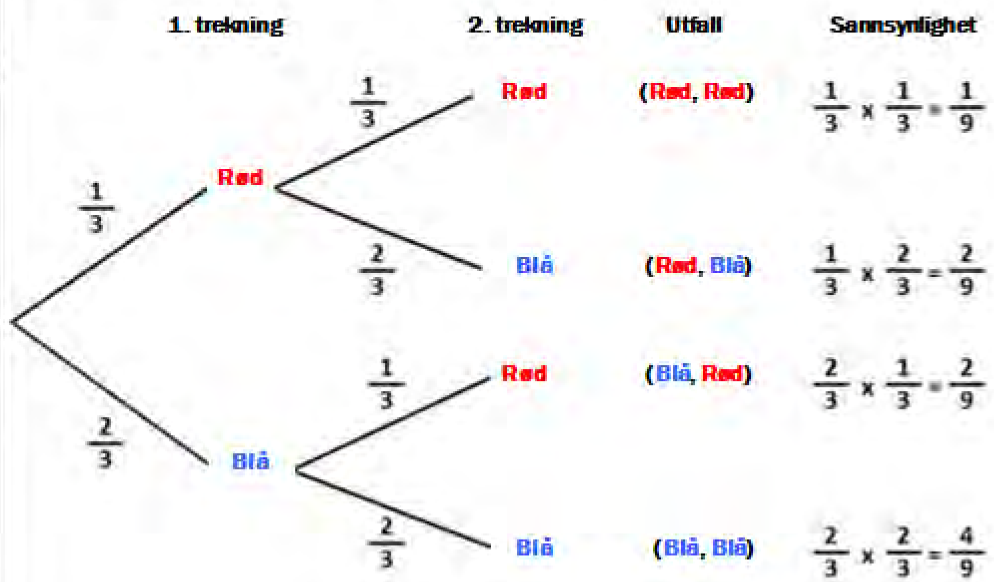
Gjennom et trediagram eller et valgtre kan elevene få trent seg i å systematisere og få et visuelt bilde av hvilke utfall vi kan forvente seg i trekninger av denne typen. Sannsynlighetene for hver trekning multipliseres sammen. Dersom vi legger tilbake en kule før neste trekning, sier vi at trekningen av en type kule ikke påvirker sannsynligheten til den andre typen av kule – disse hendelsene er da uavhengige av hverandre. Sannsynligheten for hendelsen ”rød kule” er den samme for hver trekning fordi ved tilbakeleggingen er det for hver gang like mange gunstige utfall. I videre-gående opplæring formaliseres i den såkalte ”produktsetningen for uavhengige hendelser”. Elevene bør også legge merke til at summen av sannsynlighetene til sammen er 1. Hvorfor?

Trekning av kuler fra krukker – med tilbakelegging. Trediagram

Det er 6 kuler i en krukke – 2 røde og 4 blå.



Her kan -vi vise for elevene et trediagram ved trekning av to kuler fra en krukke og vise de ulike sannsynlighetene:

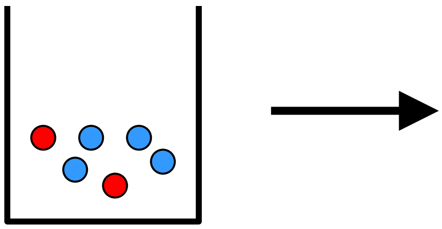


5.2.4.7 Trekning av kuler fra krukker. Uten tilbakelegging. Trediagram

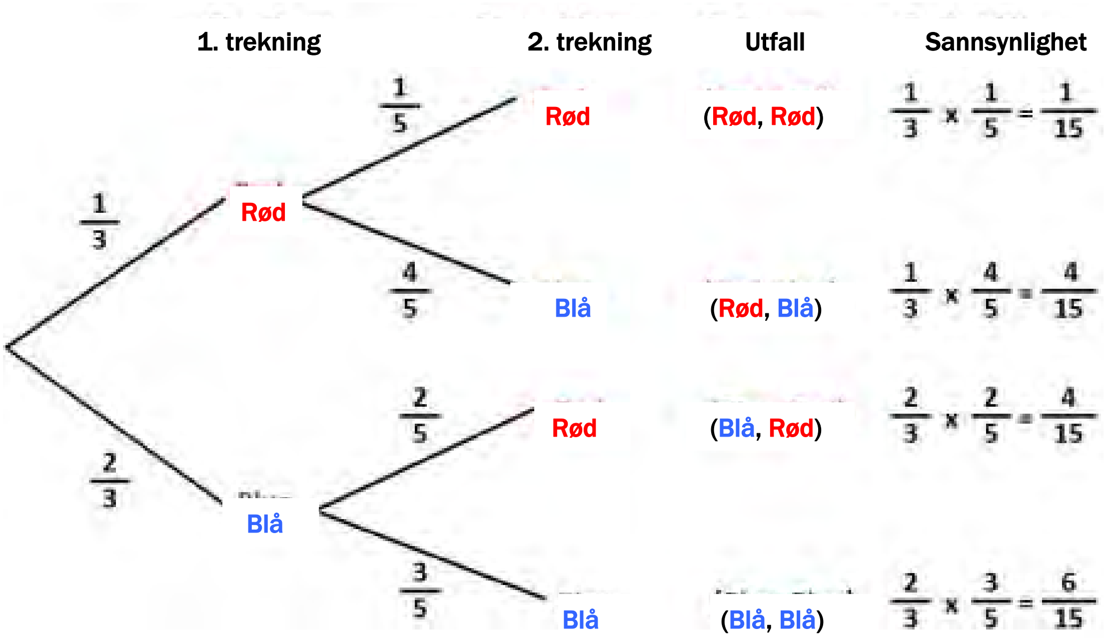
Situasjonen i dette eksemplet er den samme som i forrige eksempel, men med en viktig forskjell – vi legger ikke en kule tilbake i krukken før vi trekker på nytt. Dette gjør at sannsynligheten av første trekning vil påvirke sannsynligheten for den neste trekningen – hendelsene er avhengige av hverandre. Også her bør elevene få trening i å lage et trediagram. Legg også merke til at som før blir summen av sannsynlighetene lik 1.

Trekning av kuler fra krukker – *uten tilbakelegging*. Trediagram

Det er 6 kuler i en krukke – 2 røde og 4 blå.



Her kan læreren vise for elevene et trediagram ved trekning av to kuler fra en krukke og vise de ulike sannsynlighetene – *uten tilbakelegging*:



5.2.4.8 Et eksempel på empirisk sannsynlighet

Kast med tegnestift. Simulering.

Hvor stor er sjansen for at en tegnestift lander med spissen ned når vi kaster den? Er det 50 % sjanse for dette? Slik som ved et myntkast?

Du skal nå sjekke om dette stemmer.

Kast en tegnestift flere hundre ganger.

Noter ned antall ganger tegnestiften lander med spissen ned og antall ganger spissen vender opp.

1) Hvor stor blir den relative frekvensen for at tegnestiften lander med spissen ned?

2) Hvor stor blir den relative frekvensen for at tegnestiften lander med spissen opp?

5.2.4.9 Lotto

Lotto

En statistikk sier at fra 1986 til 2010 har tallet 18 vært blant de sju vinnertallene hele 293 ganger, mens tallet 13 har vært med 238 ganger i vinnerrekka.

Kan vi da kalle 18 for et lykketall og 13 for et ulykketall?

Er det større sjanse for å få 18 enn 13 når du spiller på lotto?

Hvor stor tror du sannsynligheten er for å trekke de sju vinnertallene blant de 34 tallene i kula?

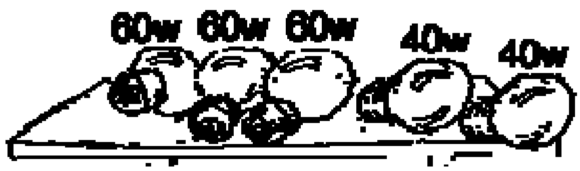
Vikinglotto

I vikinglotto er spiller vi med 48 kuler, og ikke 34 som i vanlig lotto.

Er det større eller mindre sjanse for å vinne i vikinglotto enn i vanlig lotto?

5.2.4.10 Trekning av lyspærer

Trekning av lyspærer



Lyset går på rommet ditt.

I et skap har du 3 lyspærer på 60 W og to lyspærer på 40 W.

a. Hvor stor er sannsynligheten for at du trekker en lyspære på 60 W?

b. Du trekker to lyspærer.
Hvor stor er sannsynligheten for at begge lyspærene er på 60 W?

5.3.1 Oppgaver i kombinatorikk

5.3.1.1 Opptelling

Bordtennisturnering

Fire personer lager en bordtennisturnering. Alle skal spille mot alle.

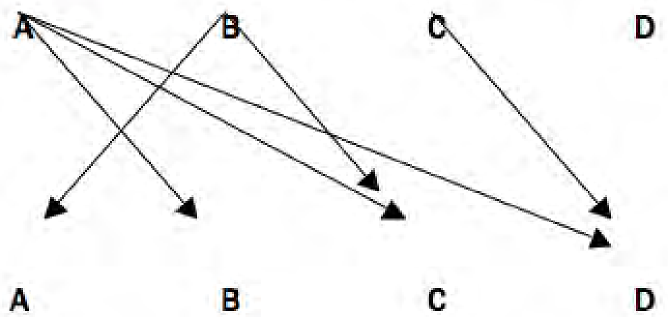
Hvor mange kamper blir det?

Elevene kan få utdelt følgende skjema hvor de kan krysse av hvem som skal spille mot hvem.

Men hvorfor får vi ikke 12 kamper i turneringen, men bare 6 kamper?

Spiller mot spiller	Spiller A	Spiller B	Spiller C	Spiller D
Spiller A		x	x	x
Spiller B	x		x	x
Spiller C	x	x		x
Spiller D	x	x	x	

Elevene kan også bruke følgende oppsett og bruke piler for å indikere hvem som skal spille mot hvem:



Hver pil betyr en kamp. Men hvorfor ikke flere piler?

Finnes det bedre måter å systematisere denne opptellingen på?

Fordele 6 drops på 3 barn. Grupper. (Bruk virkelige drops)

På hvor mange måter kan vi fordele 6 drops på 3 barn når alle skal få minst ett drops hver?

Elevene setter opp følgende tabell:

Måte nr.	Erik	Hilde	Maria
1	1	1	4
2	1	2	3
3	1	3	2
4	1	4	1
5	2	1	3
6	2	2	2
7	2	3	1
8	3	1	2
9	3	2	1
10	4	1	1

Legg merke til at antallet 10 framkommer ved å summere 1 + 2 + 3 + 4.

Hva om vi skulle fordele 7 drops på 3 barn?
Får dere 1 + 2 +3 + 4 + 5 = 15 måter? Sett opp tabell og undersøk!

Hva med å fordele 5 drops på 3 barn? Hva med n drops?

Tallene som framkommer ved som summen av de naturlige tallene, kalles trekanttallene.

På hvor mange måter kan dere kombinere (sette sammen)
8 mynter for å få 50 kroner?

Her kan elevene få utdelt "mynter" som det er skrevet 1-kronere, 5-kronere, 10-kronere og 20-kronere på.

5.3.1.2 Multiplikasjonsprinsippet

Pizzameny

På en restaurant får du sette sammen din egen pizza ved å kombinere én type kjøtt/fisk med to typer grønnsaker.

Kjøtt/fisk: biffkjøtt, kjøttdeig, scampi, tunfisk

Grønnsaker: tomat, sopp, løk, mais, ruccolo

Hvor mange ulike pizzaer kan du sette sammen?

Elevene kan bruke fargede brikker når de setter sammen pizzaene.

Elevene kan også få sette sammen en middagsmeny – forrett, hovedrett, dessert

Kontroller ved å multipliserer sammen hver av valgmulighetene!

Kle på klassekameraten din!

Få tak i 3 hatter, 4 skjorter og 2 bukser.

På hvor mange ulike måter kan vi kle på jens (en elev i klassen)?

Elevene noterer / lager tabell etter hvert som de klær på Jens
de ulike kombinasjonene?

Kontroller ved å multipliserer sammen hver av valgmulighetene!

Koffertkode, nøkkelkortkode, bankkode

På hvor mange måter kan vi lage en koffertkode, en nøkkelkortkode eller en bankkode som består av 4 sifre, hvor alle sifrene kan inneholde tallene fra og med 0 til og med 9.

Diskuter!

Kontroller ved å multiplisere sammen hver av valgmulighetene for hvert av sifrene!

Bilskilt

Undersøk reglene i for hvordan bilskilt kan lages. Det finnes for eksempel noen bokstaver som vi ikke bruker.

Hvor mange bilskilt kan vi lage i vårt fylke dersom bilskiltet skal bestå av 2 bokstaver og 5 tall?

Kontroller ved å multiplisere sammen hver av valgmulighetene for hver av bokstavene og for hvert av sifrene!

Fargekombinasjoner

Hver elevgruppe får 5 brikker med 5 ulike farger, for eksempel rød, blå, gul, grønn og oransje.

Hvor mange fargekombinasjoner kan du lage når du skal trekke ut 2 brikker?

Sett opp tabell, for eksempel:

Rød, blå	Blå, gul	Gul, grønn	Oransje, grønn
Rød, gul	Blå, grønn	Gul, oransje	
Rød, grønn	Blå, oransje		
Rød, oransje			

Dette gir 4 + 3 + 2 + 1 = 10 ulike fargekombinasjoner (trekanttall)

Fargekombinasjoner

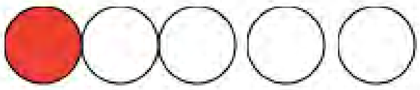
Hver elevgruppe får 5 brikker med 5 ulike farger, for eksempel rød, blå, gul, grønn og orange.

På hvor mange måter kan vi plassere de 5 fargene etter hverandre?

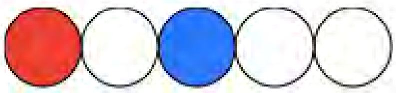
Eller:

Hvor mange ulike fargemønstre får vi dersom vi skal tre 5 perler med ulik farge på en snor? (Her kan naturligvis elevene bruker perler og snor).

Den røde kan plasseres på 5 måter:

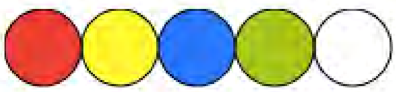


Etter at den røde er plassert, kan for eksempel plassere den blå på fire måter:

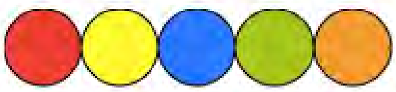


Når de to første fargene er plassert, er det tre måter å plassere for eksempel den grønne på.

Etter dette er det bare to måter å plassere den gule fargen på:



Når de fire første fargene er plassert, er det båre en plass igjen til den oransje:



Vi kontrollerer ved å multiplisere sammen hver av valgmulighetene for hver av fargene: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ulike måter.

Antall Lotto-rekker (Uten tilbakelegging)

En Lotto-rekke består 7 tall som blir trukket av 34 tall.

Det første tallet kan bli trukket ut på 34 måter.

Det andre tallet kan bli trukket ut på ______ måter.

Det andre tallet kan bli trukket ut på ______ måter.

.

.

.

Det sjuende tallet kan bli trukket ut på ______ måter.

På hvor mange (ulike) måter kan vi lage en Lotto-rekke?
(Hvor mange Lotto-rekker vi lage?, altså antall mulige Lotto-rekker)

Referanser

Alseth, B. (2009). Introduksjon til grunnleggende sannsynlighet. 16.09.2009. Multiaden 2009. Gyldendal forlag.

Bergsten, C., Häggström, J & Lindberg, L. (1997). Algebra för alla. *Nämnaren* TEMA. Göteborgs universitet. Göteborg.

Breiteig, T. & Venheim, R.(1999), *Matematikk for lærere 2*. Tano Aschehoug, Oslo.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Kerry, T. (1981). Talking: The teacher´s role. I C. Sutton (ed.): Commmunicating in the Classroom. London: Hodder & Stoughton

Kieran, C. (1984). Constructing meaning for equations and equations solving. I: A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (ed.). *Theory, research and practice in mathematics education* (s. 243 – 248). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Kücheman, D. (1981). Algebra. I: K.Hart (red.) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16, s. 102-119. London: John Murray.

Nilsson, P. (2009), "Elever resonerar om sannolikhet", SM*DF och Nationelt centrum för matematikutbildning*, NCM, s. 106 – 119. Brandell, G., Grevholm, B., Wallby, K. & Wallin (redaktion), Göteborg 2009.

Shaughnessy, J.M. & Bergman, B. (1993). Thinking about Uncertainty: Prabability and Statistics. In P. Wilson (ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (s. 177 – 197). New York: Macmilan.

PISA – sentrale ideer. http://www.pisa.no/hva_maaler_pisa/matematikk.html

Fuglestad, A.B. (2001). Simulering på regneark. Tangenten 4/2001. http://www.caspar.no/tangenten/2001/anne_berit014.html

TIMSS – rammeverk. http://timss.bc.edu/TIMSS2007/frameworks.html