

Læringsstøttende prøver

Sept. 2012

Matematikk 5. – 10. årstrinn

Ressurshefte

Tall Tallregning

Innledning.....	3
Innhold del 1: Analyse av oppgavene i læringsstøttende prøver.....	4
Tall og tallregning.....	4
Kapittel 1 Tallbegrepet og desimaltall	4
1.1 Desimalnotasjon.....	4
1.2 Sammenligning av desimaltall	7
1.3 Bruk av null som plassholder	11
1.4 Desimaltallene ligger tett på tallinjen	13
1.5 Desimaltall som symbol for del av en hel	14
1.6 Å lese av desimaltall på en tallinje.....	19
1.7 Posisjonssystemet.....	23
1.8 Regning med desimaltall	28
Del 2 Undervisningsaktiviteter	42
Kapittel 2 Diskusjoner i klasserommet.....	43
2.1 Spill som utgangspunkt for diskusjon.....	45
2.2 Rollebytte	46
2.3 Alltid sant, av og til sant, aldri sant	48
Kapittel 3 Undervisningsaktiviteter	49
Referanser	62

Innledning

Dette ressursheftet inneholder to deler, som begge er knyttet til Læringsstøttende prøver om emnene *Tall* og *Tallregning*. Spesielt retter disse oppgavene seg mot forståelse av tallsystemet vårt, når dette blir utvidet til å omfatte desimaltall, og de tanker elevene da tar med seg om de fire regningsartene. Disse oppgavene er samlet i to prøver kalt *Tall* og *Tallregning*. Ulike utgaver av prøvene er prøvd ut tidligere. Dette tilsvarer 5., 7. og 9. årstrinn etter Kunnskapsløftet LK06.

Del 1 i dette ressursheftet gjennomgår de enkelte oppgavene i prøvene, med diskusjon av ulike feilsvar og de misoppfatningene som ligger til grunn for disse. Til hver oppgave er det gitt svarfordelinger basert på utprøvingen av oppgavene.

Prøvene og analysen av resultatene har fokusert på noen viktige sider ved tallbegrepet. Analysen har pekt på funn som vi mener bør ha direkte konsekvenser for prioriteringer i forbindelse med undervisning, slik at elevene kan utvikle en solid begrepsforståelse.

Analysen er likevel ikke fullstendig. Det materialet som er samlet inn, gir grunnlag for flere og dypere studier av problemstillinger i forbindelse med begrepsdannelse innenfor tall og tallregning.

Del 2 inneholder en samling forslag til undervisningsaktiviteter med kommentarer og veiledninger, som retter seg mot de vansker som kartleggingsoppgavene avdekker. Det blir lagt opp til at læreren selv følger opp prøvene med undervisningsaktiviteter for elevene. Dette gjøres trolig best dersom læreren ved siden av en god oversikt over elevenes kunnskaper selv har innsikt i hvordan kartleggingsoppgaver kan lages, og hvordan en tilpasser undervisningsopplegg på bakgrunn de vanskene som elevene har.

Innhold del 1: Analyse av oppgavene i læringsstøttende prøver

Tall og tallregning

I denne delen blir ulike sider av tallbegrepet og forståelsen av de fire regningsartene analysert og diskutert. Noen av de diagnostiske oppgavene er noe modifisert i forhold til de opprinnelige oppgavene, mens andre er uforandret.

Skolene som var med i utprøvingen, er et tilfeldig utvalg av alle norske grunnskoler. Det er tatt hensyn til en balansert fordeling på regioner og skoler med ulike størrelser.

Antall svar som danner grunnlaget for denne analysen er følgende:

Tall: 512 på 5. årstrinn, 510 på 7. årstrinn og 519 på 9. årstrinn

Tallregning: 483 på 5. årstrinn, 475 på 7. årstrinn og 516 på 9. årstrinn

I presentasjonen nedenfor har vi valgt å gi kommentarer med utgangspunkt i de ulike delområdene av begrepet desimaltall og ut fra bestemte misoppfatninger. De ulike områdene og misoppfatningene finner en vanligvis spor av i flere oppgaver. Slike oppgaver vil bli kommentert under ett. Derfor kommer vi tilbake til noen av oppgavene flere ganger i analysen.

I framstillingen i det følgende kommenterer vi noen av svaralternativene for de aktuelle oppgavene. Noen misoppfatninger blir illustrert med autentiske elevsvar.

Kapittel 1 Tallbegrepet og desimaltall

Når elevene begynner å arbeide med desimaltall er de kommet til en kritisk fase i utviklingen av tallbegrepet. Elevene skal utvide det begrepet de har utviklet om hele tall. De møter ikke bare nye tall av typen de kjenner fra før. De nye tallene er på en side en utvidelse av *posisjonssystemet*, og på en annen side er de *spesialtilfeller* av brøker, med de ideer som er knyttet til begrepet brøk.

Elevene møter desimaltallene tidlig i forbindelse med målinger av ulike slag, men da oftest uten at det blir fokusert på de sentrale ideene knyttet til de "nye" tallene. Elevene har således kunnskaper om *skrivemåten* til desimaltallene, men ikke om meningsinnholdet knyttet til den. Lærere undrer seg ofte over at elevene mestrer oppgaver om desimaltall når oppgavene handler om penger. Grunnen er trolig ikke at elevene *forstår* desimaltall når det handler om penger, men heller at de i slike sammenhenger ikke trenger å bruke desimaltall. De kan fortsette med å regne som om det var hele tall, og veksle hundre øre til en krone. De kan altså regne riktig med penger uten at det er nødvendig å bruke meningsinnholdet i desimaltall. Nedenfor blir ulike aspekter ved forståelsen av desimaltall diskutert.

1.1 Desimalnotasjon

Når barn og voksne er usikre på meningen med noe, forsøker de å tolke det ukjente inn i en kjent. Når det gjelder mening knyttet til symboliseringen av desimaltall, fører dette i noen

sammenhenger til at vi overser desimalkommaet, og ved andre anledninger til at vi tenker seg at desimaltallet er satt sammen av to uavhengige naturlige tall som er skilt fra hverandre med et komma. Således kan noen elever tolke 5,65 som "fem hundre og sekstifem", mens andre kan tolke det som to separate naturlige tall "fem og sekstifem". Vi kan stille spørsmålet om en ensidig konkretisering av desimaltall ved hjelp av kroner og øre eller meter og centimeter er med på å underbygge tolkningen av desimaltall som et *par av hele tall*, der rollen til kommaet er et skilletegn. I oppgave 25 Tall 5 – 7 for 5. årstrinn ser vi dette problemet.

Oppgave 25

Som svar på en matematikkoppgave fikk Olav 4,9 og Lise 4,90.

Er det noen forskjell på svarene?

- ☐ Tallet som Olav fikk, har størst verdi
- ☐ Tallet som Lise fikk, har størst verdi
- ☐ Tallene har like stor verdi

Oppgaveeksempel 1: Forskjell mellom 4,9 og 4,90?

I oppgave 25 i Tall 5 – 7 svarer 20 % av elevene at det er forskjell mellom 4,9 og 4,90, fordi 90 er mer enn 9. Denne misoppfatningen knyttet til symbolisering av desimaltallene, *desimalnotasjonen*, er opphav til mange av feilene og misoppfatning-ene som blir diskutert nedenfor. I den følgende diskusjonen vil vi referere til denne misoppfatningen som "desimaltall som par av hele tall".

Andre elever tenker på desimalkommaet slik vi bruker kommaet ved oppramsing i skriving. I det videre skal vi se at elever ofte bruker komma som skilletegn i flere ulike sammenhenger.

For mange barn er tallets utseende det vesentlige, det er et "kommatal". De tror at tall er desimaltall fordi de "ser ut som desimaltall." Oppgave 29 i Tall 8 – 10 viser dette. Når elevene blir bedt om å forklare hvordan de kan vite om 8.59 er et desimaltall eller ikke, svarer de for eksempel at " Hvis (dersom) det er et desimaltall så bruker vi komma (11,9) og ikke punktum (7.05)." Andre elever viser til utseende av tallet og sier at "Desimaltal er eit tal bak komma" eller "Det er eit komma mellom 8 og 59".

Oppgave 29

Klokken viser 8.59 (eller "ett minutt på ni").

Er dette et desimaltall?

- ☐ Ja
- ☐ Nei



Oppgaveeksempel 2: Viser klokken et desimaltall?

Oppgave 29 Tall 8 – 10 Forklaring	7.årstrinn	9.årstrinn
-----------------------------------	------------	------------

Ubesvart	22	17
Viser til tallsystemet	6	12
Forklaringer ut fra tallets utseende	47	48
Svarer ja	60	55
Andre svar ukorrekte svar	25	23

Tabell 1: Prosentvis fordeling. Oppgave 29 Tall 8 – 10. Viser klokken et desimaltall?

Av de elevene som svarer nei på oppgave 29, er det bare 20 % i 7. årstrinn og 29 % i 9. årstrinn som refererer til tallsystemet, mens 34 % og 25 % har forklaringer som viser utseendet av tallet.

Følgende eksempel på elevsvar viser dette:

Oppgave 29 Tall 8 – 10

"Hvis (dersom) det er desimaltall så bruker vi komma (11,9) og ikke punktum (7.05)."

Elevsvar 1: Viser klokken et desimaltall?

De elevene som svarer ja på denne oppgaven, viser vanligvis til utseendet av tallet (60 % og 71 % for de to årstrinnene). Nedenfor er det vist to typiske elevsvar av denne typen:

Oppgave 29 Tall 8 – 10

"Desimaltal er eit tal bak komma:" "Det er eit komma mellom 8 og 59"

Elevsvar 2: Viser klokken et desimaltall?

Som lærer bør vi tenke over i hvilke situasjoner i dagliglivet et symbol blir brukt til å skille en større enhet fra en mindre, som for eksempel for tidsregning (klokken 10.15). I arbeidet med desimaltall velger elevene ofte å se på desimaltallet som et par av hele tall. Men i noen sammenhenger tolkes desimaltallet annerledes.

Følgende oppgave retter seg også mot symbolisering av desimaltall (Oppgave 21 Tall 5 – 7 og Oppgave 24 Tall 8 – 10):

Oppgave 21

Hvordan kan vi lese 9,7?

- ☐ Nittisju
- ☐ Ni sjudeler
- ☐ Ni og en sjudel
- ☐ Ni og sju tideler
- ☐ Ingen av disse

Oppgaveeksempel 3: Tolkninger av tallet 9,7

I tabell 2 nedenfor ser vi at relativt mange elever tolker 9,7 som ni og en sjudel, også på 9. årstrinn, noe som tyder på manglende forståelse av hva et desimaltall betyr.

Oppgave 21 Tall 5 – 7 Oppgave 24 Tall 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	7	2	2
Ni og sju tideler (Riktig svar)	40	56	74
Ni sjudeler	15	15	6
Ni og en sjudel	25	18	12
Andre svar	13	9	6

Tabell 2: Prosentvis fordeling. Hva betyr 9,7?

1.2 Sammenligning av desimaltall

I mange situasjoner der desimaltall skal sammenlignes, er tallene gitt med like mange desimaler (for eksempel når elevene skal avgjøre hvem som har vunnet et 100 meter løp, med tidene 10.00, 9.90 og 9.93 sekunder). Slike oppgaver byr ikke på store problemer for elevene. Når de derimot bruker kalkulator, blir nuller i slutten av desimaltallet borte. Dette fører til problemer for mange. For eksempel kan en oppgave være å avgjøre hvilket kjøp som lønner seg: 1,5 kg til 14,10 kroner eller 1,25 kg til 11,60 kroner? Bruker elevene kalkulator til å regne ut kostnaden per kilogram, må de forstå den relative størrelsen til tallene 9,4 og 9,28 for å kunne gi riktig svar. Det er flere oppgaver i prøvene som fokuserer på å sammenligne tall med ulike antall desimaler. For eksempel retter oppgave 19 Tall 5 – 7 og oppgave 20 i Tall 5 – 7 seg mot dette:

Oppgave 19

Hvilket tall har minst verdi?

- ☐ 0,625
- ☐ 0,25
- ☐ 0,3753
- ☐ 0,125
- ☐ 0,5

Oppgaveeksempel 4. Sammenligning av desimaltall etter verdi.

Oppgave 20

Hvilket tall har størst verdi?

- ☐ 0,649
- ☐ 0,87
- ☐ 0,7

Oppgaveeksempel 5. Sammenligning av desimaltall etter verdi

Tabellene 3 og 4 nedenfor viser prosentvis svarfordeling på disse oppgavene:

Oppgave 19 Tall 5 – 7 Oppgave 20 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	1	1
0,125 (Riktig svar)	16	55	79
0,5	64	26	7
0,3753	8	13	10
0,25	8	4	3
0,625	1	1	1

Tabell 3: Prosentvis fordeling.. Velg tallet med minst verdi.

Oppgave 20 Tall 5 – 7 Oppgave 21 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	1	1
0,87 (Riktig svar)	22	62	83
0,649	66	26	7
0,7	8	10	9

Tabell 4: Prosentvis fordeling. Velg tallet med minst verdi.

Tabell 3 og 4 ovenfor viser at mange elever tror at det korteste desimaltallet har minst verdi – og det lengste har størst verdi. Dette kan forklares ved at vi ser på tallet bak komma som et helt tall. Misoppfatningen om at et desimaltall er et par av to hele tall, er altså grunnlaget for misoppfatningen om at *det korteste desimaltallet har minst verdi*. De samme tabellene viser også at det er relativt få elever som har dette problemet på 9. årstrinn. På den andre siden er det også elever som har den misoppfatningen at det lengste desimaltallet har minst verdi. De svarer at 0,3753 er tallet med minst verdi i oppgave 19 og 0,7 som tallet med størst verdi i oppgave 20. Prosentandelen av elever som gjør dette, viser seg å være stabil for de tre årstrinnene. Det er tydelig at den undervisningen elevene til vanlig møter, har hjulpet dem med den første vanskeligheten, mens vi i mindre grad har fokusert på den andre misoppfatningen. Vi kan si at denne er ikke blitt utfordret i samme grad.

Oppgave 19 var med i den omfattende APU-undersøkelsen for matematikk i England omkring 1980 (APU 1982). 13 000 elever svarte på oppgaven. For 15-åringer fant en følgende svarfordeling:

0,125: 43 %; 0,5: 13 %; 0,3753: 36 %; 0,25: 2 %; 0,625: 4 %.

Vi hadde altså et mye bedre resultat i utprøvingen i Norge.

Fra elevenes forklaringer (oppgave 19 og 20) går det fram at mange mener at 0,7 har større verdi enn 0,87 fordi det i det første tilfellet er snakk om tideler, mens det i det andre tilfellet er hundredeler, og tideler er større enn hundredeler. Eller når det er hundredeler, så er tallet mer delt opp og dermed blir hver del mindre. Nedenfor ser vi noen elevsvar som illustrerer dette:

Oppgave 19 Tall 5 - 7

"Det er minst fordi det? har 0 kr og 5 øre"

"Fordi dei andre har hundre delar og tusendelar"

Elevsvar 3: Velg tallet med minst verdi

Det er tydelig at elevene er konsekvente i tenkningen sin når de svarer på disse oppgavene. Av de elevene som svarer at 0,5 har minst verdi i oppgave 19, er det 93 % i 5. årstrinn, 89 % i 7. årstrinn og 78 % i 9. årstrinn som også svarer at 0,649 har størst verdi i oppgave 20. Tilsvarende tall for dem som svarer at 0,3753 er minst i oppgave 19 og 0,7 størst i oppgave 20, er 69 %, 69 % og 71 %.

I oppgavene 13 – 16 i Tall 5 – 7 og oppgavene 12 – 15 i Tall 8 – 10 er det spørsmål om å finne tallet med størst verdi blant tre gitte tall.

Oppgave 13

Hvilket tall har størst verdi?

- ☐ 5436
- ☐ 547
- ☐ 56

Oppgaveeksempel 6a: Sammenligning av heltall etter verdi.

Oppgave 14

Hvilket tall har størst verdi?

- ☐ 6,78
- ☐ 45,6
- ☐ 34,5

Oppgaveeksempel 6b: Sammenligning av desimaltall etter verdi.

Oppgave 15

Hvilket tall har størst verdi?

- ☐ 3,521
- ☐ 3,6
- ☐ 3,75

Oppgaveeksempel 7a: Sammenligning av desimaltall etter verdi.

Oppgave 16

Hvilket tall har størst verdi?

- ☐ 4,09
- ☐ 4,7
- ☐ 4,008

Oppgaveeksempel 7b: Sammenligning av desimaltall etter verdi.

De to første oppgavene viser at de fleste elever kan sammenligne størrelsen på naturlige tall, og likeledes desimaltall med ulike heltallsdel. De kan i det siste tilfellet se bort fra desimaldelen. Oppgave 14 og 15 skiller seg fra oppgavene 19 og 20 ved at de ikke har null som heltallsdel i tallene.

Oppgave 15 Tall 5 – 7 Oppgave 14 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	0	0
3,75 (Riktig svar)	20	64	88
3,521 (Lengst desimaldel er størst)	74	30	6
3,6 (Korteste desimaldel er størst)	5	6	5

Tabell 5: Prosentvis fordeling. Velg tallet med størst verdi.

Vi ser at svarfordelingen i oppgave 14 (tabell 5) skiller seg lite fra oppgave 20 (tabell 4). Ved å sammenligne svarene finner vi at av elevene som svarer 0,649 i oppgave 20, så er det 96 % i 5. årstrinn, 86 % i 7. årstrinn og 65 % i 9. årstrinn som svarer 3,521 i oppgave 14. Dette viser at denne misoppfatningen av desimaltall er uavhengig av om desimaltallet har null eller en annen heltallsdel.

Oppgave 16 Tall 5 – 7 Oppgave 15 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	2	0	0
4,7 (Riktig svar)	31	72	94
4,09 (Størst tall bak komma)	32	19	4
4,008 (Lengst desimaldel)	35	9	2

Tabell 6: Prosentvis fordeling. Velg tallet med størst verdi.

I oppgave 15 er ikke svaret 4,008 (som er tallet med lengst desimaldel, og dermed tallet med størst verdi ifølge denne misoppfatningen vi har sett på ovenfor) så vanlig som vi kunne vente ut fra svarene på de andre oppgavene. En grunn til dette kan være at de elevene som oppfatter et desimaltall som et par av hele tall, i dette tilfellet sammenligner verdiene til de hele tallene: 7, 09 og 008, og da er 09 det største av dem. I denne oppgaven er det også tale om å forstå null som en plassholder. Mer om dette i neste avsnitt. Av de elevene på 9. årstrinn som svarte 0,649 i oppgave 20, er det mer enn halvparten som gi riktig svar i oppgave 15. Tilsvarende tall for 7. årstrinn og 5. årstrinn er en tredel og en seksdel.

Resultatene ovenfor indikerer at en forholdsvis stor del av elevene er usikre når det gjelder relative størrelser av desimaltall. En umiddelbar reaksjon fra en lærer da resultatene fra APU-undersøkelsen ble publisert i *The Times Educational Supplement*, var at elevene ville overvinne disse vanskelighetene dersom alle desimaltallene ble gitt med like mange siffer i desimaldelen. Således måtte elevene lære å føye til nuller til alle tall slik at alle tall fikk like mange desimaler, og så sammenligne disse som om de var hele tall. Denne regelen, som for mange vil synes vilkårlig og meningsløs, vil gi riktige svar, men vil ikke være til hjelp for å fjerne noen av misoppfatningene som det er gjort rede for ovenfor.

1.3 Bruk av null som plassholder

Oppgave 18 Tall 5 – 7 og Oppgave 19 Tall 8 – 10 illustrerer problemet med null som plassholder.

Oppgave 18

Skriv riktige tall i svarruten.

$$5,47 = 5 + 0,4 + \boxed{}$$

Oppgaveeksempel 8.. Bruk av null som plassholder

Oppgave 18 Tall 5 – 7 Oppgave 19 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	22	13	8
0,07 (Riktig svar)	11	39	66
7	30	22	9
0,7 eller 0,70	7	4	3
0,43 eller 4,3 eller 43	13	10	8

Tabell 7: Prosentvis fordeling.

Svaralternativene 7 eller 0,7 eller 0,70 viser at elevene har vanskeligheter med å bruke 0 på en korrekt måte som plassholder i desimaltall.

Svar av typen 0,43 eller 4,3 eller 43 kommer av at enkelte elever ser på desimaltall som par av hele tall. I denne oppgaven "mangler" det 43 bak komma.

Vanskeligheten med null som plassholder viser seg også i oppgave 7 Tall 5 – 7 og Oppgave 8 Tall 8 – 10:

Oppgave 7

Skriv desimaltallet som har:

a) 8 tiere 3 enere 5 tideler Svar:

b) 3 hundrere 7 enere 4 tideler Svar:

Oppgaveeksempel 9. Plassering av siffer i desimaltall.

Svarfordelingene for oppgave 7 Tall 5 – 7 og oppgave 8 Tall 8 – 10 er gitt i tabell 8 og tabell 9:

Oppgave 7a Tall 5 – 7 Oppgave 8a Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	6	4
83,5 (Riktig svar)	41	63	75
835	14	5	4
8,35	14	11	5
83,05	9	3	2

Tabell 8: Prosentvis fordeling. Plassering av siffer i desimaltall.

Oppgave 7b Tall 5 – 7 Oppgave 8b Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	10	7	4
307,4 (Riktig svar)	25	45	61
374	14	6	4
37,4	18	15	14
3,74	10	9	4
307,04	6	3	3

Tabell 9: Prosentvis fordeling. Plassering av siffer i desimaltall.

Vi legger merke til at mange elever, på alle nevnte årstrinn har plassert de gitte sifrene i den rekkefølgen de står i oppgaven, med eller uten komma. Svaret 37,4 kan komme av at de har lest tideler i oppgaven, og setter komma foran firetallet. Likevel forteller dette om den ekstra vanskeligheten med null som plassholder, selv om det i denne oppgaven er knyttet til heltallsdelen. Noen elever svarer 83,05 og 307,04. Nesten alle disse gjør dette konsekvent på de to oppgavene. Den samme konsekvensen finner vi en mellom svarene 8,35 og 3,74, noe som indikerer at det heller er tale om manglende forståelse enn at de ikke har lest oppgaven grundig nok. Ved nærmere studium av svarene finner vi at mer enn 90 % av elevene som svarer 835 på oppgave 7a, også svarer 374 på oppgave 7b. Disse elevene ignorerer komma. Tilsvarende vanskeligheter finner vi oppgave 24 Tall 5 – 7 (a, b og c) og oppgave 30 Tall 8 – 10 (a, b, c og d):

Oppgave 30

Skriv et tall som har:

a) Større verdi enn 5 og mindre verdi enn 6 Svar:

b) Større verdi enn 3,9 og mindre verdi enn 4 Svar:

c) Større verdi enn 6 og mindre verdi enn 6,1 Svar:

d) Større verdi enn 0,63 og mindre verdi enn 0,64 Svar:

Oppgaveeksempel 10. Skrive et tall som har verdi mellom to gitte tall.

Oppgave 24c, Tall 5 – 7 Oppgave 30c, Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	22	14	8
6,05 eller lignende (Riktig svar)	12	30	61
6 eller 6,1	7	3	3
Ingen tall	44	44	24
Blander med brøk	6	3	0

Tabell 10: Prosentvis fordeling. Oppgave 30c Tall 8 – 10.

Feilsvarene i oppgave 30c viser i tillegg til problemet med null som plassholder også vanskeligheter med symbolisering av desimaltall, idet noen elever blander desimaltallnotasjon med brøknotasjon.

1.4 Desimaltallene ligger tett på tallinjen

Dersom vi ved hjelp av kalkulator utfører divisjonen $7:3$, skriver ned svaret og deretter multipliserer svaret, kan vi få fram 6,9999999 på kalkulatoren. Det at dette tallet er tilnærmet lik 7, blir ikke forstått av alle elever. Svært få har en forestilling om at det eksisterer et stort antall, for å ikke å snakke om uendelig mange, desimaltall mellom ethvert gitt tallpar, og at det derfor kan finnes et nytt desimaltall så nær til et gitt tall som vi måtte ønske. Dette blir stadfestet i oppgave 23 Tall 8 – 10:

Oppgave 23

Hvor mange tall er det mellom 0,47 og 0,48?

☐ Ingen
☐ Ett
☐ Ti
☐ Uendelig mange

Oppgaveeksempel 11. Oppgave 23 Tall 8 – 10. Tall mellom 0,47 og 0,48.

Svarfordelingen for denne oppgaven var:

Oppgave 23 Tall 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	6
Uendelig mange (Riktig svar)	5	18
Ingen	29	23
Ett tall	33	13
2-8 tall	2	2
Ni tall	2	10
10, 100 eller andre dekadiske enheter	4	9
0,01 eller $1/100$	12	15

Tabell 11: Prosentvis fordeling. Oppgave 23 Tall 8 – 10. Tall mellom 0,47 og 0,48.

Omtrent en fjerdedel av elevene sier at det ikke finnes noe tall mellom 0,47 og 0,48. En grunn til det kan være at de tenker på hele tall, eller det kan være at misoppfatningen om desimaltall som par av hele tall ligger under også her.

Mange elever tror at det finnes ett tall mellom 0,47 og 0,48. Intervjuer i andre studier, for eksempel Swan (1983), har vist at elevene da mener at dette tallet er midt mellom 0,47 og 0,48. Andre elever har fått med seg noe av systemet i notasjonen for desimaltall, at vi kan dele hvert mellomrom opp i ti like store deler, og får på denne måten ni tall mellom to "nabo-desimaltall". Vi kan gjerne si at disse elevene har tatt et langt skritt mot å forstå at desimaltallene kan ligge tett på tallinjen.

Svarfordelingen for oppgave 30d Tall 8 – 10 er vist i tabell 12 nedenfor:

Oppgave 30d, Tall 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	4	7
0,635 eller lignende (Riktig svar)	27	55
0,63 eller 0,64	1	2
Ingen tall	47	30
Blander med brøk, for eksempel 0,63 $\frac{1}{2}$	3	1
Andre svar	8	5

Tabell 12: Prosentvis fordeling. Oppgave 30d Tall 8 – 10. Tall mellom 0,63 og 0,64.

Vi legger merke til den relativt lave prosenten riktige svar, og at det viktigste feilsvaret er at det ikke finnes noe tall mellom 0,63 og 0,64. Ser vi nærmere på svarene, viser det seg at av de som svarer at det ikke finnes noe tall mellom 0,47 og 0,48, svarer 55 % av elevene på 7. årstrinn også "Ingen" i oppgave 30d, og tilsvarende 63 % på 9. årstrinn. Halvparten av de elevene som mistolker oppgave 23 og svarer 0,01, svarer også "Ingen" i oppgave 30d.

Det kan være flere grunner til disse resultatene. En grunn kan være at elevene er så vant til å arbeide med nøyaktig to desimaler, gjerne knyttet til konkretisering med kroner og øre, at de ikke har fått med seg den generelle delen i tallsystemet. Mer konkretisering gjennom målinger og arbeid på tallinjer kan legge til rette for å overvinne slike vansker.

1.5 Desimaltall som symbol for del av en hel

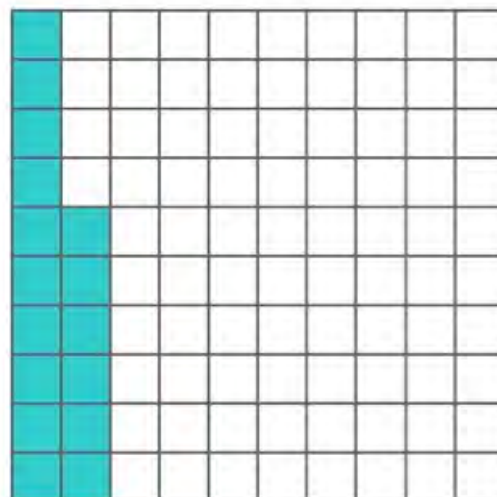
I kapittel 1.7 vil vi se på oppgaver som har preg av "oversettelse" fra brøk til desimaltall. I det følgende vil vi ta for oss oppgaver som nok kan oppfattes på samme måte, men som også kan løses ved å oppgi desimaltallet direkte. Den første oppgaven er gitt på 5. årstrinn:

Oppgave 8

På figuren til høyre ser vi at en brøkdel av kvadratet er fargelagt.

Skriv denne brøkdelen som et desimaltall.

Svar:



Oppgaveeksempel 12. Oppgave 8 Tall 5 – 7. Hvor stor del av kvadratet er fargelagt?

Av tabell 13 går det fram at forholdsvis få elever har svart riktig:

Oppgave 8 Tall 5 – 7	5.årstrinn
Ubesvart	26
0,16 (Riktig svar)	13
1,6	7
16	13
1,06 eller lignende	4
16,100 eller lignende	12
Riktig svar som brøk	9
Andre svar	16

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Tall 5 – 7. Hvor stor del av kvadratet er fargelagt?

Dette kan ha flere grunner. Enkelte elever vil ha problemer med uttrykket "hvor stor del av ...". Seksten små ruter kan jo sies å være en bestemt del av hele kvadratet, ett hundre små ruter. Like mange har gitt dette svaret som det svaret vi ønsker: 0,16. Interessant er det også at svaret 16,100 kommer så ofte. Det tyder på at elevene oppfatter desimaltallet som et divisjonstegn eller som en brøkstrek.

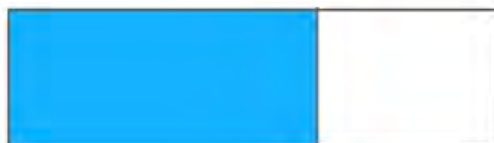
Lignende oppgaver ble gitt også på 7. årstrinn og 9. årstrinn. Oppgavene har det til felles at eleven må velge mellom å gi absolutte tall eller relative tall som svar. Voksengenerasjonen ville kanskje ha omformulert spørsmålet og spurt om "andel" i stedet for "del". Ordet "andel" synes langt på vei å ha gått ut av bruk. Det kan ha redusert presisjonsnivået noe. Men hva er det absolutte tallet i oppgave 10 nedenfor? Dersom vi bruker linjalen, ser vi at lengden av det skraverte feltet er 3,6 cm. En del av elevene har vist at de har målt og gitt svaret i cm. Andre sier at de har målt. Av dem har ikke så få skrevet 3,5 cm. Tallet 3,5 kan vi også få på en annen måte: Tre av fem deler er skravert. Dermed vil vi kunne komme i villrede om hva eleven har ment. Ved senere bruk av denne oppgaven kan en unngå dette problemet ved å gjøre rektangelet noe lengre, for eksempel 8 cm, slik at 4,8 cm er skravert.

Oppgave 10

På figuren til høyre ser vi at en prosentdel av rektanglet er fargelagt.

Anslå denne prosentdelen, og skriv svaret som et desimaltall.

Svar:



Oppgaveeksempel 13. Oppgave 10 Tall 8 – 10. En prosentdel av rektanglet er fargelagt. Anslå denne prosentdelen, og skriv svaret som et desimaltall.

Svarfordelingen blant elevene på 7. årstrinn og 9. årstrinn er vist i tabell 14 nedenfor:

Oppgave 10 Tall 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	12	11
0,6 eller 0,7 (Riktig svar)	19	29
To desimaler i området 0,55 til 0,74	10	19
0,5	2	1
0,75 eller lignende	3	4
3,6	11	2
Ikke skravert del	2	1
Brøk eller prosent	13	13
Andre svar	29	21

Tabell 14: Prosentvis fordeling. Oppgave 10 Tall 8 – 10. Hvor stor del av rektanglet er fargelagt?

Nedenfor viser vi to eksempler på hvordan elever forklarer hvorfor deres svar er det riktige:

Oppgave 10 Tall 8 – 10

Svar: 1,75

Forklaring: "Jeg deler rektanglet i 3, og får en rute skravert og ca. 0,75 skravert i den andre."

Svar: 6,5

Forklaring: "For hele er ikke skravert, men over det halve."

Elevsvar 4: Oppgave 10 Tall 8 – 10. Hvorfor er svaret det riktige?

Som vi ser av eksemplene, har enkelte elever grunnlagt svaret de gir på oppgave 10, med at litt over halvparten er skravert. En del elever har forsøkt å finne ut om hele rektanglet lar seg dele inn i like store deler, slik at det skraverte feltet utgjør et helt antall av disse. Deretter har en prøvd å gi et desimaltall som uttrykker dette forholdet. Svarfordelingen på 7. årstrinn og 9. årstrinn er vist i tabell 15 nedenfor:

Oppgave 10 Tall 8 – 10 Forklaring	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	28	24
Akseptabel forklaring	30	42
Feil forholdsbeaktning	6	8
Andre svar	37	25

Tabell 15: Prosentvis fordeling. Oppgave 10 Tall 8 – 10. Forklaring/begrunnelse.

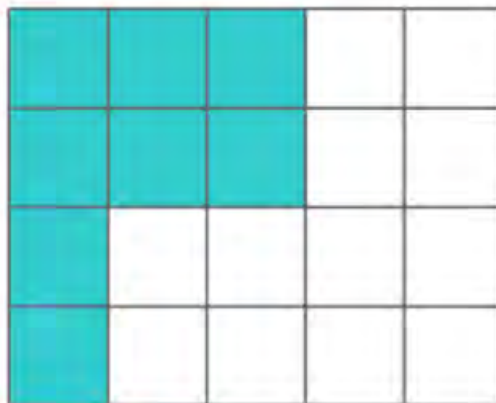
Oppgave 17 Tall 8 – 10 har samme problemstilling som oppgave 10 Tall 8 – 10 nevnt ovenfor, men den har en form som inviterer til å telle og ta utgangspunkt i en brøk eller et forhold ved rektanglet er delt inn i like store kvadrater. Dette er flervalgsoppgave. Distraktorene, de uriktige svaralternativene, er feilsvar som er vanlige ved denne type problemstillinger:

Oppgave 17

På figuren til høyre ser vi at en brøkdel av rektanglet er fargelagt.

Skriv denne brøkdelen som et desimaltall.

- ☐ 8,12
- ☐ 0,4
- ☐ 8,20
- ☐ 0,8



Oppgaveeksempel 14. Oppgave 17 Tall 8 – 10. Hvor stor brøkdel av rektanglet er fargelagt? Skriv svaret som et desimaltall.

Oppgave 16 bad opprinnelig elevene om å forklare og uttrykke med egne ord hvilke tanker som ligger bak svaret de gir på oppgaven. I omfattende grad blir det gitt forklaringer som stadfester det vi ventet om hvordan distraktorene har fungert. Svarfordelingen blant elevene på 7. årstrinn og 9. årstrinn nedenfor i tabell 16.

Oppgave 17 Tall 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	3	2
0,4 (Riktig svar)	6	39
8,12	19	13
8,20	35	25
0,8	28	22

Tabell 16: Prosentvis fordeling. Oppgave 17 Tall 8 – 10.

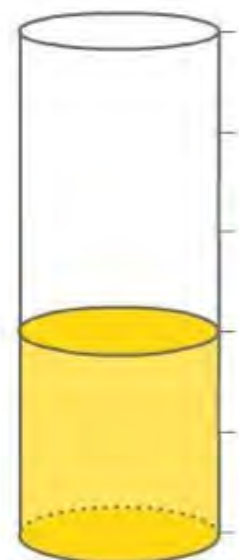
Oppgave 36 Tall 8 – 10 har felles trekk med oppgave 10 Tall 8 – 10 og oppgave 17 Tall 8 – 10. Her er tellingen/målingen alt utført ved at målene er satt på figuren. En feilkilde i oppgave 36 er at en del elever har problemer med å tolke figuren. Manglende romsans blir avslørt ved at elevene trekker en linje fra bortre kant av vannspeilet på figuren til ca. 2,5 (eller 2,3) på tallinjen. Dermed gir de svaret 2,5 (eller 2,3) ved avlesning.

Oppgave 36

På figuren ser vi at en brøkdel av glasset er fylt med saft.

Skriv denne brøkdelen som et desimaltall.

- ☐ 2,5
- ☐ 0,4
- ☐ 2,3
- ☐ 0,2



Oppgaveeksempel 15. Oppgave 36 Tall 8 – 10. Hvor stor brøkdel av hele glasset er fylt med vann?
Skriv svaret som et desimaltall.

Svarfordelingen for oppgave 36 Tall 8 – 10 følger i tabell 17 nedenfor. Den viser langt på vei samme bildet som oppgave 17 Tall 8 – 10:

Oppgave 36 Tall 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	8	6
0,4 (Riktig svar)	11	31
2,5	21	15
2,3	24	21
0,2	36	26

Tabell 17: Prosentvis fordeling. Oppgave 36 Tall 8 – 10.

Vi gjengir også de vanligste forklaringene til elevene i tabell 18 nedenfor:

Oppgave 36 Tall 8 – 10 Forklaring	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	28	21
Akseptabel forklaring	5	19
2,5 betyr 2 av 5	4	4
2,3 fordi to deler er skravert	0	1
0,2 fordi to deler er skravert	10	8
Vannet går opp til 2,3 eller 2,5	10	11
Andre svar	43	36

Tabell 18 Prosentvis fordeling. Oppgave 36 Tall 8 – 10. Forklaring/begrunnelse.

Umiddelbart kan kategoriene i oppgave 17 og 36 sammenlignes. Oppgave 17 har vært lettere både på 7. årstrinn og 9. årstrinn, til tross for at tallene i oppgave 36 er enklere. For begge oppgavene er det imidlertid forholdsvis få riktige svar, når vi sammenligner med tallet på riktige svar på oppgave 10, som hadde en åpen form (kortsvarsform).

Svært mange har i oppgavene 17 og 36 tenkt på komma som et skilletegn mellom to hele tall. Dette gjelder ca. 50 % av elevene på 7. årstrinn og i overkant av 35 % på 9. årstrinn. I oppgave 17 har ca. 2/3 av elevene som bruker komma som skilletegn, valgt å sammenligne den skraverte delen med helheten (8, 20). Det at langt færre har gjort dette i oppgave 36, reiser interessante spørsmål.

Intuitivt kunne vi i oppgave 36 forvente at når både tallet for den fylte delen (2) og hele glassets volum (5) var angitt, ville bruken av 2 og 5 være nærliggende. Kan årsaken til at få bruker disse tallene, ligge i manglende oppfatning av volumet i et "åpent" glass? Kanskje er elevene for ukjente med konteksten.

I oppgave 17 vil en mulig start for elevene være først å telle opp skraverte ruter (8) og hvite ruter (12). Konkretiseringsmåten er ofte brukt i undervisningen i brøk. Dette kan føre til at elevene velger å sammenligne den skraverte delen med hele figuren. De sammenligner 8 og 20. Desimalkommaet blir et skille tegn mellom teller og nevner.

Det er interessant at den åpne oppgave 10, uten markeringer på figuren som kunne hjelpe til å finne det nøyaktige forholdet, viser seg å være betydelig enklere enn oppgave 17 og oppgave 36. Kan svaret være at jo mer tilgjengelige de absolutte størrelsene på figurene er, desto mer distraherende synes de å virke, slik at elevene henfaller til mer primitive tankemodeller?

Oppgave 36 Tall 8 – 10

Svar: 2,5

Forklaring: "Fordi det måler 2,5"

Svar: 2,3

Forklaring: "Fordi glasset står skeivt og derfor ser det ut som det er 2,3 i glasset"

Svar: 0,4

Forklaring: "Fordi hvis vi gjør om $2/5$ til tideler som blir $4/10$ - som igjen blir 0,4 får vi 0,4"

Svar: 0,2

Forklaring: "Fordi midten på vannkanten går opp til tallet 2."

Elevsvar 5: Oppgave 36 Tall 8 – 10. Forklaringer

1.6 Å lese av desimaltall på en tallinje

Vi har tidligere sett på at tallinjen trolig er det beste midlet til å konkretisere menings-innholdet i tallbegrepet når elevene kommer til desimaltall. Dette er fordi tallinjen har nær sammenheng med konkrete erfaringer med lengdemåling, hvor vi kan se at jo mer nøyaktig en skal måle, desto mer findelte måleenheter trenger vi. Tallinjen er også et effektivt middel til å fokusere på en del av de misoppfatninger vi har pekt på ovenfor. På den andre siden er det et spørsmål om hvilke tanker elevene vanligvis har gjort seg om desimaltall på tallinjen, og hva de ser etter, når de skal lese av på en skala eller en tallinje. Oppgave 26 og 27, Tall 5 – 7 og oppgave 31 – 35 nedenfor, Tall 8 – 10 retter seg mot noe av dette.

Oppgave 31

Nedenfor ser du en tallinje.



Hvilket tall skal stå der den oransje pilen peker?

Svar:

Oppgaveeksempel 16. Skrive inn tall på tallinje.

Oppgave 32

Nedenfor ser du en tallinje.



Hvilket tall skal stå der den oransje pilen peker?

Svar:

Oppgaveeksempel 17. Skrive inn tall på tallinje.

Oppgave 31 ble løst av 61 %, 81 % og 92 % av elevene på de tre årstrinnene. Den mest vanlige feilen var å telle streker etter 1-tallet og svare 1,4. Prosenttallene for dette var 7, 6 og 3. Noen elever brukte brøk, for eksempel $\frac{1}{3}$.

I tabell 19 gjengir vi noen resultater fra oppgavene 27 Tall 5 - 7 og 32 Tall 8 - 10:

Oppgave 27 Tall 5 - 7 Oppgave 32 Tall 8 - 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	18	7	3
2,85 (Riktig svar)	17	53	78
2,8 eller 2,9	11	14	7
Andre tall mellom 2,8 og 2,9	8	1	2
2,805 eller lignende	2	1	1
Blander med brøk	20	10	1
Andre svar	24	14	8

Tabell 19: Prosentvis fordeling. Tallinje.

Vi legger merke til at mange elever svarer 2,8 eller 2,9. De leser av en av de nærmeste strekene til det punktet piler peker på. Vi kan stille spørsmålet om disse elevene er klar over at mellomrommet mellom disse punktene på tallinjen kan deles inn i ti nye deler (i første omgang). Andre elever vet at de skal skrive et tall mellom 2,8 og 2,9, men vet ikke hvordan de skal gjøre det, og blander desimaltall og brøk, for eksempel $2,8\frac{1}{2}$. Andre elever igjen skriver tall med mer enn ett komma, for eksempel 2,8,5. Det er altså noen elever som oppfatter punktet som piler peker mot, som 2,8, pluss et lite tillegg, mens andre elever ser på tallene som en rekke av symboler. Noen av disse problemene finner vi også igjen i oppgavene nedenfor:

Tabell 20 nedenfor viser resultatene fordelt på noen av de samme svarkategoriene som er vist i tabell 18. Vi viser også til at svaralternativene 8,5 og er kommentert i kapittel 1.3 Bruk av null som plassholder.

Oppgave 33

Nedenfor ser du en tallinje.



Hvilket tall skal stå der den oransje pilen peker?

Svar:

Oppgaveeksempel 18. Oppgave 33 Tall 8 – 10. Skrive inn tall på tallinje

Oppgave 33 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	21	8	3
8,05 (Riktig svar)	17	51	72
8 eller 8,1	15	9	7
8,01	5	5	3
8,5 eller lignende	7	10	5
Blander med brøk	19	9	2
Andre svar	16	8	8

Tabell 20: Prosentvis fordeling. Oppgave 33 Tall 8 – 10. Tallinje.

Bortsett fra problemet med null som plassholder viser svarfordelingen de samme tendensene som i tabell 19. Ved å se nærmere på svarene finner vi at de fleste elevene er konsekvente når det gjelder feiltyper i disse to oppgavene.

Nedenfor gjengir vi to oppgaver der tallinjen er delt inn i hundredeler:

Oppgave 34

Nedenfor ser du en tallinje.



Hvilket tall skal stå der den oransje pilen peker?

Svar:

Oppgaveeksempel 19. Oppgave 34 Tall 8 – 10. Skrive inn tall på tallinje.

Oppgave 35

Nedenfor ser du en tallinje.



Hvilket tall skal stå der den oransje pilen peker?

Svar:

Oppgaveeksempel 20. Oppgave 35 Tall 8 – 10. Skrive inn tall på tallinje

De vanligste svarene for disse to oppgavene, oppgave 34 og 35 Tall 8 – 10, er gitt i tabellene 21 og 22:

Oppgave 34 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	22	9	5
2,03 (Riktig svar)	22	49	71
2,3 eller 2,30	36	31	17
2,003	0	1	1
Teller streker	4	1	0
Andre svar	16	9	6

Tabell 21: Prosentvis fordeling. Oppgave 34 Tall 8 – 10. Tallinje.

Oppgave 35 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	30	17	10
2,27 (Riktig svar)	20	48	67
2,07	4	6	5
2,7	7	5	2
Teller streker	14	7	4
Flere komma	4	0	0
Blander med brøk	2	0	0
Andre svar	19	17	12

Tabell 22: Prosentvis fordeling. Oppgave 35 Tall 8 – 10. Tallinje.

Løsningsfrekvensen varierer lite mellom de siste tre oppgavene som er behandlet her, og det er 12 %, 33 % og 57 % på de aktuelle årstrinnene som løses begge de to siste oppgavene riktig. Det er tydelig at null som plassholder spiller en stor rolle i oppgave 34, da omtrent 40 % av de elevene som svarer 2,3 i oppgave 34, får et riktig svar i oppgave 35. Samtidig er det få av disse som svarer 2,7 i oppgave 35, noe som underbygger påstanden om problemet med null som plassholder. Noen elever setter inn en 0 i oppgave 35. Nesten alle disse har riktig svar på oppgave 34. Spørsmålet er om det kan ha vært en "smitteeffekt" fra oppgave 34 her.

1.7 Posisjonssystemet

I kapittel 1.1 og kapittel 1.5 har vi diskutert ulike problemer elevene har med symboliseringen av desimaltall. En viktig bakgrunn for at elevene skal kunne opparbeide en god forståelse på dette feltet er at elevene har forstått posisjonsprinsippet i tallsystemet. Når det gjelder desimaldelen av et tall, er det viktig å vite at for eksempel tallet 0,437 har verdien fire tideler pluss tre hundredeler pluss sju tusendeler, og at dette er det samme som 437 tusendeler. I dette kapitlet vil vi diskutere noen oppgaver som handler om posisjonssystemet. Oppgavene finnes i emnet Tall og er med for alle årstrinnene.

Oppgave 5

Skriv verdien av sifferet 7 i tallet 0,573 som helt tall eller brøk.

- ☐ 70
- ☐ 7
- ☐ $\frac{7}{10}$
- ☐ $\frac{7}{100}$

Oppgaveeksempel 21. Forståelse av posisjonssystemet.

Oppgave 6

Hvilket siffer står på hundredelsplassen i 6,423?

- ☐ 6
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 3

Oppgaveeksempel 22. Forståelse av posisjonssystemet.

Oppgave 5 Tall 5 – 7 Oppgave 6 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	8	3	3
7/100 (Riktig svar)	26	54	73
70	40	23	9
7	11	10	4
7/10	13	10	10

Tabell 23: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 Tall 8 – 10. Posisjonssystemet.

Oppgave 6 Tall 5 – 7 Oppgave 7 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	6	1	1
2 (Riktig svar)	10	31	47
6	15	8	4
4	65	55	39
3	4	5	8

Tabell 24: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 Tall 8 – 10. Posisjonssystemet.

Tabellene 23 og 24 viser at overraskende mange elever velger feil svaralternativ. Vi finner det rimelig å tro at noen av dette kan forklares ut fra den vanlige lese måten vi bruker for desimaltall. Tallet 0,573 blir lest som "null komma fem hundre og syttitre". En slik lese måte er med på å forsterke misoppfatningen om at desimaltall er et par av hele tall. Tallet 5 står ikke for her for fem hundre, men for fem tideler, og vi har ikke sytti, men sju hundredeler. *For virkelig å forstå posisjonssystemet i desimaldelen til et tall, må en gå grundig inn på strukturen til denne skrivemåten.* Denne tankegangen vil ikke komme fram slik en bruker desimaltall i forbindelse med penger. De som velger 4 som riktig svar i oppgave 7, gjør trolig det fordi de leser "fire hundre og tjuetre" (og 70 i oppgave 6 fordi de leser "fem hundre og syttitre"). Ved å se nærmere på svarene finner en at 6 %, 24 % og 42 % svarer riktig på *begge* oppgavene. De aller fleste som svarer riktig på oppgave 6, men feil på oppgave 7, mener at tallet 4 står på hundredelsplassen.

På 5. årstrinn er oppgaven 9 og 11 under Tall 5 – 7 tilsvarende oppgaver om posisjonssystemet, men her med hele tall. Tabellene 25 og 26 nedenfor er med på å støtte argumentene ovenfor, siden det viser seg at mange elever på 5. årstrinn har god kjennskap til posisjonssystemet for hele tall.

Oppgave 9

Hvilken verdi har sifferet 4 i 3416?

- ☐ 4
- ☐ 40
- ☐ 400
- ☐ 4000

Oppgaveeksempel 23. Oppgave 9 Tall 5 – 7. Forståelse av posisjonssystemet.

Oppgave 11

Hvilket siffer står på tierplassen i 3142?

- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 2

Oppgaveeksempel 24. Oppgave 11 Tall 5 – 7. Forståelse av posisjonssystemet.

Oppgave 9 Tall 5 – 7	5. årstrinn
Ubesvart	8
400 (Riktig svar)	66
4	8
40	5
4000	11

Tabell 25: Prosentvis fordeling. Oppgave 9 Tall 5 – 7. Posisjonssystemet.

Oppgave 11 Tall 5 – 7	5. årstrinn
Ubesvart	5
4 (Riktig svar)	78
3	7
1	5
2	3

Tabell 26: Prosentvis fordeling. Oppgave 11 Tall 5 – 7. Posisjonssystemet.

Oppgave 12 Tall 5 – 7, som er den samme som oppgave 11 Tall 8 – 10, handler også om å forstå posisjonssystemet.

Oppgave 12

Skriv riktig tall i svarruten.

Fire tideler er det samme som | hundredeler.

Oppgaveeksempel 25. Forståelse av posisjonssystemet.

Oppgave 12 Tall 5 – 7 Oppgave 11 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	22	11	8
40 (Riktig svar)	20	37	46
0,4 eller 0,40	10	21	21
0,04	2	3	5
4	10	14	9
400	8	4	4
2	5	3	3

Tabell 27: Prosentvis fordeling. Oppgave 12 Tall 5 – 7. Posisjonssystemet.

Vi legger merke til den lave frekvensen av riktige svar på denne oppgaven (spesielt på 9. årstrinn), og at mange av disse elevene svarer 0,4 eller 0,40. Dette svaret kan forklares ved at disse elevene vet at fire tideler er det samme som 40 hundredeler, og at dette kan skrives som 0,40 eller 0,4. Disse elevene svarer på et annet spørsmål enn det oppgaven stiller. Merk også at mange elever tror det er like mange hundredeler som tideler.

Oppgave 16

Sju tideler kan skrives som 0,7.

Skriv som desimaltall:

a) Fem tideler **Svar:**

b) Tre hundredeler **Svar:**

c) Elleve tusendeler **Svar:**

d) Elleve tideler **Svar:**

e) To femdelers **Svar:**

f) En tredel (skriv svaret med tre desimalers nøyaktighet). **Svar:**

Oppgaveeksempel 26. Skrive brøk som desimaltall.

I oppgave 16 Tall 8 – 10 ovenfor skal elevene skrive noen brøker som desimaltall. Svarene viser noen problemer som kan klassifiseres som manglende forståelse av posisjonssystemet. De fleste elevene klarer oppgave 16a (72 %, 89 % og 94 % for de tre årstrinnene). Noen få på de to laveste trinnene gir svar som viser at de tolker brøkstreken som komma (6 % og 3 %). Disse elevene skriver for eksempel 5,10 eller 10,5. Sagt på en annen måte bruker de et komma som *skilletegn* mellom teller og nevner. Komma som skilletegn er tidligere diskutert i kapittel 1.1 og kapittel 1.5 i litt andre sammenhenger. Denne misoppfatningen kommer tydeligere fram i noen av de andre deloppgavene. Tabell 28 nedenfor viser denne feilen for de ulike deloppgavene i oppgave 16 Tall 8 – 10:

Oppgave 10 Tall 5 - 7 Oppgave 16 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Oppgave 16a	6	3	0
Oppgave 16b	15	6	3
Oppgave 16c	11	4	2
Oppgave 16d	7	4	1
Oppgave 16e	---	12	13
Oppgave 16f	---	14	12

Tabell 28: Prosentvis fordeling. Oppgave 16 Tall 8 – 10. Elever som tolker brøkstrek som komma.

I kapittel 1.5 viste vi til oppgave 8 Tall 5 – 7 i tabell 12, som vi finner samme misoppfatning for 5. årstrinn. Likeledes i oppgave 17 Tall 5 – 7 og oppgave 18 Tall 8 – 10:

Oppgave 17

Som svar på en matematikkoppgave fikk Fatima $\frac{1}{4}$ og Erik 0,4.

Er det forskjell på svarene?

- ☐ Fatimas tall har størst verdi
- ☐ Eriks tall har størst verdi
- ☐ Tallene har like stor verdi

Oppgaveeksempel 27. Oppgave 17 Tall 5 – 7. Sammenligne brøk og desimaltall.

Oppgave 18

Som svar på en matematikkoppgave fikk Fatima $\frac{1}{3}$ og Erik 0,33.

Er det noen forskjell på svarene?

- ☐ Fatimas tall har størst verdi
- ☐ Eriks tall har størst verdi
- ☐ Tallene har like stor verdi

Oppgaveeksempel 28. Oppgave 18 Tall 8 – 10. Sammenligne brøk og desimaltall.

Noen elever svarer nei (svarene er like store) og grunngir det med at $\frac{1}{4}$ og 0,4 betyr det samme, mens andre mener at det er forskjell med den begrunnelse at $\frac{1}{4}$ er det samme som 1,4.

Riktig svarfrekvens og de mest vanlige feilene for oppgave 16 Tall 8 – 10:

Oppgave 10 Tall 5 - 7 Oppgave 16 Tall 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Oppgave 16b (0,03) (Riktig svar)	22	55	75
Vanlig feil: 0,3	26	16	12
Oppgave 16c (0,011) (Riktig svar)	15	37	47
Vanlig feil: 0,0011	6	18	30
Oppgave 16d (1,1) (Riktig svar)	19	35	41
Vanlig feil: 0,11	42	43	50
Oppgave 16e (0,4) (Riktig svar)	---	12	27
Vanlige feil: 0,2 eller lignende	---	17	14
0,1 eller lignende	---	11	5
0,5 eller lignende	---	9	7
Oppgave 16f (0,333 eller 0,3333....) (Riktig svar)	---	15	38
Vanlige feil: 0,3 eller 0,33	---	21	14
0,1 eller 0,01 e.l.	---	6	3

Tabell 29: Prosentvis fordeling. Riktige svar og vanlige feil.

Når vi studerer feilsvar i flere oppgaver, er det interessant å legge merke til hvordan feiltyper varierer fra oppgave til oppgave. I tabellene 28 og 29 ovenfor ser vi hvordan nye feiltyper, som for eksempel å oppfatte desimalkomma som et skilletegn mellom teller og nevner (eller tolke brøkstrek som komma), blir aktuelle når oppgavene blir mindre kjente for elevene. Mange elever med manglende begrepsforståelse faller i slike sammenhenger tilbake til mer primitive måter å tolke begrepet på.

Legg merke til hvor høy frekvensen er på de mest vanlige feilsvarene i oppgave 16b, c og d og hvor stabil den er for alle årstrinn. Spesielt interessant er det å se hvordan feilsvaret 0,0011 blir mer vanlig jo eldre elevene er. Disse elevene mener trolig at når det er snakk om tusendeler, så er det først to nuller bak komma, og deretter kommer verdien til telleren, her 11, (eller at de starter med å skrive tallet på tusendelsplassen). Tilsvarende feiltenkning kan også være grunnen til at de svarer 0,11 i oppgave 16d.

Vi ser at elevene blir flinkere med årene, men det ser ut til at mange av de elevene som gjør feil, "konvergerer" mot spesielle feiltyper. Dette kan ofte spores tilbake til feil bruk av faktakunnskaper.

1.8 Regning med desimaltall

I dette kapitlet vil vi diskutere utbredte misoppfatninger som viser seg når elevene skal bruke regneoperasjonene på desimaltall. Desimaltall er ikke bare "nye" tall som skal få en mening, men tankemodellene for regneoperasjonene blir også endret når desimaltall og brøk blir introdusert i skolematematikken. Således skyldes noen av de vanskelighetene vi observerer i dette kapitlet, de problemene som er nevnt i kapittel 1.1 – 1.7, mens andre har sin rot i misoppfatninger knyttet til selve regneoperasjonene.

Vi har flere ganger pekt på misoppfatningen om at et desimaltall er et par av hele tall, trolig ligger til grunn for mange av de vanskelighetene som elevene får i sitt arbeid med desimaltall. Nedenfor følger noen konsekvenser av denne måten å tenke på. Svarene på oppgave 10 Tallregning 5 – 7 og oppgave 11 Tallregning 8 – 10 er et eksempel på dette:

Oppgave 10

Adder 0,1 til tallet, og skriv svaret.

a) 4,256 Svar:

b) 3,9 Svar:

c) 6,98 Svar:

d) 5,4 Svar:

e) 7,03 Svar:

Oppgaveeksempel 29. Addisjon av tallpar som feiltype

Oppgave 10 Tallregning 5 – 7 Oppgave 11 Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Oppgave a: 4,356 (Riktig svar) Feiltype: 4,257	29 41	65 20	84 5
Oppgave b: 4 eller 4,0 (Riktig svar) Feiltype: 3,10	50 24	77 12	91 3
Oppgave c: 7,08 (Riktig svar) Feiltype: 6,99	19 47	55 27	73 12
Oppgave d: 5,5 eller 5,50 (Riktig svar)	71 ---	88 ---	93 ---
Oppgave e: 7,13 (Riktig svar) Feiltype: 7,04	29 40	64 24	84 9

Tabell 30: Prosentvis fordeling. Riktige svar og addisjon av tallpar som feiltype.

Tabell 30 viser frekvensene for riktige svar sammen med frekvensene for de feilene som kommer ved å addere 1 til det elevene oppfatter som et helt tall til høyre for komma. Disse elevene oppfatter desimaltallene som par av hele tall.

Vi ser at i slike oppgaver, der mange elever bruker den vanlige algoritmen for addisjon av desimaltall, er denne misoppfatningen mest utbredt i oppgave c der heltallsdelen endrer seg, og i oppgave e der null er plassholder.

I oppgave 1a Tallregning 5 – 7 nedenfor finner vi de tilsvarende tallene. I de tre års-trinnene adderer henholdsvis 39 %, 18 % og 6 % tallpar. Oppgave 12 Tallregning 5 – 7 nedenfor, har en form for addisjon enn oppgave 1a. I denne oppgaven adderer 38 %, 15 % og 10 % tallpar.

Oppgave 1

Regn ut.

a) $5,1 + 0,46 =$

b) $37 - 0,16 =$

c) $4 \cdot 2,4 =$

d) $0,12 : 2 =$

Oppgaveeksempel 30. Regning med desimaltall.

Oppgave 12

Et tall har en verdi som er 0,01 større enn 53,724.

Skriv dette tallet.

Svar:

Oppgaveeksempel 31. 0,01 større enn 53,724

Skrive svar på regneuttrykk:

I en rekke oppgaver i Tallregning blir elevene bedt om å skrive svaret på oppstilte regneuttrykk. I det følgende vil vi diskutere noen av disse.

I oppgave 30 (Oppgave 1 Tallregning 5 – 7) har vi pekt på et problem med oppgave a. Tabellene 31 – 33 viser frekvensene for riktig svar og de vanligste feilsvarene i de andre deloppgavene:

Oppgave 1b Tallregning 5 – 7 Oppgave 1b Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	18	8	3
36,84 (Riktig svar)	24	56	82
0,21 eller 2,1 eller 21	22	11	2
36,16	9	7	3
Andre svar	27	18	10

Tabell 31: Prosentvis fordeling. Oppgave 1b.

Mange elever på 5. årstrinn og 7. årstrinn svarer 0,21 eller 2,1 eller 21. Dette feilsvaret kommer når elevene subtraherer 16 fra 37, og deretter gir svaret i form av et desimaltall.

Oppgave 1c Tallregning 5 – 7 Oppgave 1c Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	9	5	3
9,6 (Riktig svar)	20	66	78
8,16	13	7	5
96 (Ignorerer komma)	3	4	3
8,4	17	2	2
8,8	3	2	1
6,4 (Adderer)	2	1	0
Andre svar	23	13	8

Tabell 32: Prosentvis fordeling. Oppgave 1c.

Svaret 8,16 får elevene ved å multiplisere både 2-tallet og 4-tallet med 4. Elevene setter så inn komma igjen (som et skille tegn) mellom de to svarene. Det er rimelig å anta at mange av de elevene som gjør dette, oppfatter desimaltall som par av hele tall som samme måte som i addisjonseksemplene ovenfor. Svaret 8,4 får elevene når de kun multipliserer heltallsdelen i tallet.

Oppgave 1d Tallregning 5 – 7 Oppgave 1d Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	26	10	10
0,06 (Riktig svar)	8	46	51
0,6	35	27	30
6	16	4	2
0,24 (Multipliserer)	1	4	1
Andre svar	14	9	6

Tabell 33: Prosentvis fordeling. Oppgave 1d.

I tabell 33 spiller også misoppfatningen om at desimaltall er et par av hele tall, en viktig rolle for svaret 0,6.

Oppgave 2 Tallregning 8 – 10 sikter mot å analysere hvordan forståelse av multiplikasjon og divisjon til en viss grad er avhengig av de tallene som er involvert (se også oppgave 4a, b og c Tallregning 5 – 7 som er en del av denne oppgaven).

Oppgave 2

Regn ut.

a) $6 : 3 =$

b) $6 \cdot 0,5 =$

c) $3 : 6 =$

d) $3 : 0,5 =$

e) $0,4 : 5 =$

Oppgaveeksempel 32. Forståelse av regneoperasjoner avhengig av tallene

De fleste elevene kan utføre divisjonen i oppgave 2a. En del elever på 5. årstrinn skrev NEI i utprøvingen (hvis de mente det ikke fantes noe svar).

Oppgave 4b Tallregning 5 – 7 Oppgave 2b Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
3 eller 3,0 (Riktig svar)	15	54	68
0,3 eller 0,30 eller lignende	8	6	3
30,0 eller lignende	5	6	3
12 eller 1,2 eller 0,12	1	4	9
NEI	33	11	6

Tabell 34: Prosentvis fordeling. Multiplikasjon..

Feilsvarene 0,3 eller 0,30 kan igjen tolkes som at enkelte elever oppfatter desimaltall som par av hele tall. En vanlig misoppfatning er at multiplikasjon gjør svaret større og divisjon mindre. Svaret 30 kan komme som et resultat av denne feiltenkningen.

En litt uventet feiltype finner vi hos elever som svarer 12 eller 1,2 eller 0,12. Vi legger også merke til at denne feilen blir mer vanlig jo eldre elevene blir. Det er vanskelig å forklare disse tallene direkte med utgangspunkt i tallene som er gitt i oppgaven. Trolig har elevene multiplisert 6 med 2, og så satt inn et komma. Siden dette hender oftere hos elever på 9. årstrinn enn hos de yngre elevene, kan vi fundere på om de har blandet med at det å dividere med 0,5, er likeverdig med å multiplisere med 2.

Oppgave 4c Tallregning 5 – 7 Oppgave 2c Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
0,5 eller lignende (Riktig svar)	11	42	68
2	22	20	6
NEI	44	26	12

Tabell 35: Prosentvis fordeling. Divisjon.

De to feilsvarene som er vist i tabell 35, illustrerer to vanlige misoppfatninger. De som har svart 2, har trolig dividert 6 med 3. Det er en vanlig misoppfatning at "du kan ikke dividere et lite tall med et stort". Derfor snur noen elever om på divisjonen. Vi sier at de reverserer. På en måte tror de at rekkefølgen på tallene i divisjon ikke spiller noen rolle. Andre elever svarer nei på bakgrunn av den samme feiltenkningen.

Oppgave 2d Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
6 (Riktig svar)	21	51
0,6	6	5
NEI	34	15
1,5 (Multipliserer)	7	10

Tabell 36: Prosentvis fordeling. Oppgave 2d Tallregning 8 – 10.

Bak svaret 0,6 i oppgave 2d kan det ligge en misoppfatning om at divisjon gjør svaret mindre. Elevene dividerer (eller multipliserer med 2) og velger 0,6 i stedet for 6 fordi 6 "ser" for stort ut. Svaret nei kan komme av at elevene har liten praktisk erfaring med å dele med et tall mindre enn 1. Se mer om dette nedenfor.

Oppgave 2e Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
6	25	39
0,08 (Riktig svar)	5	5
NEI	43	25

Tabell 37: Prosentvis fordeling. Oppgave 2e Tallregning 8 – 10.

Opprinnelig hadde oppgaven setningen "Skriv NEI om du tror det ikke er noe svar" med for å hindre elevene å gi "ville" svar. De ble derfor oppfordret til å vurdere om regnestykket er mulig. På den andre siden kan dette ha ført til at en del elever svarer nei fordi de ikke makter å finne et svar. Den høye frekvensen av nei-svar på oppgave 2e kan henge sammen med dette. I den digitale versjonen av oppgaven får elevene kun muligheten til å skrive inn et tallsvar.

Regneuttrykk som passer til oppgaver:

I *Tallregning* er det to typer av oppgaver de en tekstoppgave er gitt. Til disse tekstoppgavene skal en i den ene typen velge et regneuttrykk blant flere gitte uttrykk. I den andre typen skal elevene skrive et regneuttrykk som en skal bruke til å finne et nøyaktig svar på den gitte tekstoppgaven. Svarene på oppgavene skal ikke regnes ut.

Oppgaver av denne typen gir god informasjon om hvordan elevene forstår regneoperasjonene. Den første typen finner vi oppgave 4, 5, 6, 7 og 8 Tallregning 8 – 10 som vi gjengir nedenfor:

Oppgave 4

For 7 lodd må du betale 35 kr. Hvor mye koster ett lodd?

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som gir riktig svar på spørsmålet.

- ☐ $35 \cdot 7$
- ☐ $35 : 7$
- ☐ $7 : 35$
- ☐ $7 \cdot 35$
- ☐ $35 - 7$
- ☐ $7 + 35$

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker. Så fikk hun 4 nye bøker. Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk.

- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $4 \cdot 3$
- ☒ $4 + 3$
- ☐ $4 - 3$
- ☐ $3 : 4$
- ☒ $3 + 4$

Oppgaveeksempel 33. Valg av regneuttrykk til tekstoppgaver.

Oppgave 5

Nora har 25 halsbånd. De veier til sammen 3 kg. Hvert halsbånd veier like mye. Hvor mye veier ett halsbånd?

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som gir riktig svar på spørsmålet.

- ☐ $25 \cdot 3$
- ☐ $25 : 3$
- ☐ $3 : 25$
- ☐ $3 \cdot 25$
- ☐ $25 - 3$
- ☐ $3 + 25$

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker. Så fikk hun 4 nye bøker. Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk.

- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $4 \cdot 3$
- ☒ $4 + 3$
- ☐ $4 - 3$
- ☐ $3 : 4$
- ☒ $3 + 4$

Oppgaveeksempel 34. Valg av regneuttrykk til tekstoppgaver.

Oppgave 6

1 kg pølser koster 49,50 kr. Per kjøper 1,7 kg. Hvor mye betaler Per?

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som gir riktig svar på spørsmålet.

- ☐ $49,50 \cdot 1,7$
- ☐ $49,50 : 1,7$
- ☐ $1,7 : 49,50$
- ☐ $1,7 \cdot 49,50$
- ☐ $49,50 - 1,7$

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker. Så fikk hun 4 nye bøker. Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk.

- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $4 \cdot 3$
- ☒ $4 + 3$
- ☐ $4 - 3$
- ☐ $3 : 4$
- ☒ $3 + 4$

Oppgaveeksempel 35. Oppgave 6 Tallregning 8 – 10. Valgt av regneuttrykk til tekstoppgaver.

Oppgave 7

1 kg kjøttdeig koster 69 kr. Kari kjøper 0,6 kg. Hvor mye betaler Kari?

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som gir riktig svar på spørsmålet.

- ☐ $69 \cdot 0,6$
- ☐ $69 : 0,6$
- ☐ $0,6 : 69$
- ☐ $0,6 \cdot 69$
- ☐ $69 - 0,6$

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker. Så fikk hun 4 nye bøker. Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk.

- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $4 \cdot 3$
- ☒ $4 + 3$
- ☐ $4 - 3$
- ☐ $3 : 4$
- ☒ $3 + 4$

Oppgaveeksempel 36. Oppgave 7 Tallregning 8 – 10. Valgt av regneuttrykk til tekstoppgaver.

Oppgave 8

Marit har 6 kg kjeks som hun skal legge i bokser. Hver boks skal inneholde 0,75 kg kjeks. Hvor mange bokser trenger hun?

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som gir riktig svar på spørsmålet.

- ☐ $6 \cdot 0,75$
- ☐ $6 : 0,75$
- ☐ $0,75 : 6$
- ☐ $0,75 \cdot 6$
- ☐ $6 - 0,75$
- ☐ $6 + 0,75$

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker. Så fikk hun 4 nye bøker. Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk.

- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $4 \cdot 3$
- ☒ $4 + 3$
- ☐ $4 - 3$
- ☐ $3 : 4$
- ☒ $3 + 4$

Oppgaveeksempel 37. Oppgave 8 Tallregning 8 – 10. Valgt av regneuttrykk til tekstoppgaver.

Oppgave 4 er en divisjonsoppgave der vi kan bruke både delingsdivisjon og målingsdivisjon som tankemodell. De vanligste svarene er gitt i tabell 38 nedenfor:

Oppgave 2 Tallregning 5 – 7 Oppgave 4 Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
35 : 7 (Riktig svar)	27	59	75
7 : 35	5	4	2
35 – 7	9	2	0
Både 35 : 7 og 7 : 35	25	24	10
Både 35 x 7 og 7 x 35	7	6	9

Tabell 38: Prosentvis fordeling.

Vi legger merke til at de aller fleste elevene på alle årstrinnene oppfatter at de her må bruke divisjon for å finne det rette svaret. Det er litt overraskende at så mange tror at de vil få riktig svar på oppgaven både med 35:7 og 7:35. De tror altså at divisjon er kommutativ på samme måte som addisjon og multiplikasjon. Vi legger også merke til at det er om lag like mange elever på alle årstrinn som tror at vi må multiplisere tallene. Det er et fåtall som reverserer regneoperasjonen i denne oppgaven i motsetning til det vi finner i oppgaver nedenfor.

I oppgave 5 er det mest naturlig at vi bruker delingsdivisjon som tankemodell. I denne oppgaven vil det riktige svaret kreve at vi dividerer et lite tall med et stort. De vanligste svarene på denne oppgaven er vist i tabell 39 nedenfor:

Oppgave 3 Tallregning 5 – 7 Oppgave 5 Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
3:25 (Riktig svar)	10	13	28
25:3 (Reverserer)	22	46	53
En av 3 x 25 eller 25 x 3	4	2	2
Både 25 : 3 og 3 : 25	23	23	11
Både 25 x 3 eller 3 x 25	6	6	4

Tabell 39: Prosentvis fordeling.

Sammenligner vi med tabell 38, ser vi en dramatisk nedgang i antall riktige svar. Det er tydelig at når en som i denne oppgaven får "lite tall delt på stort tall", vil langt flere reversere enn i oppgave 4. Vi legger merke til at dette er svært vanlig på 9. årstrinn. Av de elevene som reverserer i denne oppgaven, har de fleste gitt riktig svar på oppgave 4 (78 %, 94 % og 86 % for de respektive årstrinnene). Dette viser altså at den oppfatningen at "en ikke kan dele et lite tall med et stort", er en misoppfatning som vil kunne hindre disse elevene i å få et riktig svar med bruk av kalkulator i slike situasjoner. Vi vil påstå at de ikke har nok erfaring til å ha utviklet en fullstendig tankemodell for divisjon. Skal det skje, må det tas et "oppgjør" med denne misoppfatningen.

På samme måte som i oppgave 4 er det mange elever som tror at divisjonen av kommutativ. Det viser seg at de fleste av disse gjorde det samme i begge oppgavene. "Multiplikasjonseleven" er også stabile gjennom disse oppgavene.

Det er naturlig å diskutere oppgavene 6 og 7 i sammenheng. Begge er oppgaver innenfor området rater. I den første oppgaven er multiplikatoren et tall større enn 1, i den andre mindre enn 1. Det er flere svar i disse oppgavene som kan klassifiseres som riktige. De riktige svarene sammen med de vanligste feilsvarene finner vi i tabellene 40 og 41 nedenfor:

Oppgave 6 Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Både $49,50 \times 1,7$ og $1,7 \times 49,50$ (Riktig svar)	44	61
$49,50 \times 1,7$ (Riktig svar)	17	18
$1,7 \times 49,50$ (Riktig svar)	3	4
$49,50 : 1,7$	15	10
$1,7 : 49,50$	3	3
$49,50 - 1,7$	3	1
Både $49,50 : 1,7$ og $1,7 : 49,50$	8	2

Tabell 40: Prosentvis fordeling. Oppgave 6 Tallregning 8 – 10.

Flertallet av elevene velger multiplikasjon som svar i denne oppgaven, men det er likevel en firedel av elevene på 7. årstrinn og en seksdel på 9. årstrinn som tror de må bruke divisjon. 85 % av de elevene på 7. årstrinn og 83 % på 9. årstrinn som velger divisjon i oppgave 6, gjør det også i oppgave 7. Altså viser svarene deres høy stabilitet med hensyn til denne feilen.

I oppgave 7 er det likevel mange av disse elevene som har valgt multiplikasjon i oppgave 6, som nå tror at regneoperasjonen i denne oppgaven må være divisjon. 55 % av elevene på 7. årstrinn som svarer riktig i oppgave 6, dividerer i oppgave 7. Tilsvarende tall for 9. årstrinn er 24 %. Det er altså rimelig å hevde at mange elever lar seg påvirke av misoppfatningen at multiplikasjon gjør svaret større og divisjon svaret mindre i løsningen av oppgave 7. I disse to oppgavene er det noen færre som velger begge divisjonsuttrykkene enn i de to foregående oppgavene.

Oppgave 7 Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Både $69 \times 0,6$ og $0,6 \times 69$ (Riktig svar)	28	46
$69 \times 0,6$ (Riktig svar)	7	11
$0,6 \times 69$ (Riktig svar)	3	4
$69 : 0,6$	30	25
$0,6 : 69$	4	2
$69 - 0,6$	6	1
Både $69 : 0,6$ og $0,6 : 69$	15	5

Tabell 41: Prosentvis fordeling. Oppgave 7 Tallregning 8 – 10.

Den siste oppgaven i denne samlingen er en divisjonsoppgave der divisoren er mindre enn 1. Dette krever at en har en tankemodell for målingsdivisjon. I realiteten er dette en gjentatt subtraksjon. En har 6 kg og tar så vekk 0,75 kg som vi legger i en boks, så nye 0,75 kg i neste boks, og så videre til vi ikke har flere kaker igjen. Studier av unge elever som skal lære multiplikasjon, har vist at denne tankemodellen er like enkel å få tak i som modellen for delingsdivisjon der en har gitt tallet på deler. Vanskeligheten i denne oppgaven er at målet på delen er gitt med et desimaltall. Oppgave 8 er bare med i 9. årstrinn. Tabell 42 viser svarfordelingen for riktig svar og for de vanligste feilsvarene.

Oppgave 8 Tallregning 8 – 10	9. årstrinn
$6 : 0,75$ (Riktig svar)	41
$6 \times 0,75$	10
$0,75 : 6$ (Reverserer)	6
$0,75 \times 5$	7
Både $6 : 0,75$ og $0,75 : 6$	3
Både $6 \times 0,75$ og $0,75 \times 6$	26

Tabell 42: Prosentvis fordeling. Oppgave 8 Tallregning 8 – 10.

Vi legger merke til at andelen riktige svar er lav, og at mer enn 40 % av elevene tror at de må bruke multiplikasjon i denne oppgaven. Grunnen til dette kan blant annet være at elevene har

oppfattet grupperingen av 0,75 kg og tolker dette til å resultere i en gjentatt addisjon seks ganger. Oppgaven viser at det bør arbeides grundigere med å bygge opp tankemodeller som passer til situasjoner der vi trenger målingsdivisjon.

I oppgavene nedenfor skal elevene selv skrive regneuttrykket som passer til en matematisk tekst. I den analysen vi gjør av disse oppgavene, vil vi sammenligne med oppgavene ovenfor.

Oppgave 13

Skriv et regneuttrykk som gir riktig svar til hvert spørsmål.

Du skal IKKE regne ut svarene. Dersom du skal bruke multiplikasjon eller divisjon så er tegnet for multiplikasjon * og for divisjon / eller :

- a) Prisen for 1 kg pærer er 12 kr. Hvor mye koster 2,6 kg?

Regneuttrykk:

- b) Rektor kjøper nye linjaler. Hver linjal koster 12 kr.
Hvor mange linjaler får rektor for 84 kr?

Regneuttrykk:

- c) "Smågodt" koster 15 kr per hg. Tore kjøper smågodt for 6 kr.
Hvor mange hektogram (hg) kjøper han?

Regneuttrykk:

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker.
Så fikk hun 4 nye bøker.
Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk: $3 + 4$

Oppgaveeksempel 38. Oppgave 13 Tallregning 5 – 7. Skrive regneuttrykk.

Oppgave 14

Skriv et regneuttrykk som gir riktig svar til hvert spørsmål.

Du skal IKKE regne ut svarene. Dersom du skal bruke multiplikasjon eller divisjon så er tegnet for multiplikasjon * og for divisjon / eller :

- a) En lærer har 22 m bokbind. Læreren deler bokbindet likt mellom 25 elever.
Hvor mange meter bokbind får hver elev?

Regneuttrykk:

- b) Egil kjøpte poteter og betalte 36 kr. Potetene kostet 8 kr per kg.
Hvor mange kilogram poteter kjøpte Egil?

Regneuttrykk:

- c) Jon svømte 200 m. Det var 4 ganger så langt som Petter svømte.
Hvor langt svømte Petter?

Regneuttrykk:

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker.
Så fikk hun 4 nye bøker.
Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk: $3 + 4$

Oppgaveeksempel 39. Oppgave 14 Tallregning 5 – 7. Skrive regneuttrykk.

Oppgave 21

Skriv et regneuttrykk som gir riktig svar til hvert spørsmål.

Du skal IKKE regne ut svarene. Dersom du skal bruke multiplikasjon eller divisjon så er tegnet for multiplikasjon * og for divisjon / eller :

- a) Prisen for 1 kg pærer er 12 kr. Hvor mye koster 2,6 kg?

Regneuttrykk:

- b) Rektor kjøper nye linjaler. Hver linjal koster 12 kr.
Hvor mange linjaler får rektor for 84 kr?

Regneuttrykk:

- c) 1 kg koteletter koster 69,50 kr. Hvor mye koster 0,76 kg?

Regneuttrykk:

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker.
Så fikk hun 4 nye bøker.
Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk: $3 + 4$

Oppgaveeksempel 40. Oppgave 21 Tallregning 8 – 10. Skrive regneuttrykk.

Oppgave 22

Skriv et regneuttrykk som gir riktig svar til hvert spørsmål.

Du skal IKKE regne ut svarene. Dersom du skal bruke multiplikasjon eller divisjon så er tegnet for multiplikasjon * og for divisjon / eller :

- a) Fem like flasker solbærsaft inneholder i alt 6,25 liter.
Hvor mye saft inneholder hver flaske?

Regneuttrykk:

- b) Anne kjøper bananer i en butikk. Prisen er 13,50 kr per kg.
Hvor mye kan Anne kjøpe for 10,50 kr?

Regneuttrykk:

Eksempel.

Wenche hadde 3 bøker.
Så fikk hun 4 nye bøker.
Hvor mange bøker hadde hun da til sammen?

Regneuttrykk: $3 + 4$

Oppgaveeksempel 41. Oppgave 22 Tallregning 8 – 10. Skrive regneuttrykk.

Oppgavene 13a, 13b, 22a og 22b ovenfor blir diskutert sammen, men utgangspunkt i resultatene som er presentert i tabell 42 og 43.

Til en viss grad kan oppgave 13a sammenlignes med oppgave 6 i oppgaveeksempel 35 ovenfor, siden begge oppgavene handler om multiplikasjon og konteksten er rater. En viktig forskjell er at multiplikatoren oppgave 13a er et helt tall, mens den i oppgave 6 er 1,7. Færre elever velger andre regneoperasjoner enn multiplikasjon i 13a enn i oppgave 6. Grunnen til dette kan være at de ikke kan bli "fristet" av andre forslag slik som i oppgave 6, eller at multiplikator, som er et helt tall, har hjulpet dem i valget.

Vi legger merke til at flertallet av elevene som får riktig svar, starter med multiplikatoren. Dette var omvendt i oppgave 6 hos de elever som bare satte opp et av multiplikasjonsalternativene.

Oppgave 13a Tallregning 5 – 7 Oppgave 21a Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
$2,6 \cdot 12$ eventuelt gjentatt addisjon (Riktig svar)	8	22	19
$12 \cdot 2,6$ eventuelt gjentatt addisjon (Riktig svar)	16	40	62
Riktig tallsvar, for eksempel 31,2	1	3	3
Addisjon	7	3	1
Divisjon, $2,6 : 12$ eller $12:2,6$	3	8	4

Tabell 43: Prosentvis fordeling. Oppgave 13a Tallregning 5 – 7 og Oppgave 21a Tallregning 8 – 10

Oppgave 13b Tallregning 5 – 7 Oppgave 21b Tallregning 8 – 10	5. årstrinn	7. årstrinn	9. årstrinn
$84 : 12$ (Riktig svar)	20	52	76
Riktig tallsvar 7	5	6	3
$12 \cdot 84$ eller $84 \cdot 12$	13	14	8
$12 : 84$	6	6	3

Tabell 44: Prosentvis fordeling. Oppgave 13b Tallregning 5 – 7 og Oppgave 21b Tallregning 8 – 10

For å løse oppgave 13b trenger vi å referere til en tankemodell for målingsdivisjon der divisoren ved denne anledningen er et helt tall. I denne situasjonen er det relativt lett å "oversette" denne modellen til delingsdivisjon, "en deler kostnaden på hver linjal". Dermed ligner denne oppgaven litt på oppgave 6 Tallregning 8 – 10.

Prosentandelen av riktige svar er omtrent den samme for de to oppgavene, og det er noen flere som velger multiplikasjon i denne oppgaven enn i oppgave 6. På den andre siden får vi ikke svar som indikerer at elevene oppfatter at divisjonen er kommutativ slik som i oppgave 6. Dette er naturlig siden elevene nå er bedt om å sette opp et regneuttrykk.

Oppgave 13c Tallregning 5 – 7	5. årstrinn
$6 : 15$ (Riktig svar)	1
Tallsvar som ikke er riktige	10
$15 - 6$	9
$15 : 6$	15

Tabell 45: Prosentvis fordeling. Oppgave 13c Tallregning 5 – 7.

Oppgave 13c har vært for vanskelig for 5. årstrinn. 45 % av elevene har ikke svart på oppgaven. Det er flere som ikke svarer på oppgave 13 enn på de andre oppgavene.

I struktur er oppgaven lik oppgave 5 Tallregning 8 – 10, som viste seg å være vanskelig for alle årstrinnene. Oppgave 13c vil trolig passe bra for 9. årstrinn, spesielt med tanke på å undersøke om vi får like høye prosenttall for reversering som når svaralternativene er gitt som i oppgave 5.

Oppgave 14a Tallregning 5 – 7	5. årstrinn
$22 : 25$ (Riktig svar)	31
Tallsvar som ikke er riktige	8
$25 : 22$ (Reverserer)	10

Tabell 46: Prosentvis fordeling. Oppgave 14a Tallregning 5 – 7.

I oppgave 14a er det også et tall med liten verdi delt på et tall med større verdi. Men i motsetning til i oppgave 13c er det her tale om en delingsdivisjon, noe som kan forklare den høyere løsnings-frekvensen for denne oppgaven. Vi finner ikke den samme tendensen til å velge multiplikasjon som i oppgave 5 Tallregning 8 – 10 (tabell 39), og tendensen til reversering er ikke så utbredt.

Oppgave 14b Tallregning 5 – 7	5. årstrinn
36 : 8 (Riktig svar)	17
Tallsvar som ikke er riktige	11
8 · 36	15
8 : 36 (Reverserer)	3

Tabell 47: Prosentvis fordeling. Oppgave 14b Tallregning 5 – 7.

Oppgave 14b er igjen en oppgave som krever erfaring med målingsdivisjon som tankemodell for å kunne skrive et regneuttrykk. Det er trolig grunnen til den lavere løsningsfrekvensen enn i oppgave 14a. Som pekt på i analysen av oppgave 7 Tallregning 8 – 10 kan vi oppfatte målingsdivisjon som gjentatt subtraksjon (her av 8) eller også gjentatt addisjon av 8 – så lenge du har noe å ta av ($8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 36$). Dette kan forklare det relativt høye prosenttallet for multiplikasjon i denne oppgaven.

Oppgave 14c Tallregning 5 – 7	5. årstrinn
200 : 4 (Riktig svar)	25
Riktig tallsvar 50	6
Tallsvar som ikke er riktige	10
200 · 4 eller 4 · 200	14
4 : 200 (Reverserer)	1

Tabell 48: Prosentvis fordeling. Oppgave 14c Tallregning 5 – 7.

Spørsmålet i oppgave 14c er vanskelig på flere måter. Formuleringen ”4 ganger så langt som ...” gir for mange et stikkord for å velge multiplikasjon. I tillegg til dette er sammenligningen vi spør etter, gitt ved et forholdstall. Som vi ser, velger relativt mange elever multiplikasjon, men sammenlignet med de andre oppgavene er løsningsfrekvensen likevel høy på denne oppgaven.

Oppgave 21c Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	27	10
69,50 · 0,76 eller 0,76 · 69,50 (Riktig svar)	27	47
Tallsvar mellom 50 og 56 (Overslag)	1	2
69,50 : 0,76	31	34

Tabell 49: Prosentvis fordeling. Oppgave 21c Tallregning 8 – 10.

Oppgave 21c er i struktur lik oppgave 7 Tallregning 8 – 10. Den eneste forskjellen er antallet desimaler, noe som kan gjøre oppgave 21c litt mer komplisert. Svarfordelingen i tabell 49 viser at misoppfatningen om at divisjon gjør svaret mindre, er minst like aktuell i denne oppgaven som i oppgave 7. På samme måte som for de andre oppgavene der elevene tror de må dividere, er det ikke aktuelt å gi svar som indikerer at de tror divisjonen er kommutativ, når de selv skal skrive regneuttrykket.

Oppgave 22a Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	21	7
6,25 : 5 (Riktig svar)	56	76
5 · 6,25 eller 6,25 · 5	7	3
5 : 6,25	7	6

Tabell 50: Prosentvis fordeling. Oppgave 22a Tallregning 8 – 10.

Oppgave 22a handler om delingsdivisjon der et tall med stor verdi blir delt på et tall med mindre verdi. Oppgaven viser seg å være enkel å løse for elevene sammenlignet med målingsdivisjons-oppgavene og oppgavene der elevene må dele et tall med liten verdi med et tall med større verdi. Dette styrker vår påstand om at disse misoppfatningene har stor påvirkning på valget av regne-operasjon.

Oppgave 22b Tallregning 8 – 10	7. årstrinn	9. årstrinn
Ubesvart	35	17
10,50 : 13,50 Riktig svar)	7	20
13,50 – 10,50 eller 10,50 – 13,50	8	7
13,50 : 10,50 (Reverserer)	34	42

Tabell 51: Prosentvis fordeling. Oppgave 22b Tallregning 8 – 10.

Oppgave 22b skulle være en velkjent kontekst for de fleste elevene. Likevel har den en overraskende lav løsningsfrekvens. De aller fleste av elevene som svarer på denne oppgaven, velger divisjon. Dette kan forklares med at svaret må bli mindre enn 1 kg. Igjen er det misoppfatningen om at du må dele tallet med størst verdi med tallet som har minst verdi, som virker forstyrrende. En annen grunn til den høye svarprosenten for 13,50 : 10, 50 kan være at elevene tror at ettersom 13,50 kommer først i teksten, må det være dette tallet vi skal starte med i divisjonen. Slike erfaringer har elevene med seg fra innføringen av divisjon i skolen, der en i lang tid har hatt denne formen på de aller fleste tekst-oppgaver om divisjon. Vi legger merke til at det er flere som velger subtraksjon enn multiplikasjon i denne oppgaven.

Del 2 Undervisningsaktiviteter

I denne delen vil vi presentere en samling av undervisningsaktiviteter som har som siktemål å fokusere på noen av de viktigste *misoppfatningene og vanskene som må overvinnes på veien fram mot en solid forståelse av tallbegrepet*. Disse vanskene har stått sentralt i første del av dette ressursheftet.

Elevene møter en kritisk fase når tallområdet blir utvidet fra hele positive tall til også å omfatte desimaltall og brøker. Undervisningsaktivitetene vil i første rekke være rettet mot denne fasen i utviklingen. Forståelsen av de fire regningsartene vil i denne fasen være nær knyttet til det utvidede tallbegrepet. Den største endringen gjelder forståelsen av multiplikasjon og divisjon. Her vil det være avgjørende at elevene vinner tilstrekkelig mange og varierte erfaringer. Erfaringene kan være med på å bygge opp en utvidet *tankemodell* for disse regneartene.

De aller fleste aktivitetene kan brukes på mange ulike måter i undervisningen. Siden diskusjoner og refleksjoner står sentralt i læringen, vil vi først ta opp noen generelle problemstillinger om klasseromsdiskusjoner. Deretter tar vi for oss en del aktiviteter som er rettet mot problemene og misoppfatningene som er drøftet i første del.

Vanlige misoppfatninger hos elevene innenfor *Tall* og *Tallregning*:

- Plassverdisystemet
- Desimaltallnotasjonen - desimaltall som par av hele tall
- Det korteste desimaltallet har minst verdi
- Bruk av komma som *skilletegn* mellom teller og nevner
- Multiplikasjon gjør svaret større og divisjon mindre
- Du kan ikke dividere et tall med liten verdi med et tall som har større verdi - reversering

Kapittel 2 Diskusjoner i klasserommet

Det synes å være enighet om at dersom vi ønsker at elevene skal knytte forståelse til matematikk, slik at faget får mening, må elevene få anledning til å diskutere og omformulere egne ideer. Kerry (1981) sier dette slik:

Children learn by talking and listening and should be given more opportunities to talk. Children talking in small groups are taking more active part in all their work. Tentative and inexplicit talk in small groups is the bridge from partial understanding to confident meaningful statements. Present talk in future thinking.

Undervisning med en lærerdominert stil og lærebøker som legger vekt på individuelt arbeid, vil holde både mengden og kvaliteten av diskusjoner på et lavt nivå. Ofte vil lærere assosiere elevdiskusjoner med høyt støynivå og mangel på disiplin.

Det å be barn presentere arbeidet sitt eller forklare ideene sine til klassen krever omtanke. Det er viktig å prøve å skape en atmosfære der feil og uklart uttrykte ideer er velkomne, og at disse ideene blir diskutert i stedet for å bli kritisert og latterliggjort. Forsøk på å oppnå denne atmosfæren kan ta mange praktiske former. Læreren kan for eksempel

- samle noen anonyme forslag fra elever, skrive dem på tavla og diskutere dem
- spørre en representant fra hver gruppe om å legge fram et syn som gruppen er enig om. Løsningene blir dermed assosiert med gruppen og ikke med den enkelte elev.

Mange matematikklærere har få erfaringer med å bygge opp undervisningen rundt diskusjoner i matematikk. De er derfor usikre på hvordan de skal organisere disse. Muntlig arbeid er ofte avgrenset til kortere perioder med spørsmål fra læreren fulgt av korte svar fra elevene. Elevene får liten anledning til å gjøre rede for og utvikle egne ideer, og når slike anledninger oppstår, er elevene ofte mer opptatt av kvaliteten på presentasjonen sin enn innholdet i bidraget. Nedenfor blir det pekt på noen elementer ved det å bruke diskusjon i smågrupper eller i hele klasser.

Etter at et problem eller tema har blitt introdusert, blir elevene vanligvis bedt om å arbeide i grupper til de kan enes om et svar. Ved starten av et nytt tema tar det oftest tid å få tak i den sentrale informasjonen og ideene. Gruppediskusjonene kan da være fragmentariske, idet en bruker stikkord, halve setninger, spørsmål osv. Dette er det utforskende stadiet i diskusjonen. Selv om argumentasjonen kan synes usammenhengende og dårlig uttrykt når gruppene får arbeide uforstyrret, er det her organiseringen og omformuleringen av ideer oppstår.

I løpet av slike diskusjoner er det ofte vanskelig for læreren å motstå trangen til å blande seg inn for å påpeke at svaret er riktig eller feil. Men i denne fasen er det viktig å gi elevene tid. Flere undervisningseksperimenter har vist at klasser gjør det klart bedre på prøver når læreren ikke for tidlig prøver å "avslutte" diskusjonene med å peke på riktige svaret eller på den riktige måten for elevene å tenke på. Vi vil understreke at det er vanskelig for læreren å finne det riktige tidspunktet for å bryte inn og å vite hvor ofte slike avbrudd bør komme.

Lærerrollen i klassediskusjoner skiller seg fra den vanlige rollen i klasserommet. I diskusjonene kan læreren arbeide slik oppstillingen nedenfor viser.

1 Være en ordstyrer eller tilrettelegger som

- styrer diskusjonene og lar alle få anledning til å delta,
- ikke avbryter eller tillater andre å avbryte den som snakker,
- verdsetter alle meninger og ikke trekker fram sitt eget syn,
- hjelper elevene til å klarlegge sine egne ideer.

"Hør hva Anne sier." "Takk Helge! Nå, hva mener du, Marit?" "Hvordan reagerer du på det, Åse?" "Er det andre ideer her?" "Kan du gjenta det du sa, Petter?"

2 Noen ganger være en "utspørter" eller "provokatør" som

- introduserer en ny ide når diskusjonen er laber,
- følger opp et synspunkt,
- spiller "djevelens advokat",
- fokuserer på et viktig begrep,
- unngår å spørre multiple, ledende, retoriske eller lukkede spørsmål som bare trenger enkelte ord til svar.

"Hva ville skje dersom ...?" "Hva kan du si om svaret, når du multipliserer to tall?"

3 Ikke være en dommer eller "vurderer" som

- Vurderer hvert svar med "ja", "godt" eller "interessant" eller lignende. Slikt hindrer ofte andre fra å komme fram med alternative ideer og oppfordrer til en "ytre akseptabel" framførelse i stedet for en utforskende samtale.

Læreren bør unngå uttrykk som "Dette var ikke nøyaktig det jeg hadde i tankene." "Du er nesten framme." "Ja, det er riktig." "Nei, du skulle ha sagt ..." "Kan noen se hva som er feil med det Gunnar sier?"

Denne listen er ikke ment å vise at det alltid er upassende å evaluere et elevsvar. Vi prøver bare å peke på at dersom læreren ofte opererer på denne måten, vil diskusjonen endre karakter, enten til en periode der læreren blir den dominerende parten, eller til en periode med "spørsmålgjetting", der hovedvekten ikke først og fremst blir lagt på en utforskende samtale, men på ytre akseptable prestasjoner. Dersom evaluering må foretas, bør den komme ved slutten av diskusjonen. Det har mange ganger vist seg at hvis arbeidet avsluttes mens diskusjonen pågår, forlater elevene timen argumenterende og tenkende.

Det må understrekes at når vi her taler om diskusjoner, så kan disse ta mange former og ha ulike formål. Det vil for eksempel være forskjell på diskusjonene mellom få elever på det utforskende stadiet og diskusjoner der en skal dele eller oppsummere erfaringer med hverandre når en har arbeidet en med for eksempel multiplikasjon med desimaltall. Nedenfor vil vi peke på noen slike hovedformer. I forbindelse med arbeid med misoppfatninger vil det være spesielt viktig med diskusjoner som tar utgangspunkt i elevenes ideer om begrepet som behandles, og de løsninger de har brukt i arbeidet med dette. Det er viktig at elevene ser at det å avdekke misoppfatninger ikke er negativt. Det å bli oppmerksom på misoppfatninger gir en spesiell mulighet til å diskutere begrepene. I slike sammenhenger er det avgjørende for læreren å stille spørsmål som:

- Hvorfor tror du denne måten (en feil løsning) å løse oppgaven på kan oppstå? Hvordan tror du eleven tenker?
- Hvordan ville du hjelpe en elev som løste oppgaven slik?
- Hvilke metoder ligner på hverandre? Hvorfor? (En kan så vel sammenligne på tvers av oppgaver som elevsvar på samme oppgave.)
- Hvilken metode er lettest å forstå? Hvorfor mener dere det?
- Hvilke metoder er riktige?

Spørsmål av denne typen bør være sentrale i aktivitetene som blir presentert nedenfor.

2.1 Spill som utgangspunkt for diskusjon

Spill som engasjerer elevene i å gjøre valg som involverer sentrale begreper og misoppfatninger, har vist å utgjøre en effektiv læringssituasjon. Dersom et spill er godt konstruert, gir det automatisk tilbakemelding til spillerne om den tankegangen de har lagt til grunn, er riktig eller ikke. Eksperimenter har vist at dersom spill skal ha den virkning en ønsker på læringsprosessen, må de følges opp med en diskusjon som fokuserer på det prinsippet eller den ideen som skal læres, eller den misoppfatningen som skal avlæres. Disse prinsippene eller misoppfatning-ene, må formuleres eksplisitt både av læreren og elevene. Nedenfor følger et eksempel på et kalkulator-spill for to spillere.

Først til 100

Dette er et kalkulatorspill for to spillere.

- Spiller 1 taster inn et tall på kalkulatoren.
- Spiller 2 multipliserer dette tallet med et annet tall, med det målet å komme så nær til hundre som mulig.
- Spiller 1 multipliserer det nye svaret og prøver å komme enda nærmere til 100
- Spillerne bytter på å multiplisere til en av dem har fått 100,*** på kalkulatoren

Her er et eksempel på hvordan et spill kan foregå:

Spiller nummer	Taster inn, multipliserer med	Tall på kalkulatoren	"Tanker"
1	64	64	
2	1,5	96	For lite
3	1,2	115,2	15 for mye
4	0,9	103,68	Nesten, 3 for mye
5	0,9	93,312	For lite igjen
6	1,08	100,77696	Jeg vant!

Aktivitet 1: Kalkulatorspillet "Først til 100"

Dette er et eksempel på et spill som framhever misoppfatningen at *multiplikasjon alltid gjør svaret større*, og som også fremmer *overslagsregning*. Ideen til spillet er hentet fra Swan (1983). Vi kan lage tilsvarende oppgaver der vi bare har lov til å dividere. Elevene får da oppleve at divisjon "kan gi et tall med større verdi."

Det gir en positiv læringseffekt for elevene å spille et slikt spill, men effekten øker sterkt dersom elevene etter å ha spilt en stund, diskuterer de strategiene som de har brukt. Vi vil presentere flere spill av denne typen nedenfor.

2.2 Rollebytte

I undervisningen er det vanligvis læreren som spør, og elevene som gir svar. Ofte blir disse elevsvarene vurdert og rettet. Disse rollene kan byttes om på. Det er mulig å la elevene utvikle spørsmål fra en gitt situasjon, for eksempel ved å lage regne-fortellinger. Eller så kan læreren be elevene i klassen å rette et konstruert elevarbeid, peke på hvordan eleven har tenkt feil, og forklare denne eleven hva den riktige tenke-måten er. Et eksempel er gitt i aktivitet 2 nedenfor.

Her har vi laget fiktive elevsvar som kan tenkes å komme fram dersom en elev konsekvent følger en tankerekke basert på en misoppfatning. Helge i aktivitet 2 tenker konsekvent på *desimaltall som par av hele tall*, og han gjør sammenligningene på grunnlag av dette. I sammenligningene bruker han dermed en oppfatning om at *det lengste desimaltallet har størst verdi*. I oppgave 3c får han problemer, siden det er umulig å finne noe helt tall mellom 0 og 1. Gunnar mener at det korteste desimaltallet har størst verdi (se kapittel 1.2 *Sammenligning av desimaltall*), og bruker dette konsekvent på alle oppgavene.

Når læreren lager aktiviteter som skal danne grunnlaget for å diskutere misoppfatning-er, er det viktig å holde seg til en eller to misoppfatninger om gangen. Slike aktiviteter har vist seg å være til god hjelp for å få misoppfatningene klarlagt: La elevene diskutere dem og på den måten få dem ryddet av veien.

Rette hjemmearbeid

Læreren samlet inn hjemmearbeid som elevene hadde gjort. Her er svarene til Helge og Gunnar. Rett dem. Skriv det riktige svaret der de har gjort feil.

Kan du forklare hva Helge og Gunnar gjør?

Sammenligne desimaltall *Helge*

1 Sett en ring rundt det STØRSTE av disse tallene: 3,521 3,6 3,75

Forklar hvorfor det er størst: Fordi 521 er større enn 6 og 75

2 Skriv disse tallene i rekkefølge, fra det største til det minste:

1,86 1,9 2,07 2,5 1,842 2,10 1,7756

Svar: 2,10 2,07 2,5 1,7756 1,842 1,86 1,9

3 Skriv et tall som er STØRRE enn det første, men MINDRE enn det andre:

a 4,2 4,3 4,5

b 0,9 0,10 1

Sammenligne desimaltall *Gunnar*

1 Sett en ring rundt det STØRSTE av disse tallene: 6,4 6,85 6,325

Forklar hvorfor det er størst: Fordi det har færrest tal

2 Skriv disse tallene i rekkefølge, fra det største til det minste:

8,67 8,8 8,09 8,4 8,38 8,675 8,5

Svar: 8,8 8,5 8,4 8,67 8,38 8,09 8,675

3 Sett ring rundt alle tallene som er STØRRE enn 0,45

0,15 0,3 0,5 0,625 0,375

4 Sett ring rundt alle tallene som er MINDRE enn 0,75

0,706 0,6 0,815 0,9 0,085

Ved et rollebytte av denne typen kan følgende organisering være praktisk: Først arbeider elevene individuelt, deretter diskuterer de det de har kommet fram til, i par eller i små grupper, og til slutt kan en ha en klassesdiskusjon om det generelle med den gitte misoppfatningen.

Et annet eksempel på rollebytte kan være å ta stilling til påstander fra andre elever, som i aktivitet 3:

Når kan du se bort fra nuller?

Diskuter hvor mange ulike tall det er i denne ruta:

	3,000	
0,3	3	03
30	0,03	0,003
0,030	3,00	3,0

Petter: "Alle ser ulike ut, men jeg tror at 3 og 3,0 står for det samme."

Kari: "Jeg er enig, men 0,30 er ikke lik 0,3."

Marit: "Dersom du legger til nuller på slutten av et tall, så har dette ikke noe å si for verdien av tallet."

Er du enig i disse kommentarene?

Aktivitet 3: Når kan vi se bort fra nuller? Rollebytte.

2.3 Alltid sant, av og til sant, aldri sant

En annen for utgangspunkt for diskusjoner kan være å ta stilling til om visse påstander alltid, av og til eller aldri er sanne. Standpunktene skal grunngis. Eksempler på slike påstander kan være:

Når vi skal multiplisere med 10, kan vi henge på en null bak på tallet.	Når vi multipliserer, blir svaret større.
Vi kan ikke dividere et tall med liten verdi med et tall som har større verdi	Lange tall har større verdi enn korte tall.

Aktivitet 4: Alltid, av og til eller aldri sant. Eksempler på påstander.

Det kan være en idé å lage kort med slike påstander på og la elevene sortere dem i tre grupper etter de gitte kategoriene. Dersom vi lar elevene arbeide i grupper med dette, bør alle i gruppen bli enige om plasseringen av hvert kort. Før elevene plasserer kortet, bør de grunngi valget sitt. Arbeidet kan varieres fra enkelt arbeid med diskusjon med læreren, til den organiseringen som er omtalt under aktivitet 2 ovenfor. Som for de andre aktivitetene er det viktig at påstandene dreier seg om misoppfatninger eller sentrale elementer i utviklingen av begreper.

Som avslutning på dette kapitlet er det på sin plass å peke på at siktemålet med diskusjoner i matematikkundervisningen ikke er diskusjonene i seg selv, men at de er utgangspunkt for refleksjon over faglige spørsmål av ulik slag. I diskusjonene kan vi trene på å

- fokusere på enighet så vel som på motsetninger i forhold til faginnhold,
- argumentere for en tanke, overbevise andre og å lete etter eksempler og illustrasjoner i denne prosessen,
- uttrykke egne tanker og lytte til andres,
- utfordre andres ideer og tåle at egne ideer blir utfordret,
- utforske, utvikle og modifisere ideer som er på "forsøksstadiet", på veien fram mot et begrep.

Det å nå slike mål med diskusjonene vil ta noe tid. I starten vil det viktigste være at elevene blir klar over hva som er deres rolle i denne undervisningen.

Kapittel 3 Undervisningsaktiviteter

Dette kapitlet inneholder en samling aktiviteter som er rettet mot de problemene som er drøftet i kapittel 1. Først blir det materialet presentert som elevene skal arbeide med, og deretter følger kommentarer til mål og gjennomføring. De enkelte aktivitetene kan rette seg mot flere av problemområdene i kapittel 1. Hver aktivitet må ses på som en idé som kan utvikles i ulike retninger, og ikke som et fullstendig opplegg for undervisning av begrepet desimaltall og regning med disse. Vi vil understreke en viktig erfaring fra forskningen om begrepsdannelse: Det lønner seg, særlig på lang sikt, å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter framfor å gjennomføre en lang rekke øvelser.

I kapittel 1 viste vi at *mange av elevene ser på desimaltallene som et par av hele tall som er skilt fra hverandre med et komma*. Dette er en viktig grunn til vanskene vi observerer på flere områder når det gjelder forståelse av desimaltall. Arbeidet med å utfordre denne tenkningen vil derfor få prioritet i denne samlingen av aktiviteter. Aktivitetene 2 og 3 i kapittel 2 ovenfor tok også opp dette. Den aktiviteten som er presentert nedenfor, retter seg på en enkel måte mot det samme.

Tallfølger

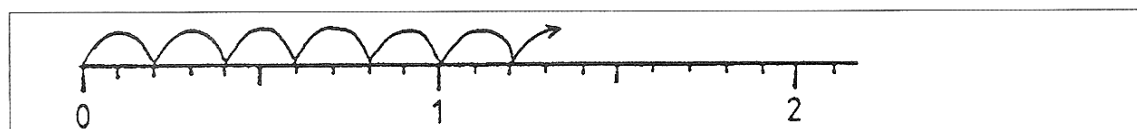
Skriv de neste tallene i disse tallfølgene:

0,2	0,4	0,6	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,2
0,3	0,6	0,9	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,3
0,4	0,8	_____	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,4
0,5	_____	_____	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,5
0,25	_____	_____	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,25
0,05	_____	_____	_____	_____	_____	_____	Legg til 0,05

Aktivitet 5: Tallrekker

Kommentarer

Mange elever vil svare 0,8 0,10 0,12 i den første følgen, og tilsvarende på de andre. Det er ikke alltid mest effektivt å prøve å korrigere slike feil med det samme. Elevene bør heller utføre en ny aktivitet som er slik at de selv kan erfare at de tenkte feil i den første situasjonen. En slik erfaring vil være grunnlaget for en kognitiv konflikt. Det er flere måter å legge opp til dette på. For eksempel kan vi la elevene gjøre de samme oppgavene ved å addere eller "hoppe" på tallinjen, slik som på figuren nedenfor:

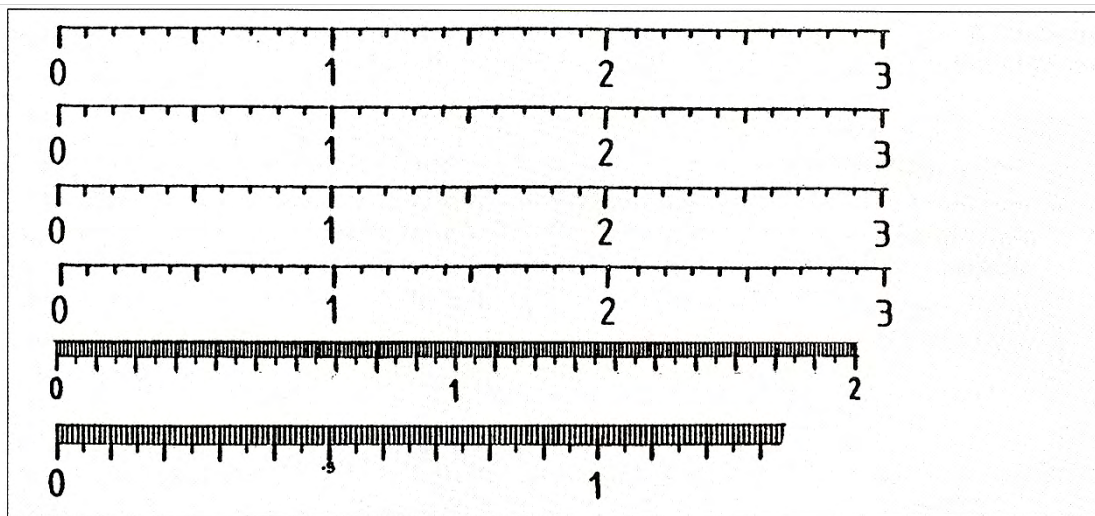


Figur 1: Hopp på tallinje. Kontrast til aktivitet 5.

De fleste elevene vil "se" at de i den første tallfølgen ikke kommer til 0,10 etter 0,8, men til 1,0.

En alternativ "andreaktivitet" kan være å addere 0,2 gjentatte ganger på en kalkulator. Begge disse aktivitetene er enkle eksempler på hvordan vi kan skape en kognitiv konflikt. Læreren bør oppmuntre elevene til å tenke over det inkonsekvente i de svarene de har fått i de to situasjonene. Dette fører vanligvis til en god del diskusjoner, siden elevene blir oppmerksomme på at de trenger å lære noe nytt. Misoppfatningen har kommet fram i dagen. På dette tidspunktet kan det være naturlig å holde en klasse- eller gruppediskusjon med det som mål å hjelpe elevene til å forstå de feilene de har gjort, og å legge grunnlaget for konkrete ideer. Læreren bør legge vekt på å få elevene til å formulere hvordan de tenkte i den første situasjonen.

Figur 2 nedenfor består av tallinjer som kan brukes sammen med følgene i aktivitet 5. For variasjonens skyld kan en gjerne ha tallinjer som ikke starter i 0.



Figur 2: Tallinjer til aktivitet 5.

I den neste aktiviteten kan læreren også lage tenkte elevsvar etter samme prinsipp som i aktivitet 2 ved å legge inn misoppfatningen i disse elevsvarene. Målet med dette er å forsterke de korrekte ideene som en har funnet i aktivitet 5.

Hjemmearbeid						
Anne						
1	$3,2 + 0,2 =$		3,4			
2	$3,7 + 0,4 =$		3,11			
3	$6,7 + 4,3 =$		10,10			
4	$0,8 - 0,3 =$		0,5			
5	$0,45 - 0,2 =$		0,43			
6	6,3	6,5	6,7	6,9	6,11	6,13
						Legg til 0,2
7	0,7	0,14	0,21	0,28	0,35	0,42
						Legg til 0,7
8	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38
						Legg til 0,2
9	0,1	0,6	0,11	0,16	0,21	0,26
						Legg til 0,05

Aktivitet 6: Annes hjemmearbeid

I det videre arbeidet kan læreren gi oppgaver der elevene først finner svaret på hver oppgave og deretter kontrollerer svaret ved å flytte tilsvarende på tallinjene. Alternativt kan elevene kontrollere svarene med kalkulator og bruke tallinjene når de to svarene ikke stemmer. En samling av slike oppgaver kunne for eksempel være:

$0,3 + 0,4 =$	$0,8 + 0,5 =$	$0,25 + 0,6 =$	$1,1 + 0,9 =$
$2 - 0,2 =$	$0,55 - 0,3 =$	$0,75 - 0,4 =$	$1,7 - 0,3 =$
$1 - 0,4 =$	$1,4 - 0,5 =$	$1,15 - 0,2 =$	$0,78 + 0,3 =$

Aktivitet 7: Øvingsoppgaver til addisjon og subtraksjon av desimaltall

En annen aktivitet som passer godt til å fange opp misoppfatningen av desimaltall som par av hele tall, og som i tillegg handler om plassverdi og om at desimaltallene "ligger tett" på tallinjen, er presentert i "Finn tallet mitt". Ideen er hentet fra Swan (1983):

Finn tallet mitt

Ida har skrevet ned et hemmelig tall mellom 0 og 10.

Petter skal komme fram til dette tallet ved å stille spørsmål.

Ida kan bare svare "for stort" eller "for lite".

Vi kunne tenke oss at dette hendte:

Petter

Ida

Er det 5?

Nei, 5 er for lite.

Er det 6?

Nei, 6 er for stort.

Er det 5,4?

Nei, 5,4 er for stort.

Er det 5,5?

Nei, 5,5 er for stort.

Er det 5,3?

Nei, 5,3 er for lite.

Var noen av Petters spørsmål unødvendige? Hvorfor mener du det?

Hvilket tall er det mulig at Ida har skrevet ned? Skriv opp noen mulige tall.

Hvor mange mulige tall har Petter igjen å prøve?

Prøv dette spillet sammen med en medelev.

Velg ikke tall med for mange desimaler.

Aktivitet 8: Finn tallet mitt.

Kommentar

Det vil lønne seg å gå gjennom eksemplet med Petter og Ida og diskutere de spørsmålene som følger dette, før læreren lar elevene prøve spillet. Spørsmålene kan være med på å sette søkelys på å utvide fra to til tre desimaler. Slik kan en få anledning til å fokusere på plassverdi. Det kan være nyttig å forstørre opp et intervall av tallinjen til bruk i denne oppgaven, slik at vi får fram forskjellen mellom 5,3 og 5,33.

Aktivitet 9 nedenfor tar opp de samme problemstillingene som aktivitet 8.

Let etter et tall

Dersom du multipliserer et bestemt tall med 16, så får du svaret 25.

Hvilket tall er det?

Løs oppgaven ved å bruke kalkulatoren.

Du har bare lov å bruke -tasten (multiplikasjon).

Her ser du hvordan Anita startet:

$2 \cdot 16 = 32$	2 er for stort
$1,5 \cdot 16 = 24$	1,5 er for lite
$1,6 \cdot 16 = 25,6$	1,6 er for stort

Kan du fullføre arbeidet til Anita?

Aktivitet 9: Let etter et tall.

Merk gjerne av svarene på en tallinje. Dette fører til at en stadig må forstørre opp området der svaret ligger. Denne oppgaven følges opp med andre oppgaver av samme type, for eksempel:

Hvilket tall må vi multiplisere 8 med for å få 43?

Hvis tallet som skal multipliseres, bare har 2 og 5 som faktorer, vil svaret ha et endelig antall desimaler. Med andre faktorer vil svaret ha uendelig mange desimaler (dersom ikke disse faktorene også finnes igjen i produktet). Slike oppgaver vil kanskje være vanskeligere, men vil gi et enda sterkere inntrykk av at *desimaltallene ligger tett på tallinjen*, og at en stadig kan dele inn i mindre deler. Noen slike oppgaver kunne være å multiplisere med 14 for å få svaret 11, eller med 7 for å få svaret 6.

Aktivitet 1 gav et eksempel på et spill der elevene bruker kalkulatoren. Nedenfor viser vi to utgaver av et annet spill av denne typen. Disse spillene sikter mot å vinne erfaring med *posisjonssystemet og plassverdi*. Ideene er hentet fra Swan (1983):

Kalkulatorspill 1

Slå inn tallene fra 1 til 8 på kalkulatoren, i en eller annen rekkefølge, og med komma mellom på én plass. For eksempel: 5213,8764.

Du skal fjerne sifrene, først 1-tallet, deretter 2-tallet og til slutt 8-tallet ved å subtrahere bort ett om gangen.

Med tallet i eksemplet ovenfor vil vi da få:

Jeg taster inn	Kalkulatoren viser
----------------	--------------------

	5213,8764
- 10 =	5203,8764
- 200 =	5003,8764
- 3 =	5000,8764
.	.
.	.
.	.
- 0,8 =	0

Aktivitet 10: Kalkulatorspill 1.

Kalkulatorspill 2

Slå inn åtte sifre, slik som i kalkulatorspill 1.

Du har bare lov å fjerne sifrene når de står på enerplassen.

Dette betyr at du først må gjøre noe med tallet som kalkulatoren viser, for å få det riktige tallet på enerplassen.

Når det tallet du skal fjerne står på enerplassen, kan du subtrahere det.

Jeg taster inn	Kalkulatoren viser
----------------	--------------------

	8312,6547
: 10 =	831,26547
- 1 =	830,26547
· 10 =	8302,6547
- 2 =	8300,6547
: 100 =	83,006547
- 3 =	80,006547
.	.
.	.
- 8 =	0

Aktivitet 11: Kalkulatorspill 2.

De to spillene kan varieres på flere måter. En kan for eksempel se etter hvilke "regler" vi har gitt. Spillene fungerer selvsagt også for hele tall. Det anbefales å la elevene taste inn færre enn åtte sifre.

Elevene bør gjennomføre spillene noen ganger før de snakker sammen om *posisjons-systemet* og *plassverdi*, og hvilke feil de ble oppmerksomme på under dette arbeidet.

Vi bør unngå at elevene formulerer det en har funnet som huskereglar, for eksempel at en flytter desimalkommaet en plass til høyre når en multipliserer med 10 i kalkulatorspill 2. Det er bedre å formulere denne observasjonen i forhold til posisjons-systemet, for eksempel at når en multipliserer med 10, blir tideler til enere, hundre-deler til tideler osv.

I kalkulatorspill 2 vil elevene kunne møte misoppfatningen om *desimaltall som par av hele tall* når de skal subtrahere sifre fra desimaldelen. Dette gir elevene en god anledning til å diskutere det som skjer når de i neste skritt vil fjerne 4-tallet ved å subtrahere 0,4, og dette ikke endrer på 4-tallet, men derimot første siffer bak komma.

I de neste aktivitetene retter seg i første rekke mot forståelse av multiplikasjon og divisjon med desimaltall. Aktivitetene 12 og 13 sikter mot å vinne erfaring med at *multiplikasjon kan gi mindre svar (og divisjon større svar)*. Den siste aktiviteten er spesielt krevende, siden den forutsetter at elevene skal formulere regneoppgaver der det er unaturlig å bruke delingsdivisjon.

Fire på en linje 1 (bondesjakk)

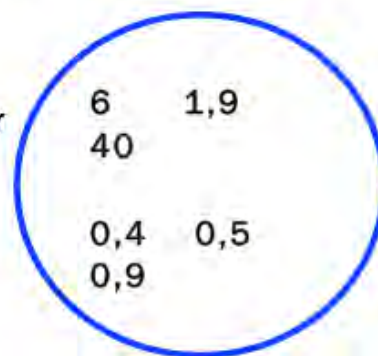
Dette er et kalkulatorspill for to spillere.

Spiller 1 velger to av de ni tallene og multipliserer dem på kalkulatoren.

Spiller 1 setter en ring rundt svaret på brettet.

Spiller 2 gjør det samme og setter et kryss for svaret på brettet.

Den som først får fire ringer (eller kryss) ved siden av hverandre på brettet (vannrett, loddrett eller diagonalt), har vunnet.



0,2	0,6	1,25	26,6	2,4	1,35
12,6	84	16	560	36	2,85
1,71	240	7	1	35	5,6
11,4	20	3	9	100	5,4
0,95	76	21	15	60	0,45
3,75	2,25	0,75	4,75	0,76	0,36

Aktivitet 12: Fire på linje 1 (bondesjakk).

For å vinne dette spillet vil det være avgjørende at elevene vurderer hvilket svar de vil få når de velger å taste inn to bestemte tall på kalkulator. Taster de inn tilfeldig valgte tall, vil de i de fleste tilfellene tape mot andre elever som vurderer hvilke tall de vil oppnå. I den diskusjonen som bør følge etter at elevene har spilt dette noen ganger, bør en fokusere på strategier elevene bruker for å nå et bestemt svar.

Spill av denne typen kan varieres på mange måter. Læreren kan gjøre tallene mer eller mindre vanskelige. Det er ikke noe i veien for å holde seg til hele tall. Det er også mulig å bruke andre regneoperasjoner enn multiplikasjon. Det kan gis flere eller færre tall å velge mellom.

Ved slike endringer er det flere momenter å passe på. En må ikke få det samme svaret med to ulike utgangstall. Alle mulige svar må finnes på brettet. Under slike forutsetninger er det for ni utgangstall 36 svar for multiplikasjon. For andre tall med liten verdi vår vi kke kvadratiske brett. Velger vi divisjon (eller subtraksjon), blir det flere mulige svar ($3 : 4$ er ikke lik $4 : 3$).

Fire på en linje 2 (bondesjakk)

Spiller 1 lager en regneoppgave om divisjon som handler om to av de gjenstandene som vist til høyre. For eksempel:

"Hvor mange tekopper kan fylles av saftflasken?"

eller

"Hvor stor del av bøtta inneholder tekoppen?"

Regn ut svaret på oppgaven. På dette tidspunkt kan du ikke endre oppgaven din.

Sett en ring rundt den ruta hvor svaret på oppgaven din står. Svaret må være nøyaktig eller rundet av til to desimaler.



Deretter er det spiller 2 sin tur. Spiller 2 merker sine svar med kryss.

Den spilleren som først får fire ringer (eller kryss) på en linje, har vunnet.

0,02	0,35	0,04	56	0,56	0,09
0,11	20	0,5	0,01	14	11,4
1,43	0,25	2	4	2,5	0,36
1,75	8,77	5	7	0,08	0,70
1,79	8	100	0,2	25	0,20
4,91	0,14	0,13	2,85	12,5	0,07

Aktivitet 13: Fire på en linje 2 (bondesjakk).

Aktivitet 13 er relativt omfattende og utfordrende med de tallene som er gitt her. For yngre elever bør vi de første gangene endre noe på tallene. Vi vil oppfordre læreren til å prøve spillet mot en kollega med tanke på å diskutere:

- Hva slags mental aktivitet er involvert?
- Hvilken rolle spiller kalkulatoren?
- Hvilke ulike typer divisjon er involvert?
- Hvilke oppgavetyper fant du vanskeligst å uttrykke?
- Hvilke strategier brukte du til å velge tall på brettet og for å finne de to tallene du trengte til den divisjonsoppgaven som svarte til dette tallet på brettet?

De to neste oppgavene har en kontekst som handler om rater. Det er i slike kontekster en i første rekke møter multiplikasjon med tall mindre enn 1, og der en trenger å utføre målingsdivisjoner.

I disse aktivitetene bruker vi en konkretisering med det en kaller *dobbel tallinje*. I den første aktiviteten (14) er vekt og korresponderende pris for ulike typer frukt og grønnsaker satt av på tallinjen. I den andre aktiviteten (15) har vi satt av avstand og tid (og liter).

Priser på frukt og grønnsaker

I disse oppgavene skal du finne de tallene som skal stå i hver rute.

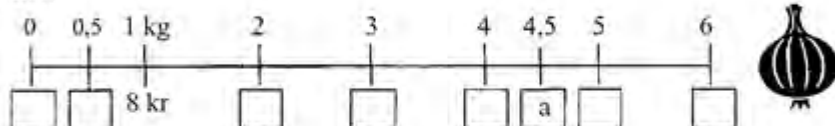
Hvis du vil, kan du bruke kalkulator.

Diskuter med en medelev det du gjorde for å finne svarene.

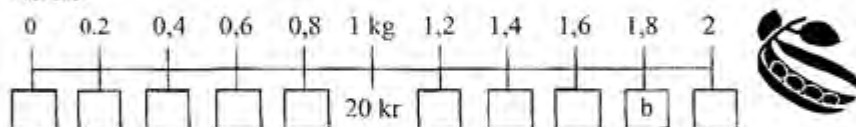
Lag en matematikkoppgave som passer med rutene a, b, c, d e og f.

Skriv også ned det du gjorde for å finne svarene i disse rutene.

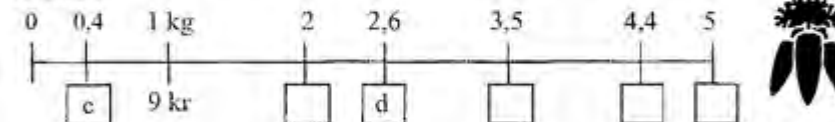
Løk



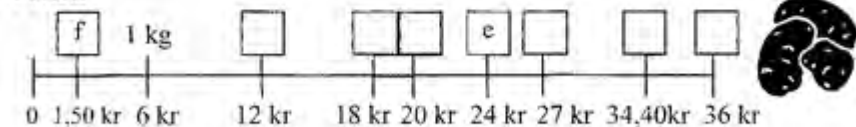
Bønner



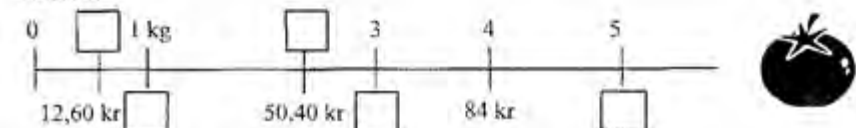
Gulrøtter



Poteter



Tomater



Aktivitet 14: Priser på frukt og grønnsaker.

Som vi har pekt på tidligere, er tallinjer et godt hjelpemiddel for å synliggjøre en rekke ideer ved desimaltall. De er nær knyttet til målinger, der det er naturlig med bytte av enhet, alt etter hvor nøyaktige målingene skal være. Dette får fram viktige sider ved desimaltall på en bedre måte enn ved å knytte erfaringene med penger.

Doble tallinjer av denne typen har vist seg velegnet som konkretisering i mange andre sammenhenger enn dette, for eksempel når det gjelder innføring av brøk og forhold. Se for eksempel Streefland (1991).

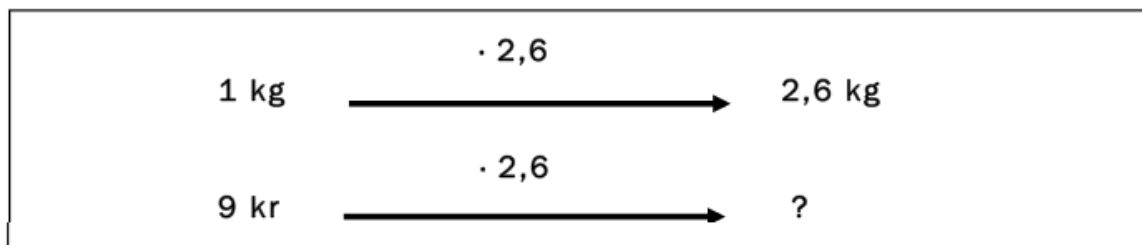
De fleste elevene bruker en rekke uformelle metoder når de skal regne ut de manglende tallene for pris og vekt på disse tallinjene. Disse metodene omfatter ofte kombinasjoner av dobling, halvering og addering. De kan kanskje regne ut hva 4,5 kg løk vil koste på følgende måte:

"1 kg koster 8 kroner. 2 kg koster det dobbelte, altså 16 kroner.
 4 kg koster det dobbelte av 16, altså 32 kroner, og 0,5 kg koster
 halvparten av 8 kroner, altså 4 kroner.
 De koster 4,5 kg 32 kroner + 4 kroner som er 36 kroner."

Det er ikke helt enkelt å generalisere slike metoder til mer kompliserte tilfeller. Andre elever vil prøver å multiplisere for å finne svarene som skal stå i rutene d og e, og dividere for c og f, fordi de har den misoppfatningen at multiplikasjon gjør svaret (alltid) større.

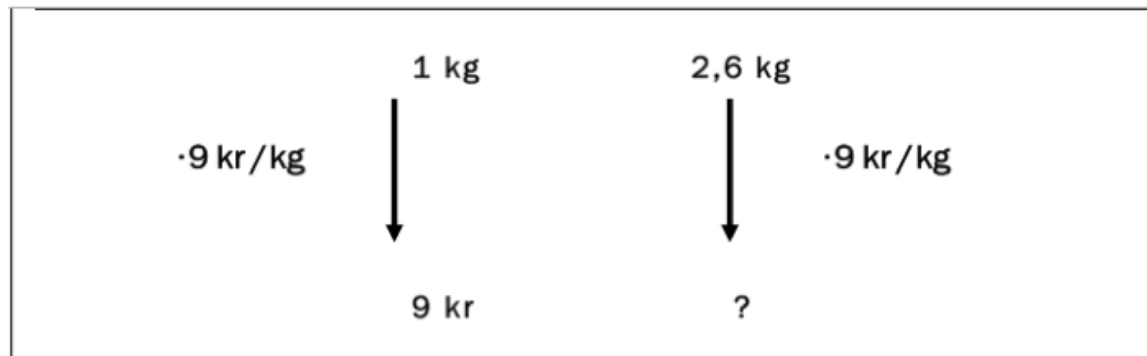
Elevene må bli oppmerksomme på at de har behov for andre metoder. Derfor må det fokuseres på det multiplikative aspektet i relativt enkle oppgaver, som med 4,5 kg i løkproblemet. Mange elever stiller seg mer tvilende til å bruke multiplikasjon til å regne ut prisen på 0,5 kg, og blir overrasket når de får svaret 4, når de gjør dette på kalkulatoren. Elevene må erfare at multiplikasjon betyr "å ta en del av noe" i slike sammenhenger.

Et hovedsiktemål med arbeidet med disse tallinjene er å fokusere på at vi kan tolke multiplikasjon som en forstørrelse uten dimensjon, for eksempel i gulrotproblemet.



Dermed kan vi på en naturlig måte snakke om multiplikasjon med desimaltall, både større mindre enn 1. På tilsvarende måte vil vi kunne formulere divisjonsproblemet knyttet til rute e som "Hvor mange kg poteter får jeg for 24 kroner når 1 kg koster 6 kroner?" eller "Hvor mange ganger kan jeg "ta" 6 kroner av 24 kroner?" Dette gir en god anledning til å diskutere hva som ligger i målingsdivisjon. Tilsvarende for rute f: "Hvor stor del av 6 kroner er 1,50 kroner?"

Vi kan også se på dette som en rate:



For enhver mengde frukt eller grønnsaker kan elevene finne prisen ved å multiplisere vekten med samme rate. Dette kommer ofte som en aha-opplevelse for elever som tidligere har brukt ulike metoder for hvert spørsmål.

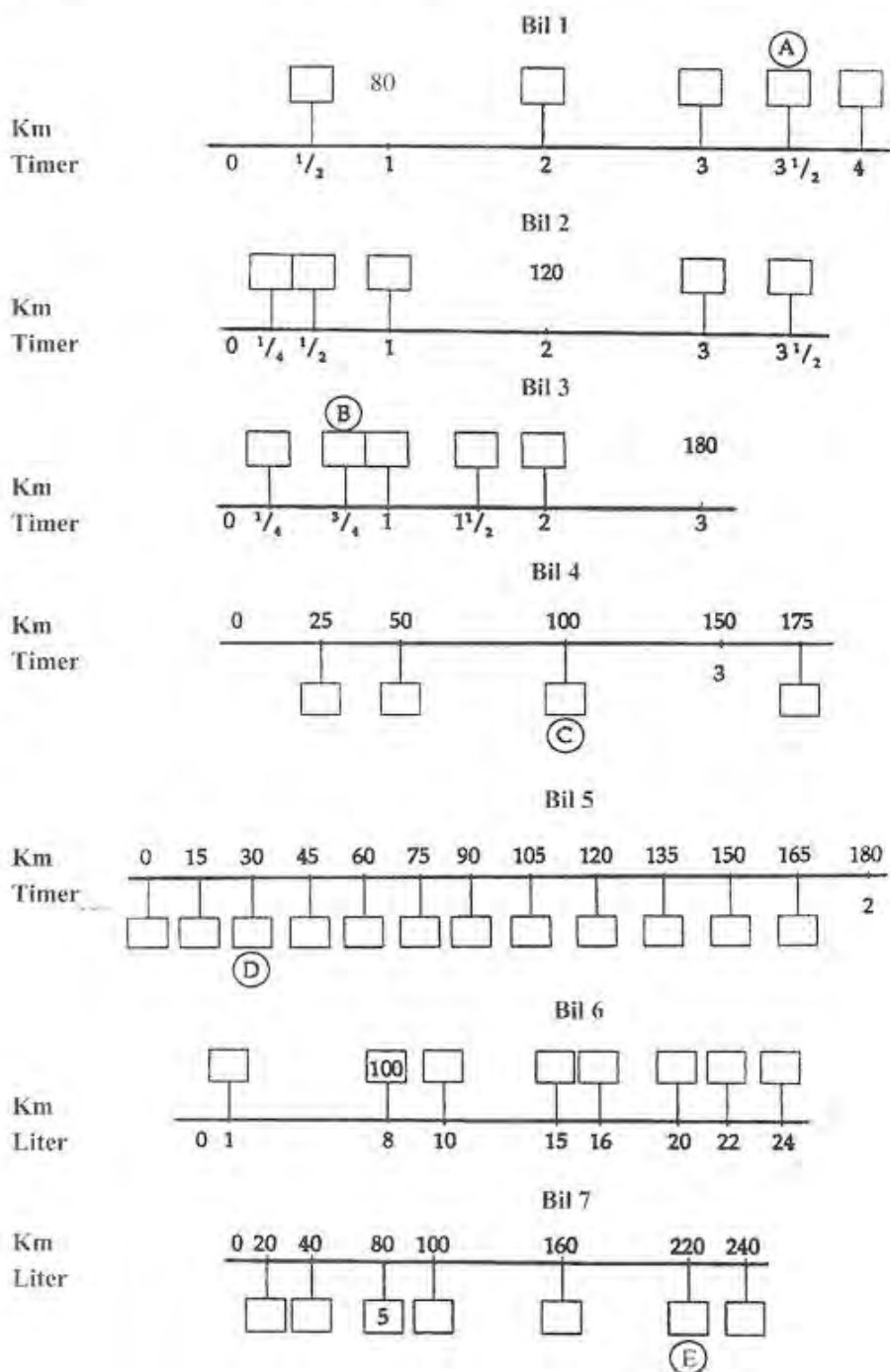
Denne aktiviteten er her presentert i en avkortet form. Det er behov for å diskutere og utvikle denne viktige siden av begrepet gjennom mange undervisningstimer. Aktivitet 15 viser hvordan vi kan arbeide med den samme matematikken i en annen kontekst.

Biler: avstand, tid, bensin

I disse oppgavene skal du finne tallene som skal stå i hver rute.
Hvis du vil, kan du bruke kalkulatoren.

Diskuter det du gjorde for å finne svarene med en medelev.
Lag en matematikkoppgave som passer med rutene A, B, C, D og E.

Skriv også ned det du gjorde for å finne svarene i disse rutene.



Referanser

Assessment of Performance Unit (1982). *Mathematical Development. A Review of Monitoring in Mathematics 1978 to 1982*. London: HMSO.

Swan, M., (1983). *Teaching Decimal Place Value: A comparative Study of "Conflict" and "Positive Only" Approaches*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

Kerry, T., (1981), Talløking: The teacher's role. I Sutton, C. (ed.): *Communicating in the Classroom*. London: Hodder and Stoughton.

Streefland, L., (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.