PER ARNE BIRKELAND
TRYGVE BREITEIG
ROLF VENHEIM

# MATEMATIKK FOR LÆRERE 1

5. UTGAVE

UNIVERSITETSFORLAGET

## 3.3 Tallsystemer fra eldre tider

Utviklingen av tallsystemet er utvilsomt en av de viktigste aktivitetene i matematikkens, ja kanskje i menneskehetens historie. LK06 presiserer at matematikk er en del av den globale kulturarven vår. Da er det også viktig å vite litt om hvordan matematikken vi har i dag, er blitt utviklet. Mange barn synes det er spennende og motiverende å lære om koder og symboler som følger et bestemt system, for eksempel brukt til skattekart. Da kan også andre tallsystemer være spennende å lære litt om. Vi vil i dette avsnittet ta for oss noen viktige kulturers måter å notere tall fram mot våre kjente teknikker.

Ingen er født med en instinktiv forståelse av titallsystemet og plassverdi, sier Bob Burn (1998). Sifrene 1 og 2 kan for eksempel settes sammen til symbolene 12, 21, 1/2, og 2/1. Den forskjellige betydningen av disse fire symbolene bygger på en konvensjon, som må læres. Burn peker på at de historiske kildene er fulle av alternativer: Tallsystemene som fins rundt i verden bygger på ulike basiser, og det fins mange ulike systemer av symboler og forskjellige måter å kombinere delsymboler på. For eksempel kan rekkefølgen av dem være vesentlig eller uvesentlig.

Enhver kultur har et eller annet system for å angi antall og størrelser. I antikkens Hellas brukte de bokstaver fra alfabetet for tallene $1, 2, \dots, 9$, for tallene $10, 20, \dots, 90$, og for $100, 200, \dots, 900$. Hver bokstav representerte ett tall. $\alpha$ (alfa) betydde 1, $\beta$ (beta) 2. Rekkefølgen disse ble skrevet i, hadde ingen betydning. Det hebraiske tallsystemet var tilsvarende. Det kinesiske tallsystemet knyttet sammen symboler for $1, 2, \dots, 9$ og symboler for 10, 100, 1000 og 10 000 analogt til slik vi leser og sier tall. Desimal plassverdi var ikke innebygd i disse systemene. Tallsystemet vårt – en oppfinnelse med en lang historie bak

– er det hinduarabiske. Det kom til oss fra India gjennom oversettelser av arabiske, matematiske skrifter, der dette tallsystemet ble beskrevet. I middelalderen levde det hinduarabiske tallsystemet side om side med det romerske, men ble etter hvert enerådende.

## Egyptisk tallnotasjon

I den gamle egyptiske kulturen ble tall skrevet med hieroglyfer. Systemet hadde ti som basis, og det var *additivt* i motsetning til vårt posisjonssystem. Det betyr at egypterne la sammen verdiene til alle enkeltsifrene, uansett hvilken posisjon sifferet hadde, for å finne hvilket tall det sammensatte symbolet representerte. De hadde et nytt symbol for hver av potensene av 10:

| Egyptisk symbol | 𓏺 | 𓎆 | 𓍢 | 𓆼 | 𓂭 | 𓆐 | 𓁨 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | stav | hæl | rull | lotus-blomst | bøyd finger | rumpe-troll | mann med løftede armer |
| betyr | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 |

Det enkelte symbolet gjentok de så mange ganger som tallet tilsa. Tallet 156 kunne da bli skrevet

𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 eller 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓍢 eller 𓍢 𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺

Når samme symbol ble gjentatt mange ganger, ble det gjort oversiktlig ved å gruppere, slik vi ser ovenfor.

Prinsippene for dette tallsystemet er dermed:

- Det enkelte symbolet forteller hvilket tall det representerer, og plassen det står på, er uvesentlig.
- Sifrenes verdier adderes.
- Sifrenes verdier er potenser av 10 – det er altså et titallsystem.
- Det fins ikke noe symbol for null.

Matematikken i Egypt, så vel som i Babylonia, ble brukt i astronomi, ved beregning av kalender og ved navigasjon. Bevegelsen av himmellegemene var opphav til tidsenheter som år og måned, og det hjalp menneskene med å finne posisjonen for sine skip eller ørkenkaravaner. Årets lengde var basert på solas posisjon i forhold til jorda. Kalenderen var nødvendig for å holde orden på religiøse fester, på så- og plantetider og for å forutsi Nilens flomperioder. Egypterne fant tidlig ut at året var omtrent 365 døgn langt, og etter hvert kom de til at $365\frac{1}{4}$ er et nøyaktigere tall. Romerne brukte denne kunnskapen fra egypterne da de innførte den julianske kalenderen, som var i bruk i Europa helt til den i 1582 ble avløst av den enda mer nøyaktige gregorianske kalenderen.

## Babylonsk tallsystem

Mellom årene 3000 og 2000 f.Kr. rådde sumererne i det sørlige Mesopotamia (nå Irak). Hos dem, og seinere hos babylonerne og assyrerne, ble et av de første skriftspråkene utviklet, kileskriften. De presset kileformede merker i myk leire, som etterpå ble tørket og brent. Mange slike leirtavler, der de eldste daterer seg tilbake til cirka 3000 år før Kristus, er blitt gravd fram i løpet av det siste hundreåret. Det har gitt oss kunnskaper blant annet om babylonernes matematikk og om deres tallsymboler.

Babylonerne brukte to merker eller symboler for tall: en kile 𒁹 for én enhet og et hjørne 𒌋 for ti enheter. Tall mellom 1 og 60 ble skrevet på denne måten:

| Kileskrift | 𒁹 | 𒁹𒁹 | 𒁹𒁹𒁹 | 𒁹𒁹𒁹<br>𒁹𒁹𒁹 | 𒌋 | 𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹 | 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹<br>𒌋𒌋 𒁹𒁹 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| betyr | 1 | 2 | 3 | 6 | 10 | 14 | 55 |

Tallet 60 skrev de akkurat som 1, nemlig 𒁹. Om det skulle bety 1 eller 60 måtte tolkes ut fra sammenhengen. På den måten kunne de skrive tall over 60:

| Kileskrift | 𒁹 | 𒁹 𒁹 | 𒁹 𒁹𒁹 | 𒁹𒌋 | 𒁹𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹 | 𒁹𒁹 | 𒌋𒌋 𒌋𒁹𒁹𒁹 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| betyr | 60 | 61 | 62 | 70 | 84 | 120 | 1213 |

Den samme framgangsmåten ble brukt for $60^2 = 3600$. De seksti 60-mengdene ble samlet i én $60^2$- eller 3600-mengde.

3600 𒁹 3605 𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

Tallsystemet var en kombinasjon av et additivt system og et posisjonssystem med 60 som basis. Det hadde opprinnelig ikke noe symbol for null, noe som selvsagt gir problemer og uklarheter. Vi finner heller ikke noen klar angivelse av plasseringen av enerne, sekstierne og så videre.

𒁹 kan altså bety 1, men det kan også bety 60 eller $60^2$ eller $60^3$. Det kan dessuten bety $\frac{1}{60}$ og $\frac{1}{3600}$, siden det i kileskriften ikke ble brukt noe skilletegn mellom hele og brøkdeler, slik som vårt komma fungerer. Leseren måtte se av sammenhengen hva hvert tallsymbol skulle bety.

Et sammensatt symbol som dette 𒁹𒁹 𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒁹 kan dermed oppfattes på flere måter. La oss si at vi, av sammenhengen det står i, tolker det som

$$2 \cdot 60^2 + 10 \cdot 60 + 4 + 11 \cdot \frac{1}{60} = 7804\frac{11}{60}$$

Hvis vi tilpasser våre tallsymboler til babylonernes system, kan vi da skrive det

2.10.4,11

Kommaet markerer her skillet mellom hele tall og brøkdeler, punktumet mellom ulike potenser av 60. Et tallsymbol skrevet på denne måten vil vi kalle et *sekstitallsymbol*. Et naturlig spørsmål melder seg nå:

### *Hvorfor ble 60 valgt som basis?*

Historikerne kan ikke svare sikkert på hvorfor babylonerne valgte 60 som basis for tallsystemet. Muligens har det sine røtter i tidlige systemer for mål og vekt, der en enhet er 60 ganger den neste, mindre enheten. Inndelingen av sirkelen i 360 grader går tilbake til babylonsk astronomi fra de siste århundrene f.Kr. Dette er altså mye yngre enn selve sekstitallsystemet.

60 er et *rikt tall* i grekernes betydning. Det kan divideres med mange forskjellige tall. Det kan deles med 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 og 30. Basisen i vårt tallsystem kan bare deles med 2 og 5.

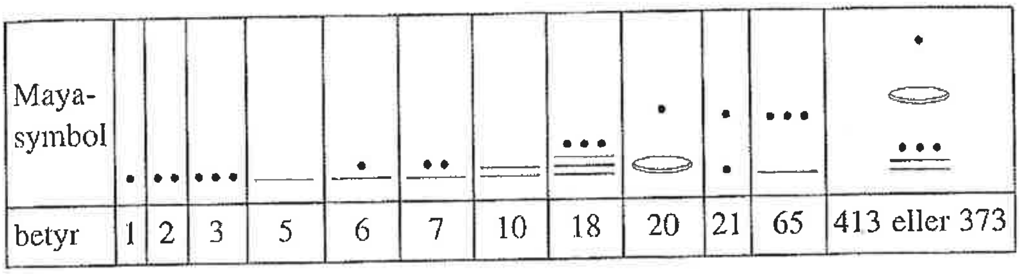
Vi bruker fortsatt sekstitallsystemet ved tidsmåling og ved inndeling av sirkelbuen. En time er 60 minutter, en grad er 60 bueminutter, og ett minutt er 60 sekunder. Sekstidelene kalte babylonerne «de første små delene», og sekstidelene av sekstidelen kalte de «de andre små delene». Seinere ble dette overtatt av andre kulturer, og det ble oversatt til latin: *partes minutae primae*, *partes minutae secundae*. Derfra har vi fått ordene minutt og sekund. De er altså knyttet til brøkdelene i sekstitallsystemet.

## Mayafolkets tallsystem

Mayaindianerne i Mellom-Amerika hadde tidlig en høyt utviklet kultur, og som på enkelte områder gjorde store framskritt fra rundt det fjerde århundret e.Kr. Matematikken var en hjørnestein i deres kultur.

Mayafolket hadde bare tre enkeltsymboler for tall: En prikk • står for 1, en strek —— betyr 5, og en figur som likner et skjell, betyr 0. Dette siste symbolet er bemerkelsesverdig. De skrev tallene vertikalt, altså i etasjer oppover. I andre etasje finner vi antall 20, i tredje antall $20^2$ eller 400, og slik fortsetter det. Dette mønsteret ble litt justert når det gjaldt kalenderen og antall dager. Ifølge historikere (se for eksempel Bunt & Bediant 1976) finner vi da i tredje etasje antall 360, altså $18 \cdot 20$, som er omtrent antall dager i et år, i fjerde etasje så $18 \cdot 20^2$, i femte $18 \cdot 20^3$, og så videre.

Eksempler:



| Maya-symbol | • | •• | ••• | — | •<br>— | ••<br>— | —<br>— | •••<br>—<br>—<br>— | •<br><br> | •<br>• | •••<br>— | •<br><br>•••<br>—<br>— |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| betyr | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 10 | 18 | 20 | 21 | 65 | 413 eller 373 |

Dette tallsystemet er en kombinasjon av et additivt system og et posisjonssystem med 20 som basis. Det siste finner vi rester av i enkelte europeiske tellemåter, som i fransk hvor vi for eksempel har quatre vingt = fire tjue = åtti, og i dansk med treds = tre snes = seksti og firs = fire snes = åtti.

## Det romerske tallsystemet

De viktigste sifrene i det romerske tallsystemet ser slik ut:

| Romertall | I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| betyr | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

Dette er et additivt system, men med ett unntak: Når et siffer med mindre verdi står foran et større, skal det subtraheres.

Eksempler:

| Romertall | XXIII | XXXIV | DCCLIX | MCMXCIX |
|---|---|---|---|---|
| betyr | 23 | 34 | 759 | 1999 |

Til å regne på papir, tavle eller papyrus er det romerske systemet omtrent ubrukelig. Prøv for eksempel en multiplikasjon som LVIX · XXXIV. Til regning med sine tall brukte romerne ulike varianter av abakusen.

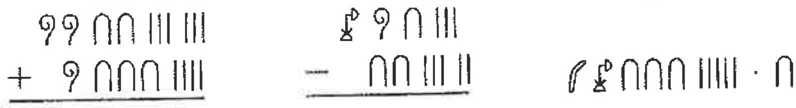
## *Oppgaver*

**3.7** **a** Skriv disse tallene med egyptiske tallsymboler:

34 75 452 12 345

**b** Hvilke tall representerer disse egyptiske symbolene:

**c** Regn ut



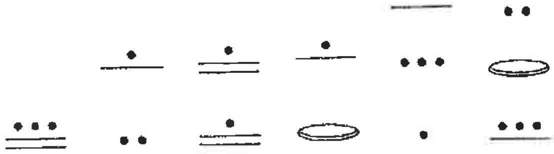
**3.8** **a** Finn tre tall som kan representeres ved hvert av disse kileskrift-symbolene

**b** Anta at symbolet  står for 22.20 i sekstitallsystemet. Skriv det i vårt vanlige tallsystem.

**c** Skriv disse tallene med kileskrift:

| | |
|---|---|
| 34 | 100 |
| 51 | 500 |
| 73 | 2734 |

**3.9** **a** Disse tallene er skrevet med mayafolkets symboler. Hvilke seks tall står de for?



**b** Prøv å skrive disse tallene i mayasystemet:

24 39 101 435 4000

# Løsninger og vink til oppgaver

## 3 Naturlige tall og regning

**3.1** Et utvalg:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Basis 10 | 1 | 2 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 | 16 | 20 |
| Basis 2 | 1 | 10 | 100 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 10000 | 10100 |
| Basis 16 | 1 | 2 | 4 | A | B | C | D | 10 | 14 |

**3.2** **a**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Basis 10 | 13 | 23 | 37 | 62 | 135 |
| Basis 6 | 21 | 35 | 101 | 142 | 343 |
| Basis 12 | 11 | 1B | 31 | 52 | B3 |

**b** 19 22 253 15 428

**3.3** **a** $121_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = 100_{n+1}$
Derfor er 121 i basis $n$ alltid lik 100 i basis $n + 1$.

**b** $1331_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 = 1000_{n+1}$
1331 i basis $n$ er dermed alltid lik 1000 i basis $n + 1$.

**3.4** **a, b** Skriv på utviklet form og faktoriser.

**c** $1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

**3.5** $2^{64} - 1$ riskorn

**3.7** **a** 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺    𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺    𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆 𓏺𓏺
𓂭 𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺

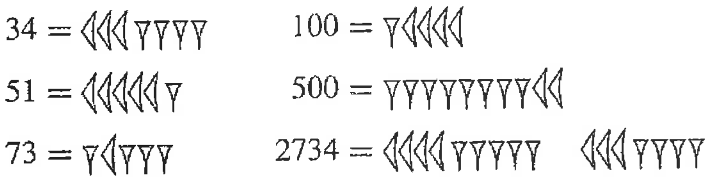
**b** 246    20 507

**c** 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆    𓆼 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺    𓆐𓂭 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆

**3.8** a

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 601 | 3601 |
| 20 | 610 | 3610 |
| 3 | 121 | 62 |

b $22 \cdot 60 + 20 = 1340$

c 


**3.9** a 13 122 231 120 2061 808

b 

24 39 101 435 4000

**3.35** a

| | | |
|---|---|---|
| $320_{\text{fem}}$ | $566_{\text{ni}}$ | $22_{\text{fem}}$ rest 1 |
| $427_{\text{åtte}}$ | $3002_{\text{fem}}$ | $111_{\text{to}}$ |
| $534_{\text{seks}}$ | $1000\,0010_{\text{to}}$ | |

## 4 Tallteori

**4.1** a 2222 og 2992
b 141 og 549
c 2992
d 1775
e Ingen
f 1775

**4.3** 2, 3, 4, 6, 12

**4.4** Til 2, 3 og 5: 30, 60 og 90

Til 6 og 9: 18, 36, 54, 72 og 90

**4.6** a 2, 3, 5 og 7
b 157: må sjekke 2, 3, 5, 7 og 11
373 og 391: må sjekke 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 og 19

**4.7** a Fire tall: 2, 3, 5 og 7
b Elleve tall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 og 31
c $\sqrt{10\,000} = 100$, og det er 25 primtall under 100.