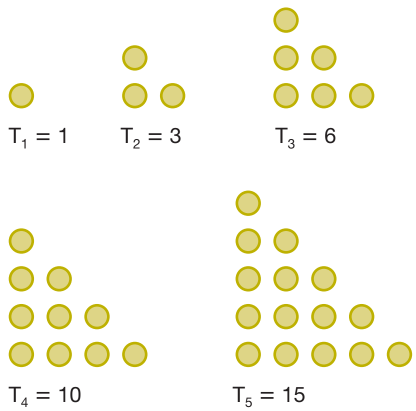
Vigdis Brevik Petersen

Figurtall – en kilde til kreativitet

I læreplanen er det lagt vekt på at elevene skal bruke initiativ, kreativitet og utforskning for å etablere kjennskaper og innsikt i matematikkfaget. Dette gjelder også i høyeste grad i lærerutdanningen. Vi viser noen eksempler på hva nysgjerrighet og lek med figurtall kan resultere i hos elever og studenter.

Åttende klassetrinn

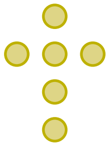
For en tid tibake fikk jeg muligheten til å «låne» en åttendeklasse i to skoletimer. Formålet var å se hvordan elever som aldri hadde beskjeftiget seg med utforsking av tallfølger og tallmønstre, ville nærme seg et slikt emne. Først ble det snakket litt om tallfølger, og elevene skulle forsøke å finne mønsteret i følgene som ble foreslått. Etter hvert fant de på tallfølger til hverandre på egen hånd. De fleste ble raskt engasjert. Så gikk vi over til å illustere tallfølger med figurer og se om vi kunne finne et mønster. Problemstillingen vi valgte, var å finne ut hvordan figurene vokste. Veksten skulle uttrykkes i ord. Det viste seg snart at elevene tegnet og forklarte på sin måte. Husk at dette er elever som ikke hadde vært borti denne type utforskende matematikkoppgaver tidligere. For å illustrere elevenes fantasi, skaperevne og resonnement, tar vi med noen eksempler der elevenes egne ord blir brukt for å forklare veksten. Mange av elevene tegnet ulike former for trekanttall (T_n):



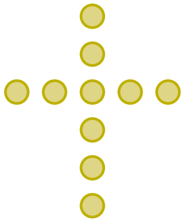
Her er noen forklaringer på veksten:

- *Det neste tallet blir 21 fordi hvert tall øker med en mer enn det forrige tallet økte med.*
- *Hvis det skal bli større, legger man på en til hver linje med sirkler.*
- *Den neste figuren vil få 21 sirkler fordi det øker først med tre, så med fire og så med fem osv. etter hvert som vi bygger flere.*

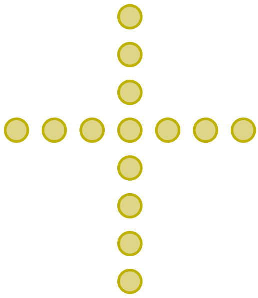
Forskjellige varianter av kors (K_n) var det også. Vi tar med disse:



$K_1 = 6$



$K_2 = 10$

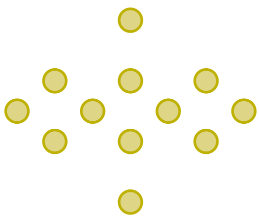


$K_3 = 14$

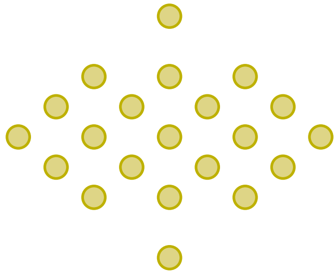
Elevene forklarer veksten slik:

- *Neste tall blir 18, fordi jeg plusser på med fire sirkler for hver gang (en sirkel på hver ende).*
- *Det øker med fire på begge plasser. Det vil øke med fire neste gang også.*
- *Plusser på en på de vannrette og de loddrette rekkene. Tallet blir 18.*
- *Jeg tror det neste tallet blir 18 fordi jeg plusser på med fire hele tiden. Det er fordi jeg legger på en sirkel på hver side.*

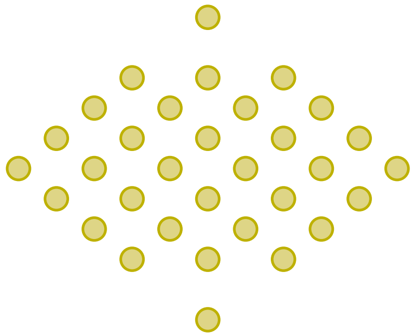
En mer avansert utgave er denne «sommerfuglen» (S_n):



$S_1 = 12$



$S_2 = 21$



$S_3 = 32$

Eleven tegner en ny figur og setter opp en tabell der også det neste tallet inngår. (Prøv om du kan tegne figuren slik at tallet 45 stemmer). Tabellen ser slik ut:

12 21 32 45

9 11 13

2 2

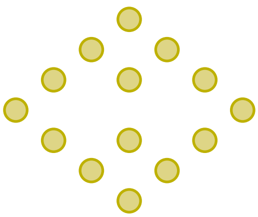
Så forklarer han:

- *Første gang øker det med ni. Så øker det videre med to i tillegg til tallet før. Det ser vi av tabellen.*

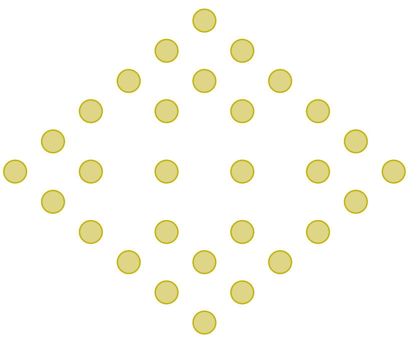
Her er det altså en elev som observerer det vi kaller første- og andredifferanser på egen hånd. Denne eleven var meget engasjert og produktiv, og han laget en rekke forskjellige figurtall der veksten ble presist formulert. Dette er bare en liten smakebit på elevers kreativitet og analytiske evner. Med mer tid til rådighet ville det vært naturlig å «oversette» den språklige vekstforklaringen til matematisk symbolspråk.

Videreutdanningskurs for lærere

På et kompetansegivende videreutdanningskurs for lærere fikk vi anledning til å gå mer systematisk til verks. De fleste av disse lærerne hadde jobbet i skolen i mange år, men arbeid med tallfølger og spesielt figurtall, var en ny problemstilling for dem. Det skulle vise seg at kreativiteten var stor. For å illustrere hva disse studentene kom frem til, velger vi å ta med to eksempler av ulik vanskegrad. For å finne eksplisitte formler for figurtallene sine bruker studentene formlene som finnes i avsnittet 'Læreplaner og historikk' (side XX). Det første eksemplet har studenten kalt «stjernetall» (S_n). De ser slik ut



$S_1 = 14$



$S_2 = 30$

For å finne den eksplisitte formelen konstaterer studenten (prøv selv) at

$$S_2 = R_3 + 2(T_3) + 2(T_2)$$

og når jeg setter inn eksplisitte formler for rektangeltall og trekanttall får jeg

$$\begin{aligned} S_n &= R_{n+1} + 2(T_{n+1}) + 2(T_n) \\ &= (n+1)(n+2) + 2(n+1)(n+2)/2 \\ &\quad + 2n(n+1)/2. \end{aligned}$$

Dette fører til den eksplisitte formelen

$$S_n = 3n^2 + 7n + 4, \quad n \geq 1.$$

For å finne veksten setter studenten opp sammenhengen

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 & & S_2 & & S_3 & & S_4 \\ 14 & & 30 & & 52 & & 80 \\ & +16 & & +22 & & +28 & \end{array}$$

og konstaterer at *dette blir en økning på 6 i den nederste raden.* Videre setter han opp

$$\begin{array}{ll} S_1 + 16 = S_2 & S_1 + 16 + (0 \times 6) = S_2 \\ S_2 + 22 = S_3 & S_2 + 16 + (1 \times 6) = S_3 \\ S_3 + 28 = S_4 & S_3 + 16 + (2 \times 6) = S_4 \\ S_4 + 34 = S_5 & S_4 + 16 + (3 \times 6) = S_5 \end{array}$$

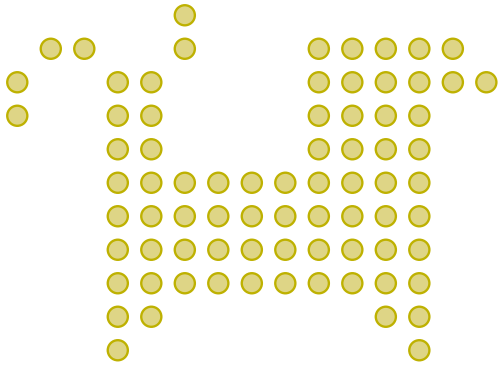
og derav

$$S_n + 16 + (n-1)6 = S_{n+1}.$$

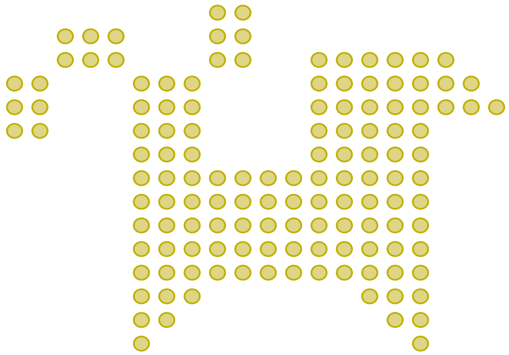
Her observeres det at andre-differansen er konstant; dvs. lik 6, og den rekursive formelen blir

$$S_{n+1} = S_n + 6n + 10.$$

En av studentene hadde virkelig utfoldet seg, og hun konstaterer: *Figurene mine er noe som kan ligne på en stjerne, og noe som absolutt er et nebbdyr.* Mange av studentene hadde stjerner i ulike varianter, men her skal vi betrakte «nebbdyret» (N_n). De to første ser slik ut:



$N_1 = 77$



$N_2 = 133$

For å finne den eksplisitte formelen deler studenten «nebbdyret» opp i rektangeltall, trekanttall og kvadrattall og konstaterer (prøv selv) at

$$\text{Nebbdyr}_1 = 3T_2 + 3R_1 + R_2 + 2R_4 + K_4$$

og dermed må Nebbdyr nr. n være representert ved

$$N_n = 3T_{n+1} + 3R_n + R_{n+1} + 2R_{n+3} + K_{n+3}$$

$$=3(n+1)(n+2)/2 + 3n(n+1)$$

$$+ (n+1)(n+2) + 2(n+3)(n+4) + (n+3)^2$$

$$=(17n^2 + 61n + 76)/2$$

For å finne veksten setter hun opp

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
77	133	206	296	403
+56	+73	+90	+107	
+17	+17	+17		

Her utledes den rekursive formelen direkte fra tabellen ved hjelp av første- og andredifferansene:

$$N_{n+1} = N_n + 56 + 17(n-1)$$
$$= N_n + 17n + 39$$

Som vi ser, ligger det mye matematikk i disse kreative og lekpregede aktivitetene.

Læreplaner og historikk

I målformuleringer for matematikkfaget i *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen* legges det i mange sammenhenger vekt på initiativ, kreativitet og innsikt. Under «Felles mål for faget» finner vi delpunktene

- at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktivitet og bevisste valg av verktøy og redskaper
- at elevene utvikler innsikt i grunnleggende begreper og metoder i matematikk og utvikler sin evne til å se sammenhenger og strukturer og kunne forstå og bruke logiske resonnementer og trekke slutninger

I denne artikkelen er 'figurtall' brukt som utgangspunkt for utforsking av sammenhenger. I *Matematikkleksikon* defineres 'Figurtall' slik: *Tallmønster som tilhører den pytagoreiske matematikken. Til de viktigste hører kvadrattall, pentagontall og trekanttall.*

Den greske filosofen og matematikeren Pytagoras (ca. 569–469 f.Kr) studerte bl.a. tallmønstre og figurtall. Også rektangeltallene er kjent fra den pytagoreiske matematikken.

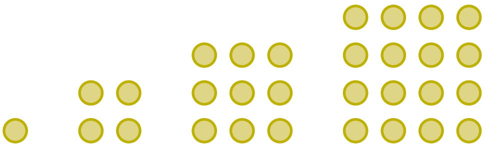
En rekke matematikere har senere utforsket sammenhenger i figurtallene. Nicomachus' (ca.100 e.Kr.) viste spesiell interesse for kvadrattall, rektangeltall og trekanttall. Romeren Boëthius (475–526) oversatte Nichomachus' arbeider fra gresk til latin, og bidro på denne måten til å gjøre grekernes matematikk kjent i middelalderens Europa. Vi må også nevne Pascals (1623–1662) trekant der vi kan finne igjen mange av tallfølgene som danner figurtallene.

Vi kan finne både *rekursive* og *eksplisitte* formler for figurtallene. De eksplisitte formlene er formler der figurtall nr. n uttrykkes ved hjelp av et naturlig tall n. Rekursive formler uttrykker *vekst* slik at hvert element i tallfølgen som figurtallene danner, beregnes ut fra ett eller flere av de foregående elementene.

Vi viser noen av de mest kjente figurtallene og finner eksplisitte formler for dem.

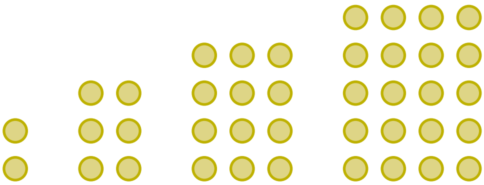
kvadrattall (K_n): De første kvadrattallene er 1, 4, 9, 16. Det lett å se at kvadrattall nr. n er gitt ved den eksplisitte formelen

$$K_n = n^2 \qquad (1)$$



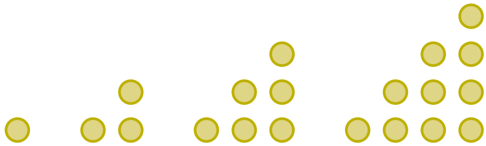
rektangeltall (R_n): Vi definerer rektangeltallene slik at lengden er lik bredden pluss en. Dermed får vi de fire første tallene 2, 6, 12, 20 og formelen

$$R_n = n(n+1) \qquad (2)$$



trekanttall (T_n): Trekanttallene 1, 3, 6, 10 er halvparten av rektangeltallene med samme indeks (lag figur), og dermed blir formelen

$$T_n = n(n+1)/2 \qquad (3)$$



I denne artikkelen har vi gitt noen eksempler på hvordan tallfølger og figurtall er brukt som aktivitet for ulike målgrupper. Konklusjonen må være at her er det mye spennende matematikk å gripe fatt i, matematikk som vil engasjere mange uansett alder og matematiske forutsetninger.

Referanser

Burton, David M., Elementary Number Theory, Wm.C. Brown Publishers, (1989).

Kunnskapforlagets matematikkleksikon, Kunnskapsforlaget (1997).

Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen, det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement, (1996).