Aktiviteter i skolen om tall knyttet til figurer

Det kan tjene flere hensikter at elever arbeider med tallmønstre. Det gir mulighet til å utforske: være systematisk, lage tabeller, finne sammenhenger, uttrykke og begrunne hvorfor disse sammenhengene kommer fram, og generalisere dem. Elevene opplever gjennom dette matematikken også som en prosess, og i samsvar med konstruktivistisk læringsteori får de aktivt ta del i det å vinne kunnskap.

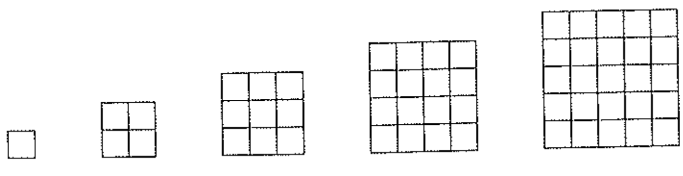
Når elevene skal uttrykke eller begrunne tallmønstre, vil bruk av algebraiske uttrykk med variabler være til nytte. Derfor er slikt arbeid også en innfallsport mot algebra – algebra som generaliserte resultater om tall.

Vi velger noen flere innfallsvinkler som har forbindelse med ideene foran, og som kan lede elever mot å se sammenhenger i tallenes verden.

Å lage kvadrater

Elevene kan bygge kvadrater som et utgangspunkt for å se på kvadrattallene.

FIGUR 4.10



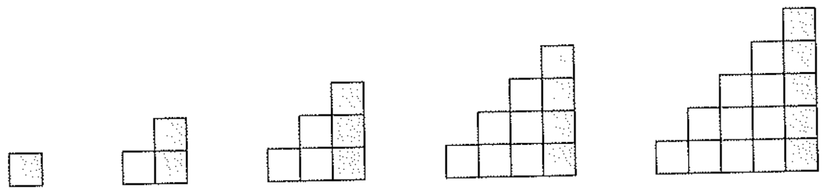
De kan studere dem ut fra ulike spørsmål, for eksempel:

- Hvor mange ruter er det i hvert av kvadratene? Elevene kan lage tabell og prøve å være systematiske.
- Hvor mange flere ruter får et kvadrat sammenliknet med det forrige?
- Hvordan er det med partall og oddetall?
- Hva kan vi si om sistesifrene? Kan vi finne noen som ender på 1? Noen som ender på 2? Hvilke sifre ender kvadrattallene på?

- Hva skjer om vi multipliserer to kvadrattall?
- Undersøk om vi kan få et nytt kvadrattall når vi adderer to kvadrattall.
- 25 og 49 er begge kvadrattall. 49 er «nesten det dobbelte» av 25. Finn flere slike par av kvadrattall.
- Et kvadrattall kan ikke være nøyaktig dobbelt så stort som et annet kvadrattall. Hvorfor ikke?

Å lage trapper

Elevene kan lage trapper av brikker. De kan dermed studere trekanttallene ut fra en konkret representasjon.



FIGUR 4.11

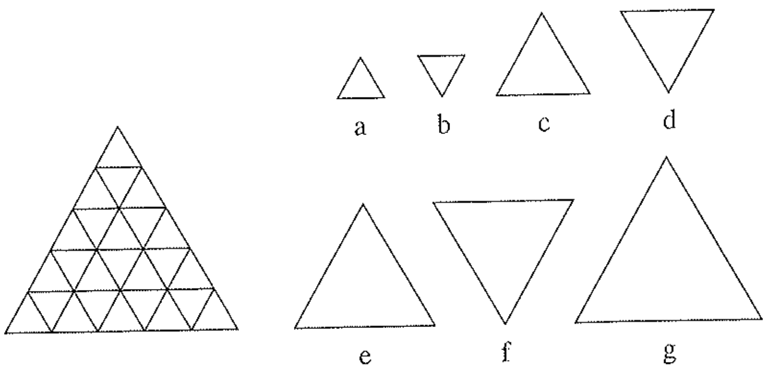
Elevene ser hvor god oversikt en tabell kan gi. Noen forslag til spørsmål:

- Hvor mange brikker trenger vi hver gang? Lag tabell. Vi får fram trekanttallene.
- Hvilken sammenheng ser vi mellom trekanttallene og kvadrattallene?

Trekanter i en trekant

Den største trekanten på figur 4.12 består av fem rader med små trekanter. Slike likesidede trekanter kan gi utgangspunkt for rike aktiviteter. Et trekantet prikk- eller linjepapir er nyttig hjelpemiddel. Spørsmål til elevene kan være:

- Hvor mange av de små trekantene er det i alt? Hvor mange er det av hver av typene a, b, c, d, e, f og g?
- Undersøk dette også for en trekant med seks rader med små trekanter.
- Se også på trekanter av andre størrelser. Undersøk!



FIGUR 4.12

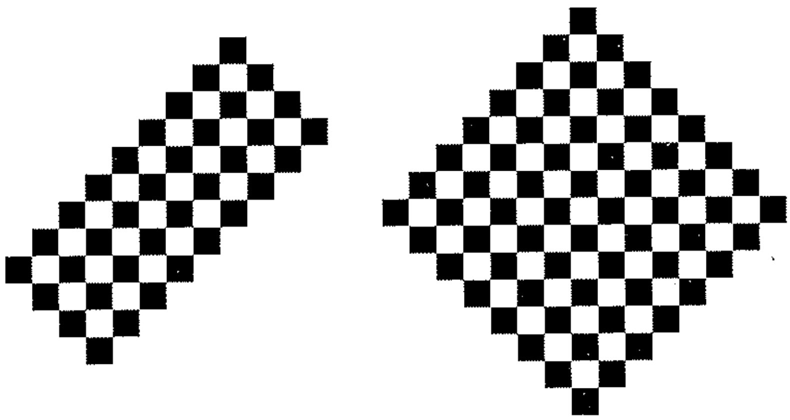
Svarte og hvite fliser

Figur 4.13A viser svarte og hvite ruter i et mønster. De fyller et tilnærmet rektangelformet område. Et nærmere studium av slike figurer kan være utgangspunkt for rik matematisk aktivitet. Noen aktuelle innfallsvinkler kan være:

- Hvor mange svarte og hvor mange hvite fliser er det her?
- Utforsk flere slike avlange områder av andre størrelser.

Figur 4.13B viser et tilnærmet kvadratisk område dekket av svarte og hvite ruter.

- Utforsk på samme måte dette og liknende kvadratiske områder av andre størrelser.
- Anta at det er n svarte ruter langs skråsiden i det kvadratiske området. Finn et uttrykk for antall svarte og hvite ruter på en slik figur. Prøv å telle opp de svarte rutene på to måter. Hva ser du?

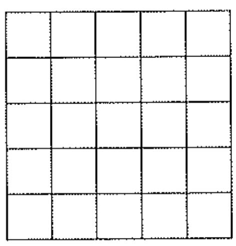


A B

FIGUR 4.13

Mange kvadrater

Hvor mange kvadrater av forskjellige størrelser fins det i alt på figuren? Elever kan utforske og generalisere.



FIGUR 4.14

Oppgaver

4.37 Summen av de n første oddetallene blir n^2. Vi vil finne ut noe tilsvarende for summen av de n første partallene.

a Legg merke til at

$$2+4=6 \qquad \text{og} \qquad 6=2\cdot 3$$
$$2+4+6=12 \qquad \text{og} \qquad 12=3\cdot 4$$

Undersøk om noe tilsvarende gjelder for summen av de fire første partallene og for summen av de fem første partallene.

b Formuler det du finner i en generell regel, en formel. Begrunn formelen.

c Vi kan komme fram til samme resultat som i **b** ved å utnytte at

$$2+4+\cdots+2n=2(1+2+\cdots+n).$$

Vis hvordan.

4.38 **a** Finn tallet $8\cdot T_n+1$ for $n=1$, 2 og 3. T_n er trekanttall nummer n.

b Se etter et mønster i svarene i **a**. Prøv å bevise at mønsteret gjelder for alle tall n.

c Illustrer det du fant.

4.39 Vi ser et mønster for noen andre summer av oddetall:

$$1=1^3$$
$$3+5=2^3$$
$$7+9+11=3^3$$

a Undersøk om summen av de fire neste oddetallene bli 4^3.

b Se også på om dette mønsteret fortsetter for 5^3.

4.40 Merk at

$$1=1^5$$
$$5+7+9+11=2^5$$
$$19+21+23+25+27+29+31+33+35=3^5$$

Uttrykk 4^5 som en sum av oddetall som følger etter hverandre.

4.41 Skriv hvert av primtallene opp til 100 som en sum av kvadrattall, så få som mulig. Hva ser du? Kontroller følgende resultater fra tallteorien:

- Alle primtall kan skrives som en sum av *høyst fire* kvadrattall.
- Alle primtall på formen $4k + 1$ kan skrives som en sum av *to* kvadrattall.

4.42 Sett opp tallrekka utover i sju kolonner med hensyn på tallet 7. Tall som gir samme rest ved divisjon med 7, skal stå i samme kolonne. Undersøk hvor kvadrattallene kommer. Utforsk dette også om tallene var satt opp i fem kolonner. Hvor kommer trekanttallene? Kubikktallene?

4.43 Merk at

$$1 = 1^4$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 2^4$$

a Uttrykk både 3^4 og 4^4 som en sum av oddetall som følger etter hverandre.

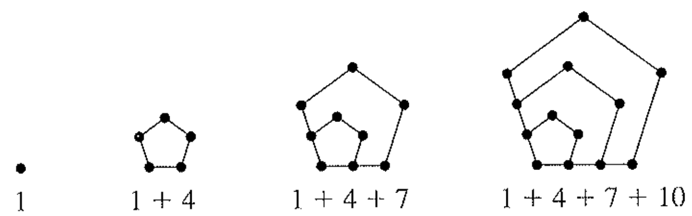
b Generaliser resultatet.

4.44 Femkanttallene kommer fram som vist på figur 4.15.

a Finn de seks første femkanttallene.

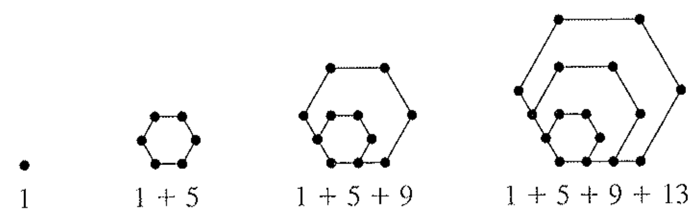
b Hva blir femkanttall nummer 9?

c Finn en formel for femkanttall nummer n.



FIGUR 4.15

4.45 **a** Lag tabell over de seks første sekskanttallene. Se figur 4.16.



FIGUR 4.16

b Uttrykk sekskanttall nummer n ved en formel.

4.30 Produktet av største felles faktor og minste felles multiplum blir lik produktet av de to tallene.

4.31 16 og 592 gir samme rest ved divisjon med 9.
253 og 37 gir samme rest ved divisjon med 9.
625, 9553 og 175 gir samme rest ved divisjon med 9.

4.32 **a** (q, r) er lik henholdsvis $(6, 49)$, $(196, 6)$, $(272, 30)$ og $(159, 3)$.
b 1760

4.33 **a** 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57
b 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58
c 13, 33 og 53. Alle gir rest 13 ved divisjon med 20.

4.34 39 kalkuner og 17 sauer.

4.35 **a** $\frac{65}{88}, \frac{3}{10}$
b Utvid alle brøkene slik at de får lik nevner, eventuelt lik teller. Rekkefølge:

$$\frac{25}{51} < \frac{39}{68} < \frac{7}{12} < \frac{16}{27}$$

4.36 **a** $n = 25$. Nytt tall: 225
b $n = 125$

4.37 **a** $2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 5 \cdot 6$
b Summen av de n første partallene blir $n(n + 1) = n^2 + n$.

4.38 Bruk setning 4.9 og omform uttrykket $8 \cdot T_n + 1$ til $(2n + 1)^2$.

4.39 **a, b** Ja

4.40 $49 + 51 + 53 + \cdots + 79 = 4^5$

4.43 **a** $1 + 3 + 5 + \cdots + 17 = 3^4$
$1 + 3 + 5 + \cdots + 31 = 4^4$
b Summen av de n^2 første oddetallene er lik $(n^2)^2$, altså n^4.

4.44 **a** 1, 5, 12, 22, 35, 51
b 117
c Et femkanttall kan skrives som en sum av et kvadrattall og et trekanttall. Femkanttall nummer n kan uttrykkes som $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

4.45 **a** 1, 6, 15, 28, 45, 66
b Et sekskanttall er lik summen av et femkanttall og et trekanttall. Sekskanttall nummer n er lik $2n^2 - n$.

4.46 Summen av de n første kubikktallene blir T_n^2.

4.48 Trekanttallene 1, 36, 1225, 41 616 og 1 413 721 er også kvadrattall. Det er trekanttall nummer 1, 8, 49, 288 og 1681 henholdsvis. Det kan være interessant å se på hvordan nummeret vokser og på hvilke kvadrattall det er.

4.49 Antall rektangler blir alltid et trekanttall.

4.50

7	−2	10
8	5	2
0	12	3

4.51

a	$3b - a - c$	c
$b - a + c$	b	$a + b - c$
$2b - c$	$a - b + c$	$2b - a$

4.52 Vink: Summen av alle tallene fra 1 til 16 er 136.
Da må hver av summene være $136 : 4 = 34$.

4.54 **f** Ja, det er alltid mulig når d, e og f er gitt.

4.56 Se figur 4.22. En regnefirkant kan løses bare når $x + z = y + u$.

5 Utvidelser av tallområdet

5.1 **a** −2 −6 5 −5 4
b 2 6 −5 5 −4

5.2 **a** −5
b 5
c 14
d −7
e 34
f 24