

Eksamen i matematikk 101 - løsningsforslag		BOKMÅL
Emnekode: MAT101		Eksamen
Tid:	4 timer	Dato: 24.10.2016
Hjelpemidler: Kalkulator, linjal, tegne- og skrivesaker		Studiested: Notodden og nett
Antall sider:	4 + formelark og LK06. Totalt 20 sider.	

Oppgave 1 (vekt 30 %)

a) Gjør om tallene til det angitte tallsystemet

i) $543_{\text{åtte}} = \quad_{ti}$

ii) $205_{ti} = \quad_{seks}$

Løsning:

i) $543_{\text{åtte}} = 5 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 = 355$

ii) $205_{ti} = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 1 = 541_{\text{seks}}$

b) Regn ut i det angitte tallsystemet

i) $745_{ni} + 456_{ni} =$

ii) $501_{\text{seks}} - 354_{\text{seks}} =$

iii) $44_{\text{syv}} \cdot 65_{\text{syv}} =$

Løsning:

i) $745_{ni} + 456_{ni} = 1312_{ni}$

ii) $501_{\text{seks}} - 354_{\text{seks}} = 103_{\text{seks}}$

iii) Under er utregningen på gangestykket vist. Dette er regnet i sytallsystemet, men jeg har tatt indeksene vekk da det ble så rotete hvis jeg tok dem med. (Strekene kom over indeksene.)

$$\begin{array}{r} 44 \cdot 65 \\ 356 \\ \underline{356} \\ 4246 \end{array}$$

- c) I gamle Egypt brukte det de vi kaller et additivt tallsystem. Forklar kort prinsippet for hva et additivt tallsystem. Forklar også hvordan posisjonssystemet er bygget opp.

I Egypternes tallsystem brukte de følgende symboler

						
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Skriv tallet 10341 med Egypternes symboler.

Løsning:

Et additivt tallsystem kjennetegnes ved at det er de vi legger sammen verdien på de enkelte symbolene. I hvilken rekkefølge de er plassert har ingen betydning. For eksempel vil tallene nnn II og II nnn være like hos egypterne. Vi legger også merke til at vi kun har symbol for tier potensene og at tall som 32 som vi viste i sted må skrives ved hjelp av tre symboler for ti og to symboler for en.

I et posisjonssystem vil sifrenes plassering ha betydning for tallets verdi. For eksempel vil 43 og 34 være to forskjellige tall. Ser vi på et tall som f. eks 547 så vil her 5 fortelle hvor mange hundrere vi har, 4 forteller hvor mange tier tallet består av og 7 tallet er antall enere.

Tallet 10341 kan skrives slik i Egypterne sitt tallsystem:



- d) I figuren under ser du et utdrag fra kladdeboken til Lille Kari

$$\begin{array}{r}
 234 \\
 + 123 \\
 \hline
 357
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 ^2 \\
 479 \\
 + 358 \\
 \hline
 7119
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 ^0 ^0 \\
 637 \\
 + 471 \\
 \hline
 118
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 54 \\
 + 52 \\
 \hline
 106
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 ^3 \\
 528 \\
 + 846 \\
 \hline
 1914
 \end{array}$$

Forklar hva Lille Kari kan ha tenkt. Hvordan kan du hjelpe Lille Kari videre i arbeidet med addisjon av flersifrede tall?

Løsning

Her har Lille Kari regnet forfra. Hun har først lagt sammen to første tallene. Om det ikke blir noe mente er det ikke noe problem. Da blir det riktig, slik at første stykke i boken hennes blir rett. Ser vi på stykke to, ser vi hun først tar $4+3$ som blir 7. Deretter tar hun $7+5$ som blir 12. Her setter hun 1 tallet i svaret og 2 i mente over enerne. Hun legger så sammen $9+8+2$ som blir 19. Dette skriver hun i svaret. Det samme har hun gjort i stykke 3 og 5. Ser vi på stykke 4 med $54+52$ så er dette riktig. Hva det skyldes er vanskelig å si. Det kan være at hun husker at $50+50$ er 100 og at hun da ser at $52+54$ må bli 106 uten å regne? Det er vanskelig å vite uten å spørre hun om hva hun har tenkt. Som tiltak ville jeg brukt konkretisering på enklere stykker. Jeg ville tatt for meg tall med to siffer der vi får mente som stykker som f. eks $17+26$. Her kan vi bruke penger som konkretisering og vise at når vi legger sammen 7 og 6 kroner så får vi 13 kroner. Vi kan veksle inn 10 kroner i en tier som vi legger sammen med den ene tieren fra 17 og den andre tieren fra 26. Pengene kan også brukes for å vise at hennes tenkemåte ikke fører frem.

- e) Lille Ole jobber med divisjonsalgoritmen. Under ser du et utdrag av Lille Ole sin kladdebok

$$\begin{array}{r} 656 : 4 = 164 \\ 4 \overline{) 656} \\ \underline{25} \\ 24 \\ \underline{16} \\ 16 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 624 : 6 = 14 \\ 6 \overline{) 624} \\ \underline{24} \\ 24 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 711 : 3 = 237 \\ 6 \overline{) 711} \\ \underline{11} \\ 9 \\ \underline{21} \\ 21 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 812 : 4 = 23 \\ 8 \overline{) 812} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{0} \end{array}$$

Forklar hvordan Lille Ole kan ha tenkt når han løst disse divisjonstykkene. Hvordan vil du legge opp det videre arbeidet med divisjonsalgoritmen for Lille Ole?

Løsning

Her har Lille Ole tenkt mye rett, men likevel så blir det problemer på to av stykkene. Ser vi på stykke 1 og 3 så er begge de rett og han har tenkt riktig her. På 2 og 4 starter han også rett, men han får problemer når første tallet går opp i det som det skal deles på. Han ser ikke at han bare skal føre ned 2 tallet i andre stykke og deretter få 0 som svar når han deler på 4. Riktig ført ville stykke to sett ut om dette

$$624 : 6 = 104$$

$$\begin{array}{r} \underline{6} \\ 2 \\ \underline{0} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

For å hjelpe Lille Ole ville jeg brukt penger samt ført utregningene mer fullstendig.
Her kunne vi gjort det slik

$$624 : 6 = 100 + 4$$

$$\begin{array}{r} \underline{600} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Vi kunne forklart Lille Ole at vi først gir en 100 lapp til hver. Vi ser hva vi står igjen med som er 24 kroner. Deler vi ut 24 kroner likt på de 6 personene ser vi at hver person får 4 kroner. Skal vi ta det ett steg videre mot algoritmen kunne vi forklart det videre til Lille Ole slik som dette: Vi gir først en 100 lapp til hver. Vi står da igjen med 24 kroner. Vi ser at det ikke er nok tiere til å gi alle en tier så hver får 0 tiere. Vi veksler deretter de to tierene i kronestykker slik at vi har 24 kroner som skal fordeles. Det gir 4 kroner til hver.

$$624 : 6 = 100 + 0 + 4$$

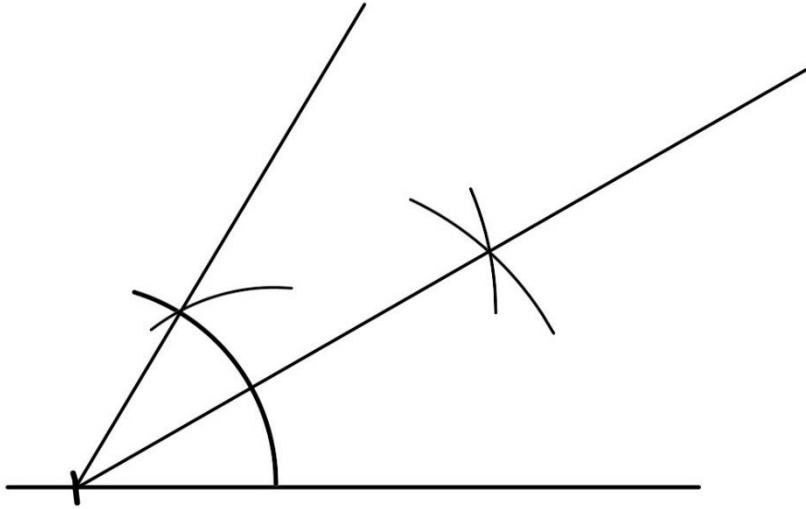
$$\begin{array}{r} \underline{600} \\ 24 \\ \underline{0} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Oppgave 2 (vekt 25 %)

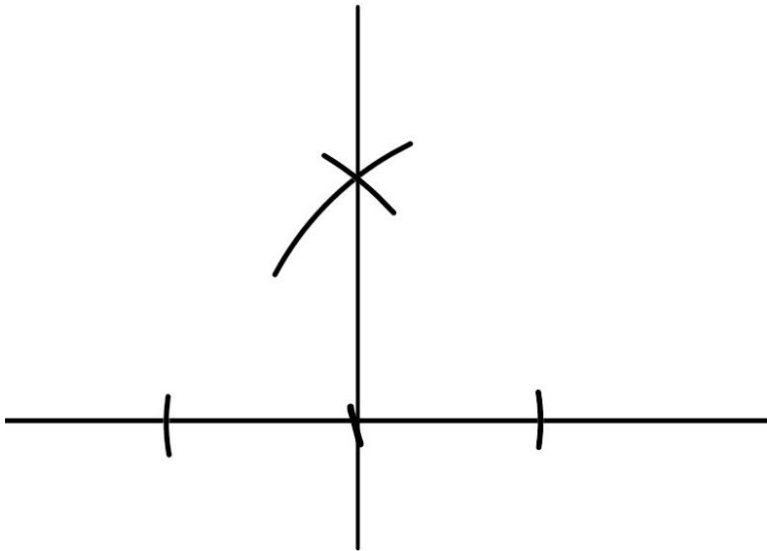
- a) Konstruer en 30 graders vinkel og en 90 graders vinkel.

Løsning

I figuren på neste side ser du konstruksjonene.



Konstruksjon av 30 graders vinkel

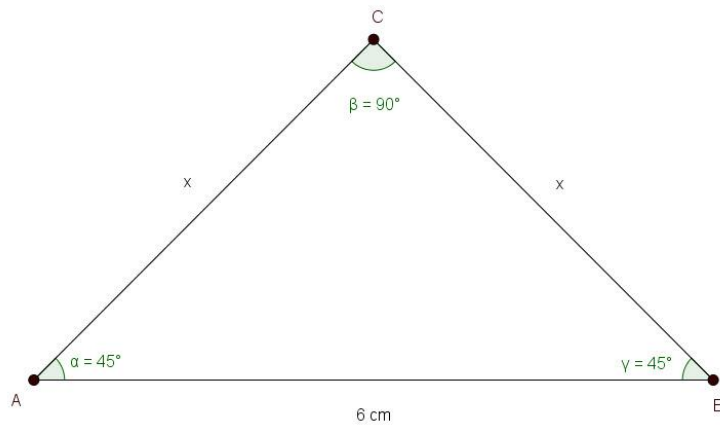


Konstruksjon av 90 graders vinkel

- b) Trekant ABC er en likebeint trekant der $\angle C = 90^\circ$ og AB er 6 cm. Hvor stor er $\angle A$ og $\angle B$? Regn ut hvor lang sidene AC og BC er. Hva er arealet til trekanten?

Løsning

På neste side ser du figuren tegnet inn. Merk at oppgaven ikke ber deg tegne opp figuren, men likevel er det ofte en fordel å lage en skisse av figuren da det gjerne er lettere å se hva som skal finnes.



Siden dette er en likebeinet trekant der ene vinkelen er 90 grader må de to andre være 45 grader. Med andre ord så er både vinkel A og vinkel B 45 grader. Lengden på AC og BC finner vi med Pytagoras. Siden trekanten er likebeinet må disse være like lange og vi kaller dem for x . Det gir oss

$$x^2 + x^2 = 6^2$$

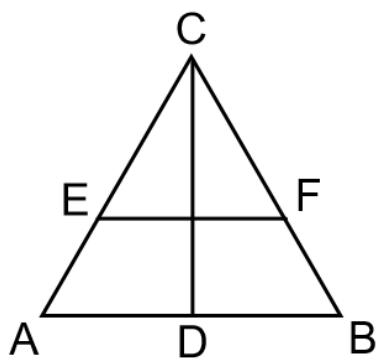
$$2x^2 = 36$$

$$x^2 = 18$$

$$x = \sqrt{18} = 4,24$$

$$\text{Arealet er: } A = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

c) I figuren under er det vist en likesidet trekant ABC .



EF er parallelt med AB og Linjestykket CD er normal fra punktet C ned på linjestykket AB. $AB = 8$ cm og EF er 5 cm. Forklar hvorfor trekanten ABC er formlik med trekanten CEF. Hvor langt er linjestykket AC? Regn ut lengden til EC og CD.

Løsning

Trekant ABC og trekant CEF har begge vinkel C felles. Siden AB er parallell med EF vil vinkel A og vinkel E være like store etter setning 5.10 i Alfa som sier at hvis to parallelle linjer (AB og EF) danner en linje som skjærer de to gitte linjene, samsvarende vinkler med de gitte linjene som er like store. Det betyr at vinkel BAC og vinkel FEC er like store. Da må også vinkel ABC og vinkel EFC være like store. Med andre ord er vinklene i trekant ABC og trekant EFC parvis like store og trekantene er dermed formlike.

Side AC er 8 cm. Dette fordi trekant ABC er likesidet og da må side AC være lik med AB. Trekant EFC er også likesidet siden ABC og EFC er formlike. Dermed må alle sidene være 5 cm og dermed er også EC 5 cm.

Side CD må vi bruke Pytagoas setning for å regne ut. Ser vi på trekant ACD så er det en trekant med vinkler på 30, 60 og 90 grader siden normalen halverer vinkel C. Vi vet derfor at AD er halvparten av AC. Vi kaller CD for x . Det gir oss

$$(AD)^2 + (CD)^2 = (AC)^2$$

$$4^2 + x^2 = 8^2$$

$$16 + x^2 = 64$$

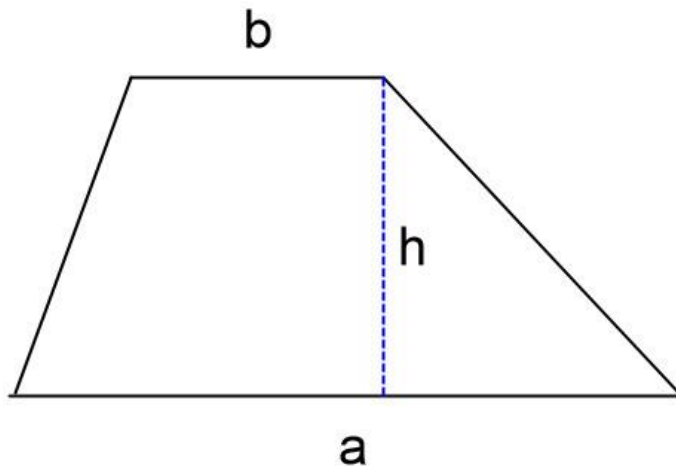
$$x^2 = 48$$

$$x = \sqrt{48} = 6,93$$

- d) Lille Kari har sett formelen for arealet til trapes i læreboka men forstår ikke hvorfor den stemmer. Hvordan vil du forklare formelen for lille Kari når du går ut i fra at hun kjenner formelen for arealet av en trekant?

Løsning

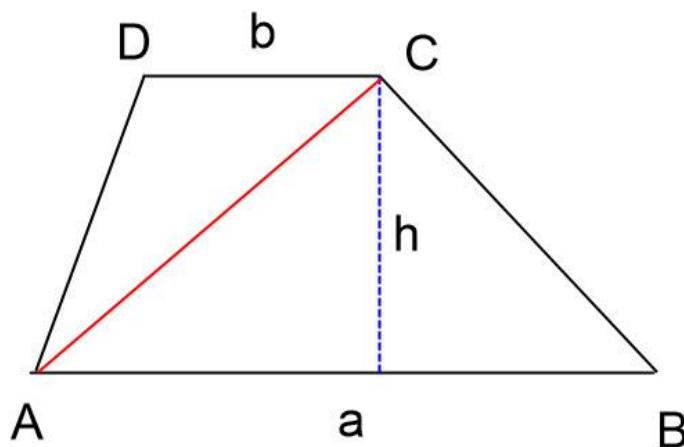
Det er flere måter å vise dette på. Nå skal vi ta utgangspunkt i at vi kjenner formelen for areal av trekant. Vi tar utgangspunkt i figuren på neste side.



Formelen for arealet av dette trapeset er

$$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Denne kan vi vise ved å dele opp trapeset i to trekanter som vist under.



Vi regner ut arealet for trekant ABC og for trekant CDA og legger disse sammen

Trekant ABC: $A = \frac{a \cdot h}{2}$

Trekant CDE: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Legg merke til at høyden er den samme for begge trekantene. Legger vi disse sammen får vi

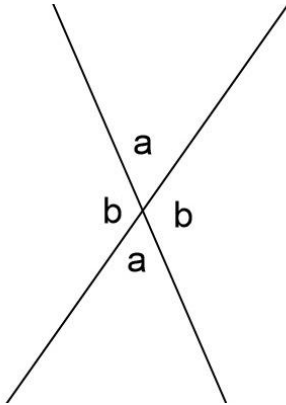
$$A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Dermed er formelen bevist.

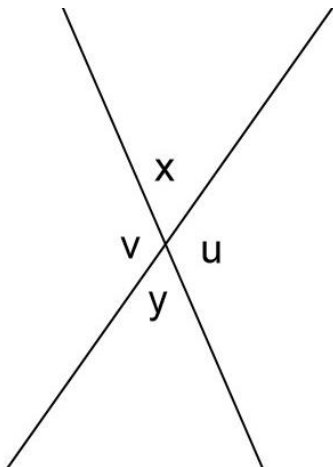
e) Bevis hvorfor toppvinkler er like store.

Løsning

Med setningen menes at vinklene som markert som a er like store og vinklene markert som b er like store.



Vi skal vise denne setningen. Vi kaller vinklene x, y, u og v. Det gir oss følgende figur



Vi ser her at

$$\angle x + \angle u = 180^\circ$$

$$\angle y + \angle u = 180^\circ$$

Vi ser her at fra første likningen så står det at vinkel x pluss vinkel y er 180 grader. Likeledes står det at vinkel y pluss vinkel u også er 180 grader. For at dette skal være mulig må vinkel x og vinkel y være like og dermed er setningen bevisst.

Det kan også settes opp som to likninger med to ukjente. Det gir oss

$$x + u = 180 \quad (\text{I})$$

$$y + u = 180 \quad (\text{II})$$

$$(x - y) + (u - u) = 180 - 180 \quad (\text{I-II})$$

$$x - y = 0 \quad (\text{I-II})$$

$$x = y \quad (\text{I-II})$$

som dermed viser at toppvinklene må være like store.

Oppgave 3 (vekt 8 %)

Finn eventuelle symmetrier i disse figurene:

a)

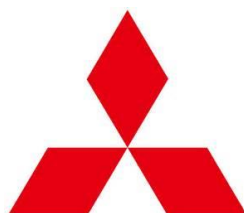


Løsning

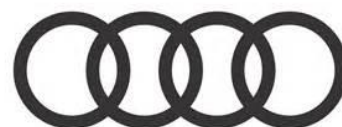
b)



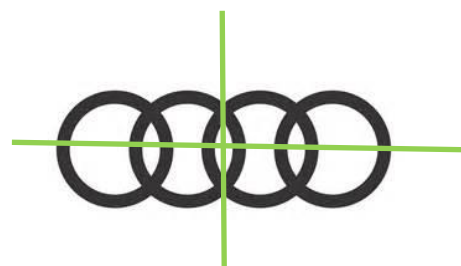
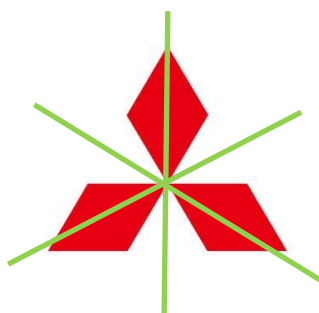
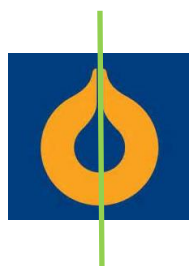
c)



d)



I figuren under er speilingene til logoene vist



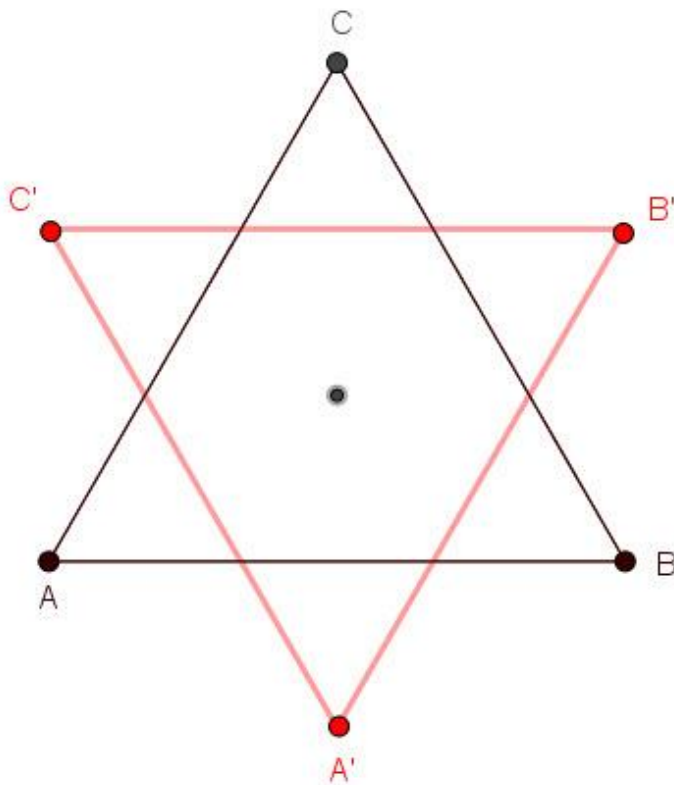
I tillegg har noen av dem rotasjonssymmetrier også. Figur a) og b) har ingen rotasjonssymmetrier. Figur c) kan roteres 120 grader og 240 grader. Figur d) kan roteres 180 grader.

Oppgave 4 (vekt 7 %)

Tegn en likesidet trekant. Roter trekanten med en rotasjonsvinkel på 60° med sentrum av trekanten som rotasjonspunkt.

Løsning

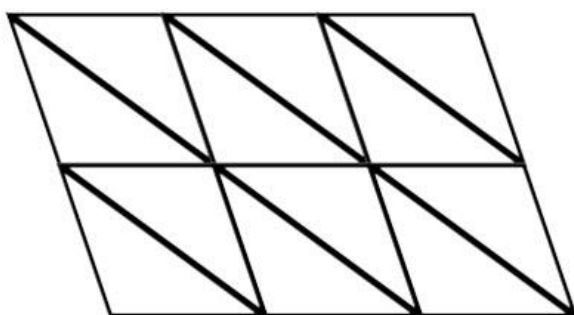
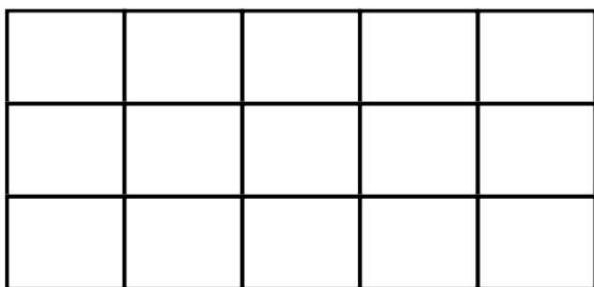
Under ser du trekanten ABC som er tegnet med svart rotert 60 grader om sentrum. Bildet du får når du roterer er tegnet med rødt.

**Oppgave 5 (vekt 10 %)**

- a) Hva menes med tesselering? Nevn to geometriske figurer som alltid tesselerer?

Løsning:

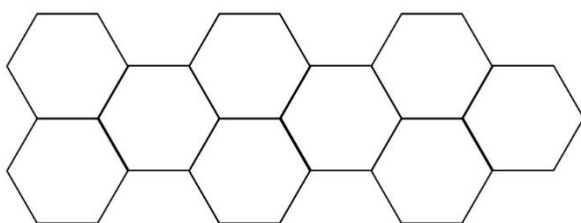
Tesselering er et matematikkbegrep for å fylle ut en flate med flere mindre, slik at de ikke har gap seg imellom, og heller ikke overlapper. Alle firkanter tesselerer f. eks. Det samme gjelder trekanter. To eksempler med en firkant og trekant er vist på neste side.



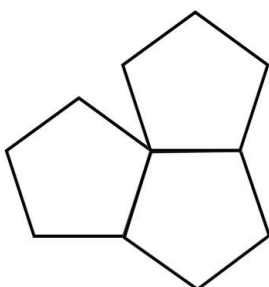
- b) Forklar hvorfor regulære sekkanter tesselerer og regulære femkanter ikke gjør det.

Løsning

I en regulær sekskant er alle vinklene 120 grader. Det betyr at om du legger sekskanter inntil hverandre i et punkt får du dekket hele flaten siden 3 vinkler på 120 grader til sammen blir 360 grader. Det vil med andre ord ikke være noe glipp. Det ser vi på figuren under



I en regulær femkant derimot vil vinklene være 108 grader. Om du legger tre slike inntil hverandre i et punkt får du bare dekket 324 grader. Det vil være en glipp som ikke dekkes.



Oppgave 6 (vekt 20 %)

- a) Innenfor måling snakker vi om begrepene direkte og indirekte måling. Forklar hva som ligger i disse begrepene.

Løsning:

Direkte måling er når vi ser to gjenstander samtidig og kan sammenlikne dem uten bruk av målegjenstander. Eksempel på dette kan være når vi stiller to personer inntil hverandre for å se hvem som er høyest. Indirekte måling er når vi ikke kan se gjenstandene samtidig, men må bruke et måleredskap for å kunne sammenlikne.

- b) Verdensrekorden på 5000 meter løping for menn tilhører Bekele og er på 12 minutter og 37 sekunder. (Vi dropper hundredelene her). Hva var gjennomsnittshastigheten på dette løpet? Finn svaret både i meter per sekund og kilometer per time.

Løsning:

Det er flere måter å gjøre denne på. Jeg ville regnet om tiden til sekunder. Vi ser da at tiden i sekunder vil bli

$$12 \cdot 60 + 37 = 757 \text{ s}$$

Siden han har løpt 5000 meter på 757 sekunder vil han ha løpt

$$\frac{5000}{757} = 6,61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

som da blir farten i m/s. I km/t tilsvarer dette

$$\frac{6,61 \cdot 3600}{1000} = 23,80 \text{ km/t}$$

- c) En tomt har form som et rektangel. Lengden på tomten er 43 meter og bredden er 38 meter. Hvor mange kvadratmeter er tomten? Finn også svaret i kvadratdesimeter.

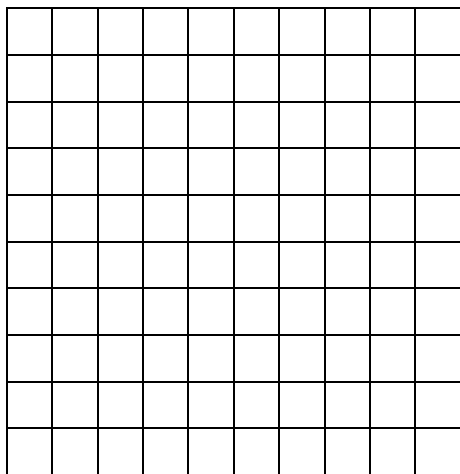
Løsning:

$$\text{Arealet blir } 43 \text{ m} \cdot 38 \text{ m} = 1634 \text{ m}^2 = 163\,400 \text{ dm}^2$$

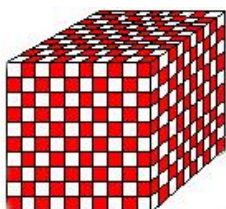
- d) En dag kommer Lille Ole hjem til deg og forteller at han hørt at det 1 kubikkmeter med vann er det samme som 1000 liter. Lille Ole synes dette høres mye ut. Hvordan vil du forklare til Lille Ole at dette stemmer?

Løsning:

Vi kunne startet med et kvadrat og vist at en kvadratmeter består av 100 kvadratdesimeter. Vi kunne gjerne brukt et rutenett til dette



Tenker vi her at siden på dette kvadratet er 1 meter så vil lengden også være 10 dm. Vi ser da at det er plass til $10 \cdot 10 = 100$ kvadratdesimeter i 1 kvadratmeter. Tenker vi oss nå at vi har terninger som har sider på 1 dm så ser vi at vi kan fylle en kvadratmeter med 100 slike. For å få kubikkmeter må vi ha 10 lag med slike terninger og vi får til sammen $100 \cdot 10 = 1000$ kubikkdesimeter. Her er en figur som illustrer dette



- e) Kvitsøy er landets minste kommune målt i areal. Arealet til Kvitsøy er $6,17 \text{ km}^2$. I 2013 falt det til sammen 1265 mm nedbør i Kvitsøy. Hvor mange kubikkmeter vann tilsvarer dette?

Løsning:

Vi regner om regnet til meter. Vi ser da at $1265 \text{ mm} = 1,265 \text{ m}$. Videre vet vi at $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$. Da blir $6,17 \text{ km}^2 = 6\,170\,000 \text{ m}^2$. Volumet på regnet blir da

$$V = 6\,170\,000 \text{ m}^2 \cdot 1,265 \text{ m} = 7\,805\,050 \text{ m}^3$$

Dette tilsvarer 7 805 050 000 liter regn.