

Løsningsforslag til eksamen i MAT101 vår 2016

Oppgave 1 (vekt 30 %)

a) Gjør om tallene til det angitte tallsystemet

i) $567_{\text{åtte}} = \quad_{ti}$

ii) $476_{ti} = \quad_{\text{åtte}}$

Løsning:

i) $567_{\text{åtte}} = 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7 = 375_{ti}$

ii) $476_{ti} = 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 4 = 734_{\text{åtte}}$

b) Tallet 61 er skrevet i et ukjent tallsystem. Vi vet imidlertid at tallet tilsvarer 49 i titallssystemet. Hvilket tallsystem er 61 skrevet i? Forklar hvordan du kommer frem til svaret.

Løsning:

Vi kaller det ukjente tallsystemet for x tallsystemet. Vi har da

$$61_x = 49$$

Dette gis oss videre

$$6 \cdot x + 1 = 49$$

Løser vi denne likningen så får vi

$$6x = 49 - 1$$

$$6x = 48$$

$$x = 8$$

Med andre ord, det ukjente tallsystemet er åttetallsystemet.

c) Regn ut i det angitte tallsystemet

- i) $4764_{ni} + 2025_{ni} =$
- ii) $2002_{seks} - 344_{seks} =$
- iii) $43_{syv} \cdot 54_{syv} =$

Løsning:

- i) $4764_{ni} + 2025_{ni} = 6800_{ni}$
- ii) $2002_{seks} - 344_{seks} = 1214_{seks}$
- iii) Under er utregningen på gangestykket vist. Dette er regnet i åttetallsystemet, men jeg har tatt indeksene vekk da det ble så rotete hvis jeg tok dem med. (Strekene kom over indeksene.)

$$\begin{array}{r} 43 \cdot 54 \\ 225 \\ \underline{312} \\ 3345 \end{array}$$

d) I fjerdeklasse begynner en vanligvis med subtraksjonsstykker der en må låne. Et eksempel på det er vist under:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cancel{6}4 \\ - 38 \\ \hline = 26 \end{array}$$

Lille Ole som går på skole A, løser oppgaven slik:

- Vi ser at 4-8 ikke går. Vi må derfor låne. Vi låner en tier fra 6-tallet.
- Vi regner så ut 10+4 som er 14. Deretter tar vi 14 og trekker fra 8 som blir 6.
- Til slutt tar vi 5-3 og får 2. (Husk at vi har lånt en tier.)
- Svaret blir altså 26.

Lille Kari som går på skole B løser oppgaven slik:

- Vi ser at $4-8$ ikke går. Vi må derfor låne. Vi låner en tier fra 6-tallet.
- Vi regner ut $10-8$ som blir 2. Vi tar deretter 2 og adderer med 4 som blir 6.
- Til slutt tar vi $5-3$ og får 2. (Husk at vi har lånt en tier.)
- Svaret blir altså 26.

Drøft hvilken metode du synes er den beste. I besvarelsen skal du vurdere styrker og svakheter med begge metodene, samt trekke en konklusjon med hva du mener er den beste metoden.

Løsning

Begge metodene har sine styrker og svakheter og en kan ikke uten videre fastslå hva som er best og dårligst. Begge metodene brukes også i skolen. Vi kan trekke frem noen styrker og svakheter ved begge metodene. Lille Ole sin metode er en mer direkte metode og det er en fordel. På den annen side involverer den tieroverganger ved at en må regne ut stykker som $14-8$. Dette slipper en med Lille Kari sin metode. Der er alle mellomregningene uten tieroverganger. Ulempen er at den er mindre direkte enn den andre. Personlig foretrekker jeg Lille Kari sin metode på grunn av utregningene er enklere.

- e) Konkretisering er ofte et effektivt virkemiddel for å få elevene til å forstå subtraksjonsstykker som det i spørsmål d) Forklar hvordan du kan bruke konkretisering for elever som sliter med å forstå subtraksjonsalgoritmen.

Løsning

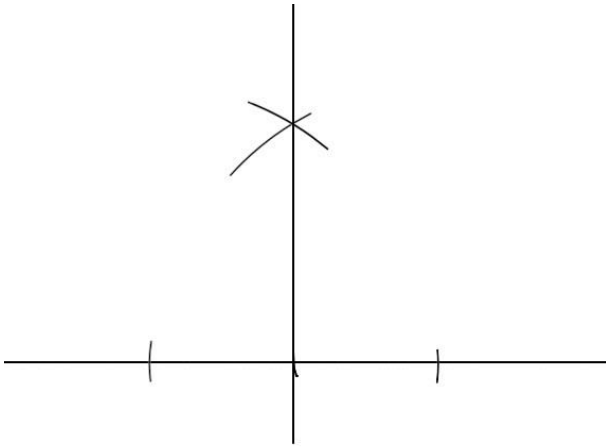
Penger eller lekepenger er ofte effektiv å bruke som konkretisering. Tar vi utgangspunkt i dette stykket kan vi finne frem 6 tiere og 4 kronestykker. Vi tar deretter bort 38 kroner. Vi oppdager at det ikke lar seg gjøre uten videre og vi er nødt til å veksle en tier i kronestykker. Dette gjør vi sammen med eleven. Dette vil tilsvare låning i algoritmen. Deretter tar vi bort 38 kroner og står igjen med 26.

Oppgave 2 (vekt 25 %)

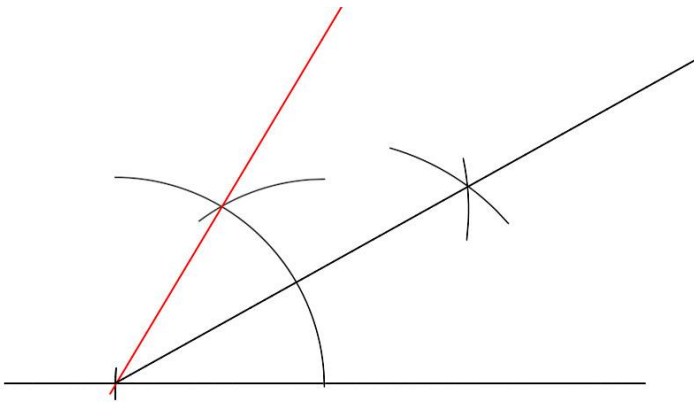
- a) Konstruer en 90 graders vinkel og en 30 graders vinkel.

Løsning

På neste side ser du konstruksjonen av 90 graders vinkel.



Under ser du konstruksjonen av 30 graders vinkel.



Vi starter først med å konstruere en 60 graders vinkel. Vinkelen mellom grunnlinjen og den røde linjen er 60 grader. Deretter halverer vi denne og vi får en 30 graders vinkel.

- b) I en trekant ABC er $AB = 6$ cm, $\angle A = 30^\circ$ og $\angle B = 90^\circ$. Hvor stor er $\angle C$? Finn hvor lang sidene AC og BC er.

Løsning

Her har vi en trekant med en vinkel på 30 grader og en vinkel på 90 grader. Vinkel C blir dermed $180 - 90 - 30 = 60$ grader. Dette er det vi kaller en 30, 60, 90 graders trekant og der vet vi at den korteste kateten er halvparten av hypotenusen. Vi kaller BC for x . Siden AC blir dermed $2x$. Vi setter dette inn i Pytagoras' setning.

$$6^2 + x^2 = (2x)^2$$

$$36 + x^2 = 4x^2$$

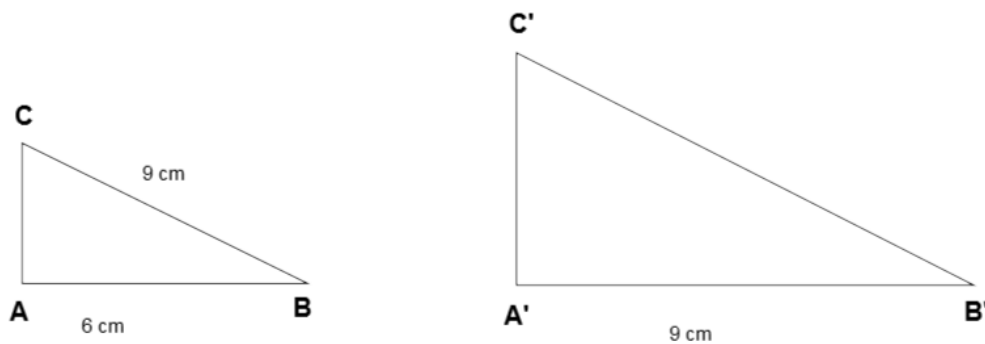
$$36 = 3x^2$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12} = 3,46$$

Med andre ord så er $BC = 3,46$ og $AC = 6,92$.

- c) Figurene under er formlike. Vinkel A og A' er begge 90 grader. Regn ut sidene AC , $B'C'$ og $A'C'$



Løsning

Det er flere måter å løse denne på. Her er et alternativ.

For å finne AC må vi bruke Pytagoras. Det gir oss

$$9^2 + 6^2 = x^2$$

$$81 + 36 = x^2$$

$$45 = x^2$$

$$x = \sqrt{45} = 6,71$$

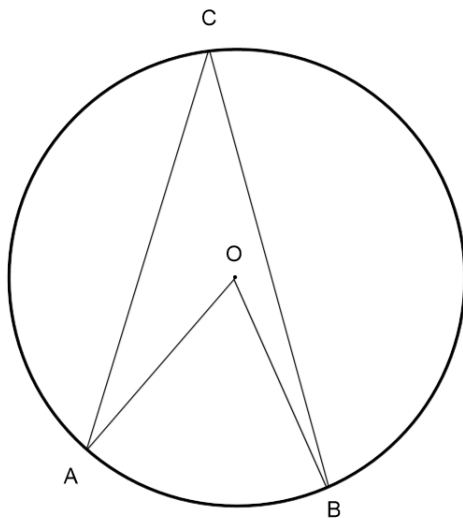
For å finne $B'C'$ og $A'C'$ må vi bruke formlikhet. Ser vi på størrelsesforholdet mellom AB og $A'B'$ så ser vi at det er

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5$$

Vi finner derfor at $B'C' = 1,5 \cdot BC = 1,5 \cdot 9 = 13,5$

Vi finner AC på samme måte. $A'C' = 1,5 \cdot AC = 1,5 \cdot 6,71 = 10,07$

d) I figuren under vinkel AOB 66 grader. Finn hvor stor vinkel ACB er?

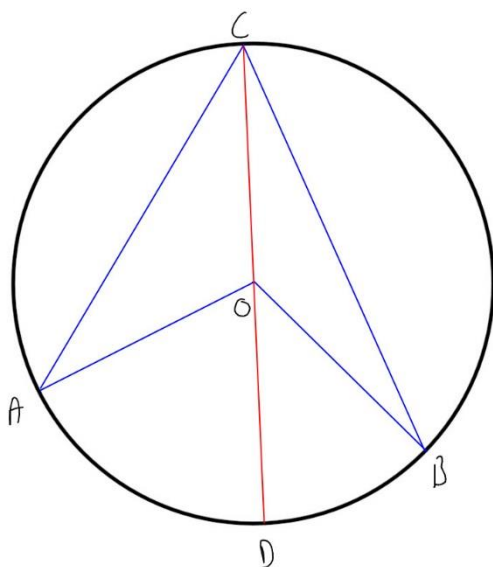


Hva kalles setningen du bruker for å finne dette resultatet. Bevis hvorfor den gjelder.

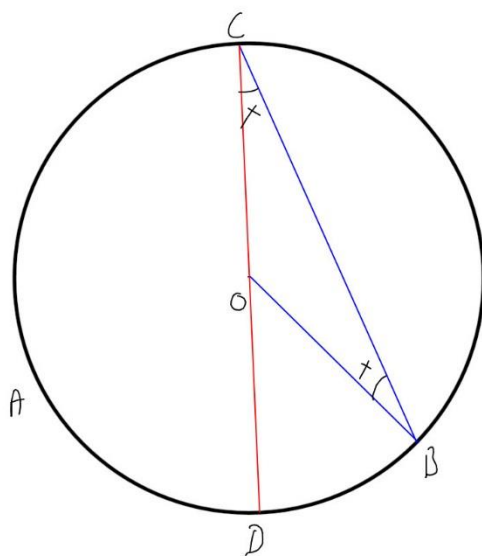
Løsning

Setningen kalles sentral-periferivinkel setningen. Den sier at sentralvinklen er dobbelt så stor som periferivinkelen når de spenner over samme sirkelbue. Det betyr at vinkel ACB er 33 grader.

Vi skal se på beviset for setningen. Det vi altså skal vise er at vinkel AOB er dobbelt så stor som ACB. Vi starter med å trekke en linje gjennom C og O og som fortsetter videre gjennom O. Se figur på neste side.



Vi skal ta for oss høyre delen først. Vi skal prøve å vise at vinkel DOB er dobbelt så stor som OCB. Klarer vi dette kan vi gjøre tilsvarende på venstre side slik at vi får bevist setningen. Vi ser nærmere på trekant BOC. Her ser vi at både BO og OC er radius i sirkelen. Trekanten er med andre ord en likebeinet trekant. I en likebeinet trekant er to av vinklene like store og i dette tilfelle vil vinkel OCB være like stor som OBC. Vi kaller denne vinkelen for x . Da får vi



Siden vinkelsummen i en trekant er 180 grader vil vinkel BOC være

$$180 - x - x = 180 - 2x.$$

Vinkel DOB vil dermed være $180 - (180 - 2x) = 2x$.

Dermed har vi vist at setningen gjelder for høyre del av figuren. Tilsvarende resonnement kan vi gjøre for venstre del og dermed har vi fått bevist setningen. Se også øverste video på siden

<http://home.hit.no/~panderse/forskjelliggeo.php>

- e) Gi et eksempel på hvordan du kan konkretisere for elever i en klasse at vinkelsummen til en trekant er 180 grader.

I nederste video på denne siden

<http://home.hit.no/~panderse/forskjelliggeo.php>

har vi vist hvorfor vinkelsummen er 180 grader i en trekant. Ca. 4 minutter ut i filmen viser vi hvordan dette kan illustreres for elever ved å rive av hjørnene i en trekant og legge de sammen.

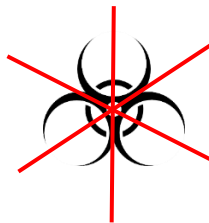
Oppgave 3 (vekt 8 %)

Gjør rede for eventuelle symmetrier i disse figurene:

a)



b)



c)



d)



Løsning

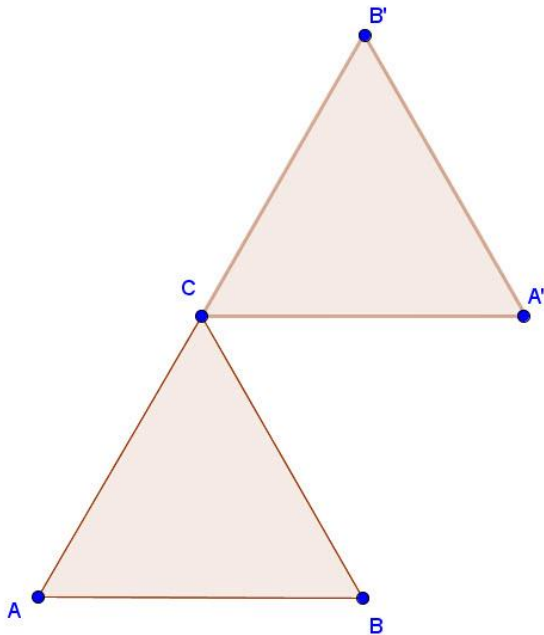
- a) Denne har ingen spesielle symmetrier
- b) Denne har flere speilsymmetrier. Se figur. Den kan i tillegg roteres 120 og 240 grader
- c) Denne har ingen speilsymmetrier, men den kan roteres 180 grader.
- d) Denne har ingen speilsymmetrier, men den kan roteres 90, 180 og 270 grader.

Oppgave 4 (vekt 7 %)

Tegn en likesidet trekant. Med rotasjonspunktet i en av trekantens hjørner skal du tegne en rotasjonssymmetri med rotasjonsvinkel 120 grader.

Løsning

Illustrasjonen under viser hvordan trekanten ABC ser ut når vi roterer den 120 grader om punkt C. Vi kunne også valgt et av de andre punktene. Det velger selv det punktet dere vil bruke



Oppgave 5 (vekt 10 %)

I en bikube kan vi se at sekskantene passer inntil hverandre.

- a) Hva kaller vi dette fenomenet, når figurer kan dekke hele flaten uten at det oppstår mellomrom mellom dem?

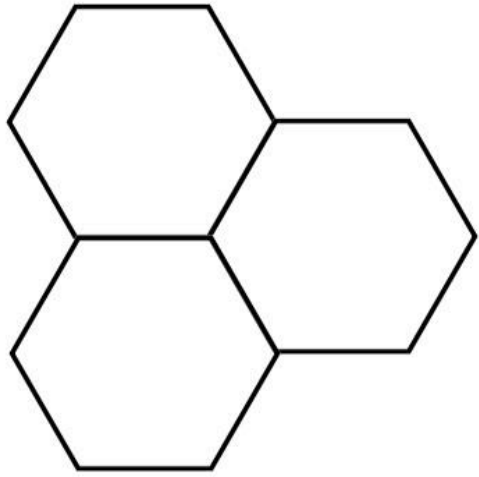
Løsning

Når en figur har denne egenskapen sier vi at figurer tesselerer.

- b) Forklar matematisk hvorfor regulære sekskanter har denne egenskapen.

Løsning

I en regulær sekskant er alle vinklene 120 grader. Legger vi tre sekskanter rundt et gitt punkt ser vi at vi vinklene til sammen danner 360 grader slik at vi får fylt hele figuren. Se figur neste side

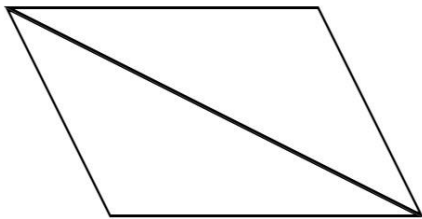


Vi ser her at vi ikke får noe mellomrom mellom figurene nettopp fordi at vinklene til sammen blir 360 grader. Slik kan vi fortsette å fylle ut figuren.

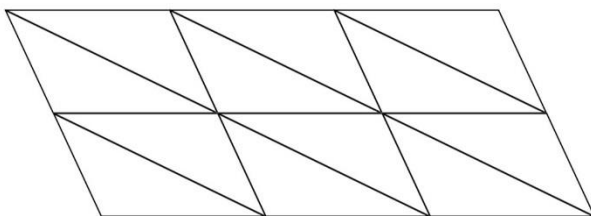
- c) Hva kan du si om trekanters egenskaper i denne sammenhengen?

Løsning

Enhver trekant vil alltid tesselere. Vi kan alltid sette sammen to trekanten til et parallellogram som vist under



Videre vet vi at ethvert parallellogram tesselerer som vist i figuren på neste side



Oppgave 6 (vekt 20 %)

- a) For å foreta en måling er det tre faktorer som må være på plass. Hvilke?

Løsning

Vi trenger måleredskap, måleenhet og måltall

- b) Eline går fottur på fjellet. Hun finner ut at hun går med en hastighet på fire kilometer i timen. Hva tilsvarer det i meter i sekundet?

Løsning

Når hun går 4 km/t betyr det at hun går 4000 meter i timen. Vi vet videre at i en time er det 3600 sekunder. Det betyr at hun da går

$$\frac{4000}{3600} = 1,11 \text{ meter per sekund.}$$

- c) Forklar hva vi mener med standardiserte og ikke-standardiserte måleenheter. Hvilken rolle spiller disse i utviklingen av barns evne til å foreta måling?

Løsning

Med ikke standardiserte måleenheter menes måleenheter som er spesielle for situasjonen der og da og noe som ikke kan overføres i andre sammenhenger. Det kan f. eks være en pinne som skal vise hvor langt noe er. Med standardiserte måleenheter mener vi måleenheter som er standard over mesteparten av verden. Dette gjelder f. eks SI enhetene meter, liter, kg sekunder etc. Når vi måler noe til å være f. eks 3 meter så vet alle hvor langt dette er. Det vil de ikke vite om vi sier at det 7 pinner langt. Barn i barnehagen vil alltid starte med å bruke ikke standardiserte enheter. Barna bruker det de finner av måleredskaper og de har heller ikke behov for å bruke standardiserte enheter. Etter hvert som barna blir større vil behovet for å bruke standardiserte enheter bli større.

- d) Av de enhetene vi bruker til å måle tid er noen astronomiske enheter og noen ikke. Forklar to eksempler fra hver gruppe.

Løsning

Denne oppgaven var det ikke jeg som laget når eksamen ble gitt. Jeg har sjekket og prøvd å finne ut hva som det spørres om, men konklusjonen min er at det ikke er noe som heter astronomisk enhet som er koblet til tid. Faglærer som hatt dette temaet har nok innført begrepet i en litt annen betydning enn det som er den offisielle. En astronomisk enhet er en lengdeenhet og er middellavstanden fra jorden til solen. Denne avstanden er 149 597 870 691 meter. Det er derfor litt vanskelig å svare på denne oppgaven når jeg ikke vet hvordan han har fremstilt dette

- e) Et tjern har et areal på to kvadratkilometer. En høstmorgen har det lagt seg is på vannet. Den er en kvart centimeter tykk. Hva er det totale volumet av isen?

Løsning

Når arealet er 2 km^2 tilsvarer det $2\,000\,000 \text{ m}^2$. Vi vet videre at isen er 0,25 cm tykk noe som tilsvarer 0,0025 meter. Volumet av isen blir dermed

$$V = 2\,000\,000 \cdot 0,0025 = 5000 \text{ m}^3$$

I liter tilsvarer dette 5 000 000 liter