

Løsningsforslag til utsatt eksamen 2. desember 2015

Oppgave 1 (vekt 20 %)

a) Løs ligningen

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

ved å bruke formelen for løsning av andregradsligninger.

Løsning.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \mp \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{7 \mp \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \mp 5}{6}$$

$$x = 2 \text{ og } x = \frac{1}{3}$$

b) Løs ligningen

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

ved å bruke fullstendig kvadraters metode.

Løsning.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x = -15$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -15 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 4^2 = -15 + 4^2$$

$$(x - 4)^2 = 1$$

$$\sqrt{(x - 4)^2} = \mp \sqrt{1}$$

$$x - 4 = \mp 1$$



$$x = 1 + 4 = 5 \text{ eller } x = -1 + 4 = 3$$

$$x = 5 \text{ eller } x = 3$$

Følgende oppgave var gitt til avgangsprøven i matematikk våren 2012:



Hvor mye koster én flaske vann?

Hvor mye koster ett eple?

- c) Løs oppgaven ved å sette opp et ligningssystem med to ligninger og to ukjente som du løser. Vis utregningene dine.

Løsning

$$2x + 2y = 40$$

$$x + 3y = 32$$

Vi deler først likning 1 på 2.

$$x + y = 20$$

$$x + 3y = 32$$

Vi bruker addisjonsmetoden og trekker likning II fra likning I. Det gir oss

$$y - 3y = 20 - 32$$

$$-2y = -12$$

$$y = 6$$

Vi finner x ved å sette inn verdien fra y i en av likningene. Vi finner da at x er lik 14.



- d) Lille Ole hadde løst denne oppgaven uten å sette opp et likningssystem. Han tenkte at når 1 flaske vann og 3 epler kostet 32 kroner så kostet 2 flasker vann og 6 epler 64 kroner. Hvordan kan lille Ole ha tenkt videre for å finne rett svar?

Løsning

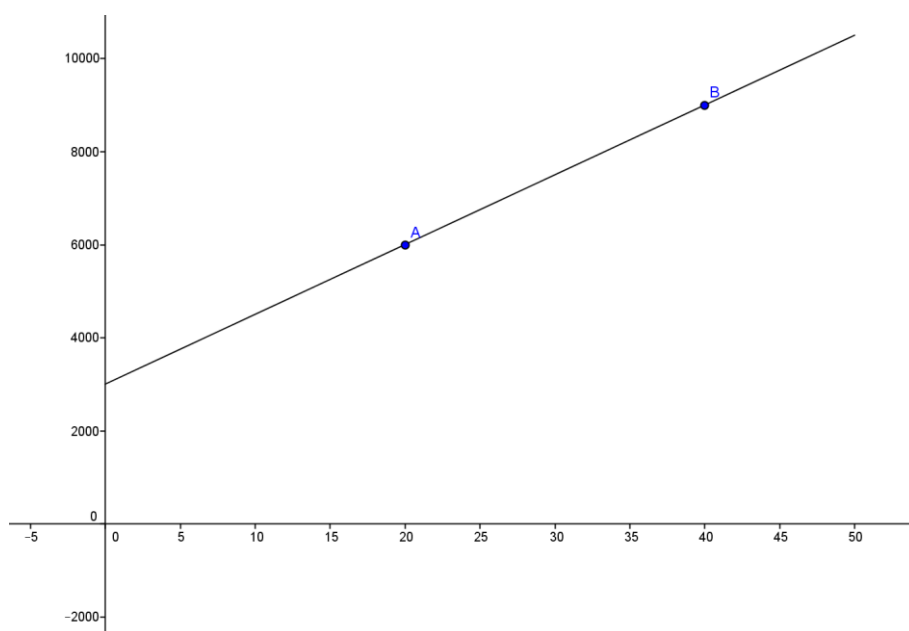
Vi tar utgangspunkt i at 2 flasker vann og 6 epler koster 64 kroner slik Lille Ole har resonert seg frem til. Vi vet samtidig at 2 flasker vann og 2 epler koster 40 kroner. Det må bety at 4 epler da koster 24 kroner, hvilket vil si at et eple koster 6 kroner. Ut i fra den andre tegningen kan vi da regne oss frem til at en flaske vann koster

$$32 - 3 \cdot 6 = 14 \text{ kroner}$$

Oppgave 2 (vekt 20 %)

Ole Jansen har vært heldig og fått jobb i budfirma. Jansen får lønn en gang i uken og han får en fast sum i uken uavhengig av hvor mange oppdrag han har pluss en bonus for hvert oppdrag. Bonusen er den samme for alle typer oppdrag. Den første uken hadde han 20 oppdrag, noe som gav en lønn på 6000 kroner. Andre uken hadde han 40 oppdrag, og det gav ham 9000 kroner i lønn.

- a) Lag et koordinatssystem der verdien på x -aksen er antall oppdrag og y er den tilsvarende lønnen. Tegn opp punktene i et koordinatsystem og trekk opp en linje som går gjennom punktene. Bruk dette til å finne hvor mye han tjener dersom han ikke har noen oppdrag.





Vi ser at vi tjener 3000 kroner om han ikke har noen oppdrag

- b) Finn en funksjon som beskriver sammenhengen mellom antall oppdrag og lønnen han får.

Løsning. Vi tar utgangspunkt i de to punktene for å finne stigningstallet. Vi ser da at

$$a = \frac{9000 - 6000}{40 - 20} = 150$$

Vi har da at $y = 150x + b$

Fra spørsmål a) ser vi at $b = 3000$.

Vi kan alternativt finne b ved å bruke et av punktene, f. eks (20,6000). Da får vi

$$6000 = 150 \cdot 20 + b$$

$$6000 = 3000 + b$$

$$b = 3000$$

Funksjonen blir dermed $y = 150x + 3000$

- c) Jansen får et annet tilbud om lønn fra ledelsen i bedriften. Det nye forslaget innebærer at han ikke får noe fast lønn, men 250 kroner for hvert oppdrag han tar. Finn en funksjon som beskriver dette lønnsystemet.

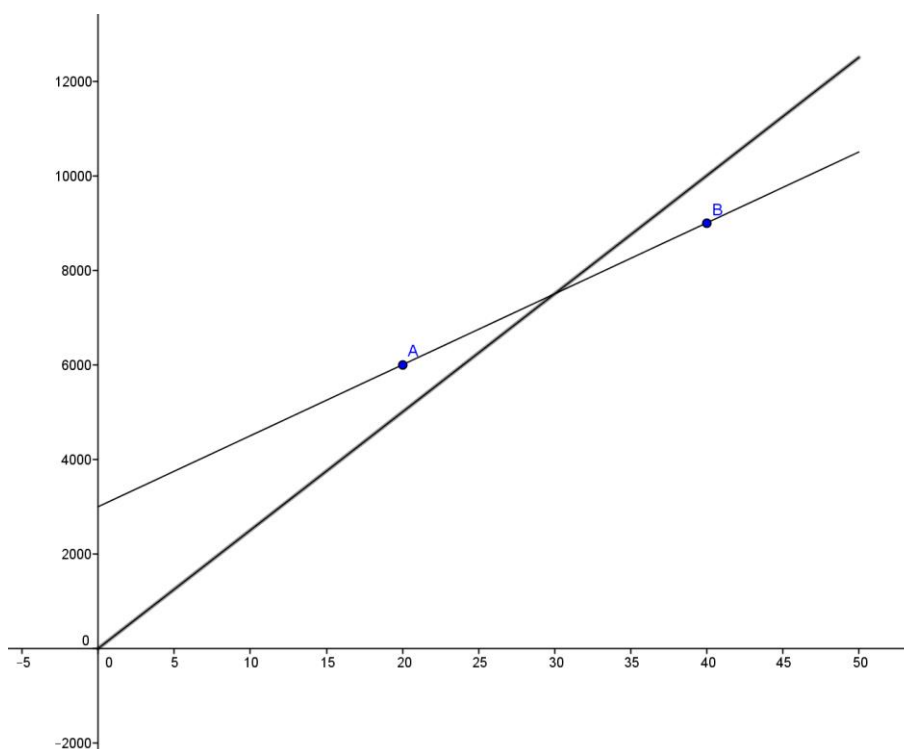
Løsning.

Her får vi at lønnen beskrives med funksjonen

$$y = 250x$$



d) Tegn opp grafen i samme koordinatsystem som i spørsmål a)



e) Hvor mange oppdrag må han ta for at det nye systemet skal gi mer i lønn enn det gamle? Løs oppgaven både grafisk og ved regning.

Løsning.

Fra grafen ser vi at han må ha flere enn 30 oppdrag for at det nye systemet skal lønne seg.

Ved regning kan vi sette disse to uttrykkene lik hverandre. Da får vi

$$150x + 3000 = 250x$$

$$3000 = 250x - 150x$$

$$3000 = 100x$$

$$x = 30$$

**Oppgave 3 (vekt 20 %)**

Vi har funksjonen

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- a) Finn funksjonens nullpunkter og funksjonens bunnpunkt ved regning.

Løsning. Vi finner først nullpunktene

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

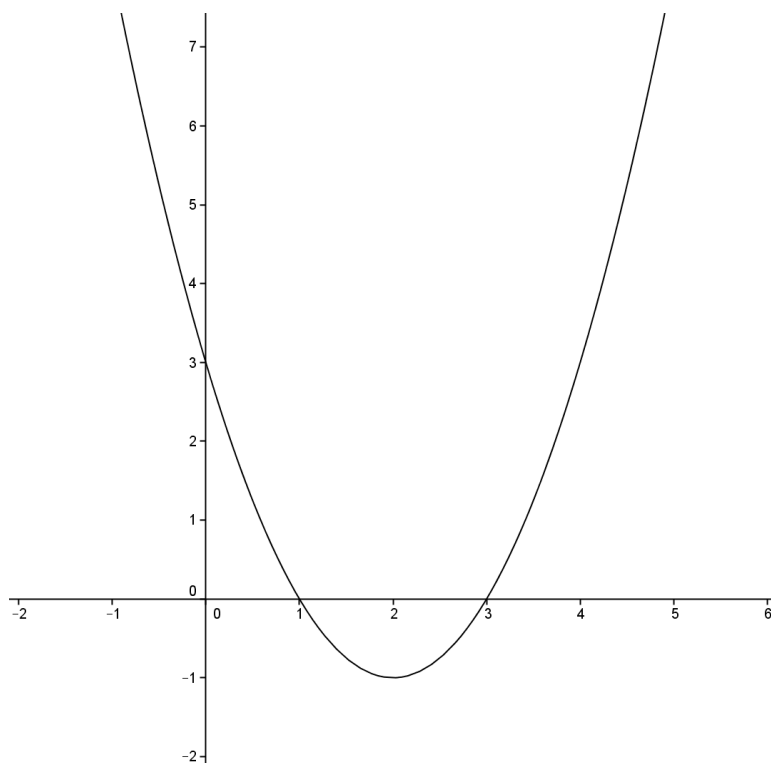
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 3 \text{ og } x = 1$$

Bunnpunktet ligger mitt mellom nullpunktene, altså for $x = 2$

- b) Lag en skisse av grafen.





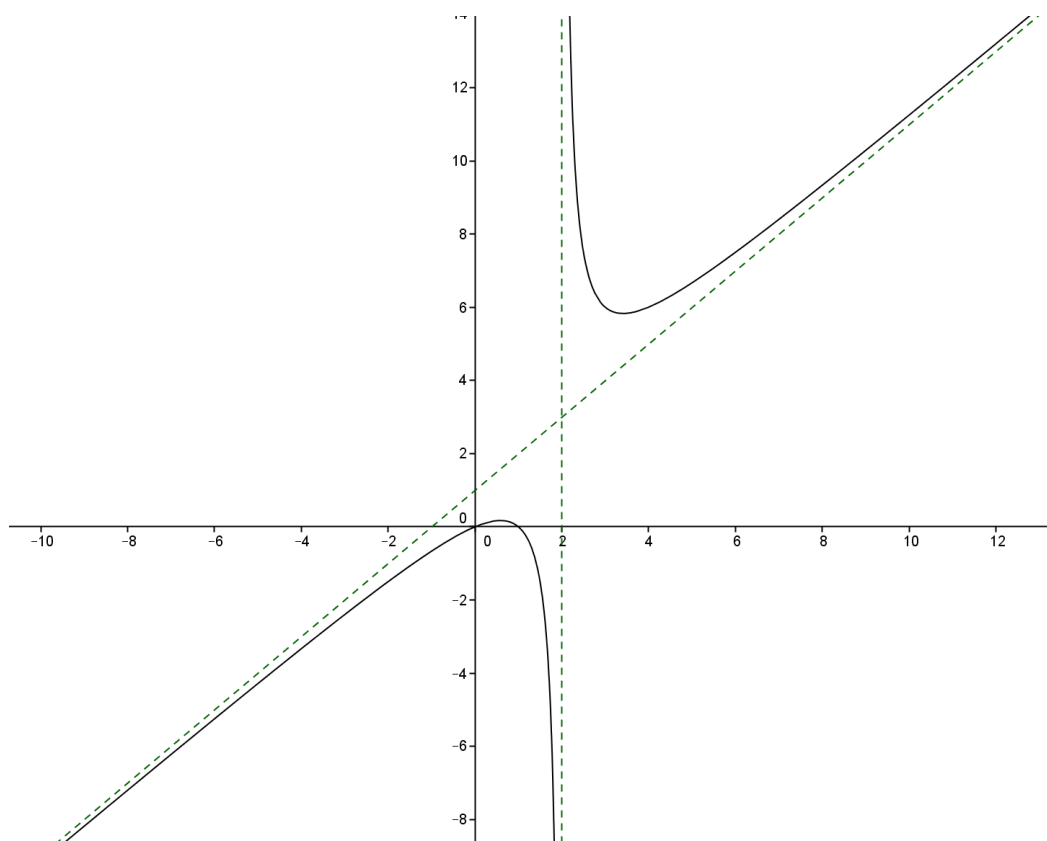
Vi har funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 2}$$

c) Finn funksjonen asymptoter.

Løsning. Funksjonen har to asymptoter. Den ene som er den vertikale finner vi når nevneren er lik 0, med andre ord når $x = 2$. Den andre vil være en skråasymptote. Vi ser at hvis $x \rightarrow \infty$ vil $f(x) \rightarrow x + 1$ slik at $y = x + 1$ blir en skråasymptote.

d) Lag en skisse av grafen.



**Oppgave 4 (vekt 20 %)**

- a) Skriv opp definisjonen på en sannsynlighetsmodell.

Løsning: En sannsynlighetsmodell er et utfallsrom U med sannsynligheter knyttet til hver begivenhet slik at følgende er oppfylt:

1. For en vilkårlig begivenhet A er $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(U) = 1$.
3. For en begivenhet, f.eks. $A = \{u_1, u_2, u_3\}$, er $P(A) = P(u_1) + P(u_2) + P(u_3)$.

Det vil si at sannsynligheten for en begivenhet A er lik summen av sannsynlighetene til hvert av utfallene i A .

I en kortstokk er det 52 kort fordelt slik: 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver.

Du trekker et kort fra en kortstokk. Du legger tilbake kortet, og trekker deretter et nytt kort. Du får vite at hvis det første kortet er hjerter og det andre kortet er spar, da vinner du ti milliarder kroner.

- b) Finn sannsynligheten for at du vinner, gitt at det er lik sannsynlighet for å trekke spar, hjerter, ruter og kløver.

Løsning: $\frac{1}{4}$ av kortene er hjerter, og $\frac{1}{4}$ er spar. Det er dermed $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ sannsynlighet for at det første er hjerter og det andre spar. Det går evt. an å ta $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}$.

Det er **helt feil** å addere disse to brøkene med hverandre. Svaret ville da blitt $\frac{1}{2}$. Og hvis dere prøver å tenke dere litt om, høres det jo litt rart ut hvis man skal kunne trekke akkurat rekkefølgen hjerter etterfulgt av spar 50 % av gangene. Sannsynligheten for spar etterfulgt av hjerter ville jo også da blitt 50 %. Og sannsynligheten for spar etterfulgt av spar, og hjerter etterfulgt av hjerter, og kløver etterfulgt av spar, og hjerter etterfulgt av ruter, osv. Da er vi totalt oppe i 800 % sannsynlighet for at et av disse utfallene forekommer!

Det mest uforståelige er at mange av de som adderte brøkene i denne deloppgaven, faktisk multipliserte i c)-oppgaven og gjorde det riktig der.

I kortstokken er egentlig kortene litt rart formet, slik at sannsynligheten er 0,3 for å trekke spar, og 0,2 for å trekke hjerter.



- c) Hva er nå sannsynligheten for å trekke hjerter og spar?

Løsning: $0,3 \cdot 0,2 = 0,06$.

- d) Har vi en uniform sannsynlighetsmodell i c)-oppgaven? Hvorfor/hvorfor ikke?

Løsning: Den er ikke uniform, siden sannsynlighetene ikke er like. Her trenger man bare skrive at sannsynligheten for å trekke spar er forskjellig fra sannsynligheten for å trekke hjerter.

Når vi kaster to mynter, finnes det tre mulige utfall hvis vi ikke tar hensyn til rekkefølgen: Vi kan få to mynter, én mynt og én kron, og vi kan få to kron.

- e) Lille Ole mener at sannsynligheten er $\frac{1}{3}$ for å få hvert av utfallene beskrevet over. Hvordan vil du forklare Lille Ole hvordan sannsynlighetene egentlig fordeler seg?

Løsning: Hvis vi fargelegger den ene mynten blå og den andre mynten rød, går det an å sette opp alle mulige utfall slik at lille Ole klart ser at hvis den blå mynten viser kron og den røde mynten viser mynt, da er det et annet utfall enn hvis den blå viser mynt og den røde viser kron. Det som er vanskelig for lille Ole er jo å klart se disse to utfallene her som forskjellige. Når han får det til, er det ikke vanskelig å være enig i at det er fire forskjellige utfall, og $\frac{1}{4}$ sannsynlighet for hver av dem.

Her gis det poeng for de fleste ulike besvarelser. Men man må kunne si og forklare bittelitt utover å bare kjapt sette opp et diagram, for å få fullt hus.

Oppgave 5 (vekt 20 %)

I Norge hersker det en myte om at man er selvforsynt med strøm. Men dette er en sannhet med modifikasjoner. I virkeligheten har vi en utstrakt grad av handel med utlandet. I perioder når vi bruker lite strøm, stemmer det at vi er selvforsynte, og da eksporterer vi faktisk mye av vår vannkraft til utlandet. Men til gjengjeld importerer vi mye kullkraft og atomkraft i perioder når vi bruker mye strøm. Når vi i mediene leser om at Norge de par siste årene har vært «selvforsynt» med strøm, er det bare fordi vi totalt over ett år eksporterer mer enn det vi kjøper inn fra utlandet. Men når vi kommer til de kaldeste månedene om vinteren, er vi fortsatt helt avhengige av å kjøpe inn kullkraft og atomkraft fra utlandet. (Enkelte mener at det derfor er litt rart at man ikke i større grad bygger ut vannkraften i Norge.)



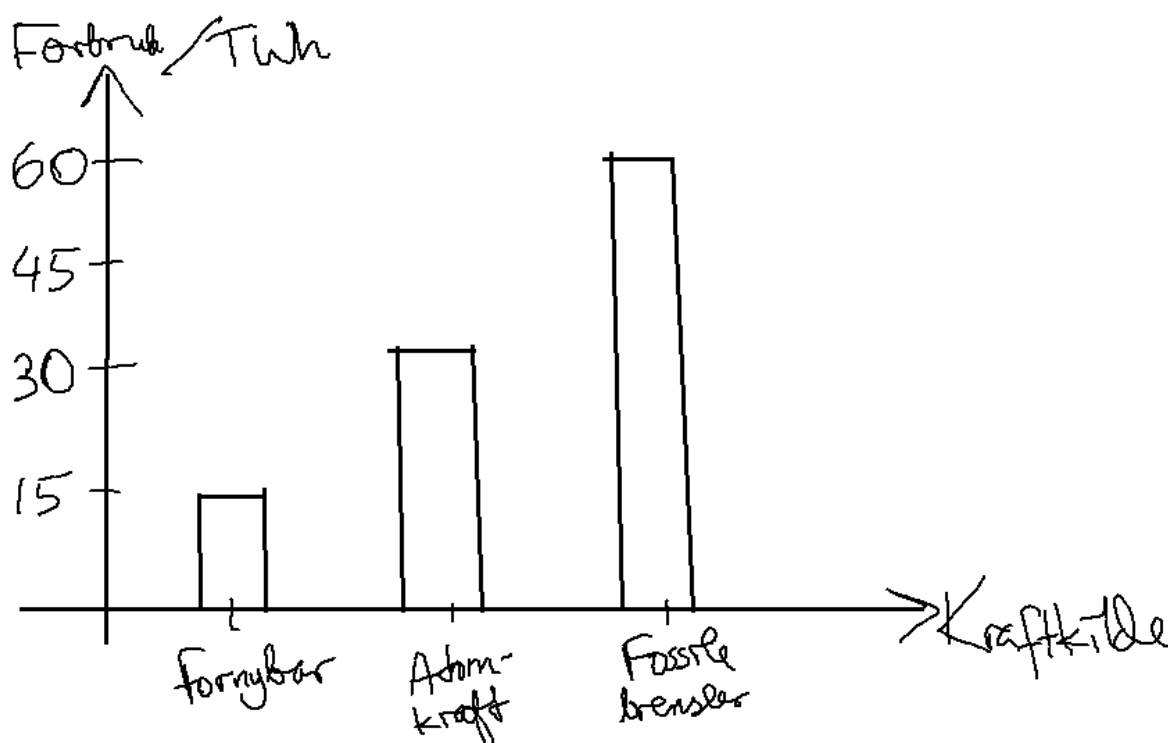
Følgende tall fra NVE viser hvor strømmen vi brukte i 2013, kom fra (kilde: nve.no/no/Kraftmarked/Sluttbrukermarkedet/Varedeklarasjon/Varedeklarasjon-2013):

Fornybar kraft:	14,43 TWh
Atomkraft:	36,63 TWh
Kraft fra fossile brensler (f.eks. kullkraft og gasskraft):	59,94 TWh

Forklaring: 1 TWh tilsvarer 1 milliard kWh. Men dette trenger dere ikke bruke i denne oppgaven. Det holder å bare bruke benevnningen TWh.

- a) Lag et søylediagram og sektordiagram som viser fordelingen av strøm fra fornybare energikilder, atomkraft og kraft fra fossile brensler. (Hvis du mangler gradskive, holder det å lage en skisse av sektordiagrammet. Men du må vise hvordan du kommer frem til gradene i diagrammet.)

Løsning: Søylediagrammet ser slik ut:

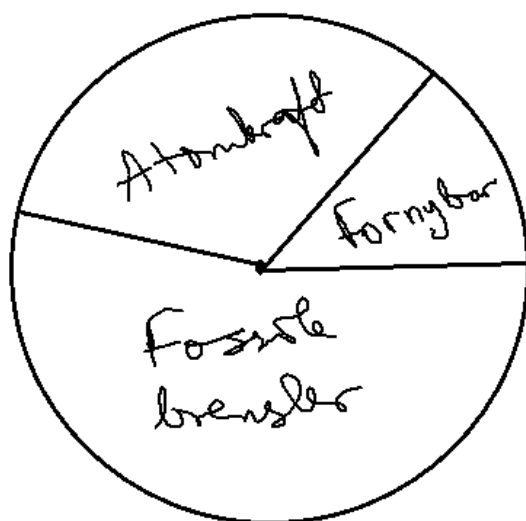


For å få frem sektordiagram, finner vi først antall grader som skal være i diagrammet:



Kilde	TWh	TWh/totalen	(TWh/totalen)·360°
Fornybar kraft	14,43	$\frac{14,43}{111} = 0,13$	46,8°
Atomkraft	36,63	$\frac{36,63}{111} = 0,33$	118,8°
Fossile brensler	59,94	$\frac{59,94}{111} = 0,54$	194,4°
Sum	111	1,00	360,0°

Sektordiagrammet er her:



- b) Gir det mening å sette opp et sektordiagram over disse tallene? Begrunn svaret ditt.

Løsning: Ja, det gir mening. Her er det naturlig å betrakte summen av disse tallene som en helhet, nemlig det totale strømforbruket i 2013. I sektordiagrammet ser vi dermed de enkelte kraftkildene sammenlignet med denne helheten. (Oppgaven er litt modifisert for å forenkle bildet bittelitt, men det er ikke langt ifra sannheten. På nettsiden som ble brukt som kilde, kan dere se hele bildet av kraftsituasjonen. Prosentene er omtrent som presentert i oppgaven.)

I oversikten fra NVE kan vi også finne følgende tall for hvor mye fornybare energikilder utgjorde av det norske forbruket i de siste årene (rundet av til hele TWh):

2013:	14 TWh
2012:	23 TWh
2011:	25 TWh
2010:	30 TWh
2009:	48 TWh



- c) Regn ut median, gjennomsnitt og standardavvik for det norske forbruket av fornybare energikilder fra 2009 til 2013.

Løsning: Medianen: Setter tallene etter hverandre i stigende rekkefølge. Dette er faktisk rekkefølgen presentert i oppgaveteksten, og vi ser at medianen er 25 TWh.

Gjennomsnittet: $\frac{14+23+25+30+48}{5}$ TWh = 28 TWh.

Standardavviket: $\sqrt{\frac{(14-28)^2+(23-28)^2+(25-28)^2+(30-28)^2+(48-28)^2}{5}}$ TWh $\approx 11,26$ TWh.

Nedgangen vi ser i det norske forbruket av fornybare energikilder, har sammenheng med økt handel med utlandet, og vi kan dermed vente at forbruket av fornybar kraft vil holde seg på et lavt nivå i årene fremover.

- d) Gir standardavviket og gjennomsnittet du fant i c)-oppgaven, et riktig bilde av hvordan forbruket av fornybare energikilder vil utvikle seg fremover? Begrunn svaret ditt.

Løsning: Nei. I oppgaveteksten skal vi ta utgangspunkt i at tallene *skal holde seg* på et lavt nivå. Altså: Etter hvert blir det ikke så mye nedgang lenger, og tallene vil flate seg ut. Etter hvert som årene går, vil gjennomsnittet nærme seg dette nivået. F.eks. vil 50 år fremover med 10 TWh fornybar energi gjøre at de fem årene vi hadde i c)-oppgaven, vil påvirke snittet veldig lite. Snittet blir da ca. 10 i det tilfellet. Så gjennomsnittet vi fant i c)-oppgaven, blir altså ikke lenger representativt.

Når det gjelder standardavviket, forteller tallet vi fant i c)-oppgaven, at det er mye svingninger. Men når det begynner å flate seg ut og holder seg på et lavt nivå, betyr jo det at det blir lite svingninger. Hvis det f.eks. er 50 år fremover med ca. 10 TWh fornybar energi, vil jo standardavviket være nesten null for de årene. Altså må vi vente at standardavviket etter hvert blir mindre og mindre.